Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ (Σειρά Α)
9-11 Ιανουαρίου 2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(β) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\, dx$.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

2. **(2 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$.

3. (**3 μον.**) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n f(x) e^{-nx}\, dx = f(0).$$

4. (**2 μον.**) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \qquad \int x^2 \ln x\, dx.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ (Σειρά Β)
9-11 Ιανουαρίου 2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι συνεχής, $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ και $\int_a^b f(x)dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

(β) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

(δ) Αν η f είναι φραγμένη και συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

2. **(2 μον.)** Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

3. (**3 μον.**) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^{n-1} f(x)\, dx = f(1).$$

4. (**2 μον.**) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \sin^3 x \, \cos^2 x \, dx, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{e^x+1}}\, dx.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ (Σειρά Γ)
9-11 Ιανουαρίου 2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. **(4 μον.)** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν για κάθε $a < t < b$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[t,b]$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη και συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

(δ) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. **(2 μον.)** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

3. (**3 μον.**) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

4. (**2 μον.**) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int x\sin^2 x\, dx, \qquad \int x^2 \ln x\, dx.$$

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 5ο Τεστ (Σειρά Δ)
9-11 Ιανουαρίου 2019

Ονοματεπώνυμο: ....

Αριθμός Μητρώου: ....

1. (4 μον.) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς: σημειώστε απλώς (Α) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι αληθής ή (Ψ) αν θεωρείτε ότι η πρόταση είναι ψευδής.

(α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(γ) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a,b]$ ώστε $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

(δ) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. (2 μον.) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.

3. (3 μον.) Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0)=0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x>0$,

$$\int_0^x f(t)\,dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt = xf(x).$$

4. (2 μον.) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\,.$$