Ανάλυση Ι και Εφαρμογές

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Α. Γιαννόπουλος

Τμήμα Φυσικής
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

1 Το σύνολο των πραγματικών αριθμών **1**

1.1 Φυσικοί, ακέραιοι και ρητοί αριθμοί . . . 1

1.1.1 Αρχή του ελαχίστου και αρχή της επαγωγής . . . 1

1.1.2 Ακέραιοι αριθμοί – διαιρετότητα . . . 4

1.1.3 Ρητοί αριθμοί . . . 5

1.1.4 Η αρχή της πληρότητας . . . 9

1.2 Πραγματικοί αριθμοί – η αρχή της πληρότητας . . . 11

1.3 Πρώτες συνέπειες της αρχής της πληρότητας . . . 16

1.3.1 Αρχιμήδεια ιδιότητα . . . 17

1.3.2 Ύπαρξη ακεραίου μέρους . . . 17

1.3.3 Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς . . . 18

1.3.4 Ύπαρξη n-οστής ρίζας . . . 19

1.4 Απόλυτη τιμή – επεκτεταμένη ευθεία – διαστήματα . . . 22

1.4.1 Απόλυτη τιμή . . . 22

1.4.2 Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών . . . 23

1.4.3 Διαστήματα . . . 24

1.5 Βασικές ανισότητες . . . 24

1.6 Ασκήσεις . . . 27

2 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών **33**

2.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών . . . 33

2.2 Σύγκλιση ακολουθιών . . . 34

2.3 Άλγεβρα των ορίων . . . 38

2.4 Βασικά όρια και βασικά κριτήρια σύγκλισης . . . 41

2.5 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών . . . 44

2.5.1 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών . . . 44

2.5.2 Ο αριθμός e . . . 46

2.5.3 Αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων . . . 47

2.5.4 Αναδρομικές ακολουθίες . . . 48

2.6 Υπακολουθίες . . . 49

2.7 Βασικές ακολουθίες . . . 51

2.8 Ασκήσεις . . . 53

3 Σειρές πραγματικών αριθμών **59**

3.1 Σύγκλιση σειράς . . . 59
3.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους . . . 63
3.2.1 Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους . . . 64
3.2.2 Ο αριθμός e . . . 65
3.3 Γενικά κριτήρια . . . 67
3.3.1 Απόλυτη σύγκλιση σειράς . . . 67
3.3.2 Κριτήρια σύγκρισης . . . 68
3.3.3 Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας . . . 69
3.3.4 Το κριτήριο του Dirichlet . . . 71
3.4 *Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών . . . 73
3.5 Δυναμοσειρές . . . 76
3.6 Ασκήσεις . . . 79

4 Συνέχεια και όρια συναρτήσεων **83**

4.1 Συναρτήσεις . . . 83
4.1.1 Κλάσεις πραγματικών συναρτήσεων . . . 86
4.1.2 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις . . . 87
4.1.3 Εκθετική συνάρτηση . . . 88
4.2 Συνεχείς συναρτήσεις . . . 90
4.2.1 Η άρνηση του ορισμού . . . 91
4.2.2 Αρχή της μεταφοράς . . . 92
4.2.3 Συνέχεια και πράξεις μεταξύ συναρτήσεων . . . 93
4.2.4 Συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και της εκθετικής συνάρτησης 94
4.2.5 Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά . . . 96
4.3 Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις . . . 97
4.3.1 Το θεώρημα ελάχιστης και μέγιστης τιμής . . . 97
4.3.2 Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής . . . 99
4.3.3 Παραδείγματα . . . 102
4.3.4 Εφαρμογές των βασικών θεωρημάτων . . . 102
4.4 Όριο συνάρτησης . . . 104
4.4.1 Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία . . . 104
4.4.2 Ορισμός του ορίου . . . 105
4.4.3 Αρχή της μεταφοράς για το όριο . . . 107
4.4.4 Δύο βασικά παραδείγματα . . . 109
4.4.5 Σχέση ορίου και συνέχειας . . . 109
4.5 Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης . . . 111
4.5.1 Λογαριθμική συνάρτηση . . . 113
4.6 Ομοιόμορφη συνέχεια . . . 114
4.6.1 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών . . . 116
4.6.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα . . . 118

4.7 Ασκήσεις 120

5 Παράγωγος 127

5.1 Ορισμός της παραγώγου 127
5.2 Κανόνες παραγώγισης 129
5.2.1 Κανόνας της αλυσίδας 130
5.2.2 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης. 131
5.2.3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης 132
5.3 Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης 133
5.4 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις 134
5.5 Κρίσιμα σημεία 135
5.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής 138
5.7 Απροσδιόριστες μορφές 141
5.8 Γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου 144
5.8.1 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις 144
5.8.2 Ασύμπτωτες 146
5.9 Ασκήσεις 147

6 Θεώρημα Taylor 153

6.1 Θεώρημα Taylor 153
6.2 Δυναμοσειρές και αναπτύγματα Taylor 158
6.2.1 Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$ 158
6.2.2 Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$ 158
6.2.3 Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ 159
6.2.4 Η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + x)$, $x \in (-1, 1]$ 160
6.3 Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά 160
6.4 Ασκήσεις 162

7 Ολοκλήρωμα Riemann 165

7.1 Ο ορισμός του Darboux 165
7.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann 168
7.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων 173
7.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann 175
7.5 Ο ορισμός του Riemann 181
7.6 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού 184
7.7 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού 185
7.8 Μέθοδοι ολοκλήρωσης 189
7.9 Γενικευμένα ολοκληρώματα 191
7.9.1 Το κριτήριο του ολοκληρώματος 193
7.10 Ασκήσεις 194

8 Τεχνικές ολοκλήρωσης **201**
8.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση 201
8.1.1 Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων 201
8.1.2 Υπολογισμός του $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$ 201
8.1.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα 202
8.1.4 Υπολογισμός του $\int f(x)\,dx$ με την αντικατάσταση $x = \varphi(t)$ 204
8.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη 205
8.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων 206
8.4 Κάποιες χρήσιμες αντικαταστάσεις 210
8.4.1 Ρητές συναρτήσεις των $\cos x$ και $\sin x$ 210
8.4.2 Ολοκληρώματα αλγεβρικών συναρτήσεων ειδικής μορφής 211
8.5 Ασκήσεις 213

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

1.1 Φυσικοί, ακέραιοι και ρητοί αριθμοί

Η αυστηρή θεμελίωση του συνόλου $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ των φυσικών αριθμών γίνεται μέσω των αξιωμάτων του Peano. Έχοντας δεδομένο το $\mathbb{N}$, μπορούμε να δώσουμε αυστηρή κατασκευή του συνόλου $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών και του συνόλου $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών. Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με τις πράξεις και τη διάταξη στα σύνολα των φυσικών, των ακεραίων και των ρητών αριθμών. Θα καταγράψουμε όμως τις βασικές ιδιότητες των φυσικών, ακεραίων και ρητών αριθμών από τις οποίες έπονται όλες οι ιδιότητες των πράξεων και της διάταξης. Αρχίζοντας από τους φυσικούς αριθμούς, στην επόμενη σύντομη παράγραφο συζητάμε δύο βασικές αρχές που δεχόμαστε γι΄ αυτούς.

1.1.1 Αρχή του ελαχίστου και αρχή της επαγωγής

Αρχή του ελαχίστου. *Κάθε μη κενό σύνολο S φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $a \in S$ με την ιδιότητα: $a \leqslant b$ για κάθε $b \in S$.*

Η αρχή του ελαχίστου έχει ως συνέπεια την εξής πρόταση: δεν μπορούμε να επιλέξουμε άπειρους το πλήθος φυσικούς αριθμούς οι οποίοι να φθίνουν γνησίως. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει μια τέτοια επιλογή φυσικών αριθμών

$$n_1 > n_2 > \cdots > n_k > n_{k+1} > \cdots ,$$

τότε από την αρχή του ελαχίστου το σύνολο $S = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ έχει ελάχιστο στοιχείο: αυτό θα είναι της μορφής n_m για κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Όμως, $n_{m+1} < n_m$ και $n_{m+1} \in S$, το οποίο είναι άτοπο.

Μια δεύτερη συνέπεια της αρχής του ελαχίστου είναι η αρχή της επαγωγής:

Θεώρημα 1.1.1 (αρχή της επαγωγής). *Έστω A ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες:*

(i) *Ο* 1 *ανήκει στο* A.

(ii) *Για κάθε* $k \in A$ *ισχύει ότι* $k+1 \in A$.

Τότε, το A *ταυτίζεται με το σύνολο όλων των φυσικών αριθμών:* $A = \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Τότε, το $S = \mathbb{N} \setminus A$ (το συμπλήρωμα του A) είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Από την αρχή του ελαχίστου, το S έχει ελάχιστο στοιχείο το οποίο συμβολίζουμε με m. Αφού $1 \in A$, αναγκαστικά έχουμε $m > 1$ οπότε $m - 1 \in \mathbb{N}$. Αφού ο m ήταν το ελάχιστο στοιχείο του S, έχουμε $m - 1 \notin S$, δηλαδή $m - 1 \in A$. Από την υπόθεση (ii) συμπεραίνουμε ότι

$$m = (m-1) + 1 \in A.$$

Όμως τότε $m \notin S$ και καταλήξαμε σε άτοπο. Συνεπώς, $A = \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση. Η αρχή του ελαχίστου και το Θεώρημα 1.1.1 είναι λογικά ισοδύναμες προτάσεις. Αν δεχτούμε την αρχή της επαγωγής μπορούμε να αποδείξουμε την αρχή του ελαχίστου (άσκηση).

Έστω ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε μια πρόταση $\Pi(n)$ που αφορά τον φυσικό αριθμό n. Η αρχή της επαγωγής μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εξασφαλίζοντας ότι: η $\Pi(1)$ ισχύει (αυτή είναι η *βάση της επαγωγής*) και ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\Pi(k) \Longrightarrow \Pi(k+1)$ (αυτό είναι το *επαγωγικό βήμα*). Παραδείγματα προτάσεων που αποδεικνύονται με τη «μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής» θα συναντάμε σε όλη τη διάρκεια του μαθήματος.

Θεώρημα 1.1.2 (μέθοδος της επαγωγής). *Έστω ότι για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *μας δίνεται μια (μαθηματική) πρόταση* $\Pi(n)$ *που εξαρτάται από τον φυσικό* n. *Αν η* $\Pi(1)$ *αληθεύει και για κάθε* $k \in \mathbb{N}$ *έχουμε*

$$\Pi(k) \text{ αληθής} \Longrightarrow \Pi(k+1) \text{ αληθής},$$

τότε η $\Pi(n)$ *αληθεύει για κάθε φυσικό* n.

Απόδειξη. Το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : \Pi(n) \text{ αληθής}\}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.1. Άρα, $A = \mathbb{N}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό n. □

Αξίζει να αναφέρουμε δύο παραλλαγές του Θεωρήματος 1.1.2. Η απόδειξή τους αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη (μιμηθείτε την προηγούμενη απόδειξη – χρησιμοποιήστε την αρχή του ελαχίστου):

(i) Έστω $m \in \mathbb{N}$ και A ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $m \in A$ και (β) για κάθε $k \geqslant m$ που ανήκει στο A έχουμε ότι $k+1 \in A$. Τότε, $A \supseteq \{n \in \mathbb{N} : n \geqslant m\} = \{m, m+1, \ldots\}$.

(ii) Έστω A ένα σύνολο φυσικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: $1 \in A$ και οποτεδήποτε $1, \ldots, k \in A$ έχουμε και ότι $k+1 \in A$. Τότε, $A = \mathbb{N}$.

Ισοδύναμα, έχουμε τα εξής:

(i) Έστω $\Pi(1), \Pi(2), \ldots$ προτάσεις, όπου κάθε $\Pi(n)$ εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $\Pi(m)$ αληθεύει για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ και αν για κάθε $k \geqslant m$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\Pi(k) \text{ αληθεύει} \Longrightarrow \Pi(k+1) \text{ αληθεύει},$$

τότε η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό $n \geqslant m$.

(ii) Έστω $\Pi(1), \Pi(2), \ldots$ προτάσεις, όπου κάθε $\Pi(n)$ εξαρτάται από τον φυσικό n. Αν η $\Pi(1)$ αληθεύει και αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$\text{οι } \Pi(1), \ldots, \Pi(k) \text{ αληθεύουν } \Longrightarrow \Pi(k+1) \text{ αληθεύει,}$$

τότε η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε φυσικό n.

Παραδείγματα 1.1.3. (α) Εξετάστε για ποιές τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύει η ανισότητα $2^n > n^3$.

Κάνοντας δοκιμές θα πειστείτε ότι η $2^n > n^3$ ισχύει για $n = 1$, δεν ισχύει για $n = 2, 3, \ldots, 9$ και (μάλλον) ισχύει για κάθε $n \geqslant 10$.

Δείχνουμε με επαγωγή ότι η $2^n > n^3$ ισχύει για κάθε $n \geqslant 10$: για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι η $2^m > m^3$ ισχύει για κάποιον $m \geqslant 10$. Τότε,

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m > 2m^3$$

και, χρησιμοποιώντας την $m \geqslant 10$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(m+1)^3 &= m^3 + 3m^2 + 3m + 1 \leqslant m^3 + 3m^2 + 3m^2 + m^2 = m^3 + 7m^2 < m^3 + m^3 \\ &= 2m^3 < 2^{m+1}.\end{aligned}$$

(β) Να δειχθούν με επαγωγή οι ταυτότητες

$$\begin{aligned}1 + 2 + \cdots + n &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ 1 + 3 + \cdots + (2n-1) &= n^2.\end{aligned}$$

(γ) Αποδείξτε ότι κάθε σύνολο S με n στοιχεία έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Θέλουμε να δείξουμε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση

$\Pi(n)$: Αν το S έχει n στοιχεία τότε το S έχει ακριβώς 2^n υποσύνολα.

Αν $n = 1$ τότε το S είναι μονοσύνολο και έχει ακριβώς δύο υποσύνολα, το $\emptyset$ και το S. Συνεπώς, η $\Pi(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $\Pi(k)$ αληθεύει. Έστω $S = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ ένα σύνολο με $(k+1)$ στοιχεία. Θεωρούμε το σύνολο

$$T = S \setminus \{x_{k+1}\} = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Το T έχει k στοιχεία, οπότε έχει 2^k υποσύνολα. Τώρα, κάθε υποσύνολο του S θα περιέχει ή δεν θα περιέχει το x_{k+1}. Τα υποσύνολα του S που δεν περιέχουν το x_{k+1} είναι ακριβώς τα υποσύνολα του T, δηλαδή το πλήθος τους είναι 2^k. Από την άλλη πλευρά, κάθε υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του T με την προσθήκη του x_{k+1} (αντίστροφα, κάθε υποσύνολο του T προκύπτει από κάποιο υποσύνολο του S που περιέχει το x_{k+1} με την αφαίρεση του x_{k+1}). Δηλαδή, το πλήθος των υποσυνόλων του S που περιέχουν το x_{k+1} είναι 2^k (όσα είναι τα υποσύνολα του T). Έπεται ότι το συνολικό πλήθος των υποσυνόλων του S είναι

$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Δηλαδή, η $\Pi(k+1)$ αληθεύει.

Συνεπώς, η $\Pi(n)$ αληθεύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

1.1.2 Ακέραιοι αριθμοί – διαιρετότητα

Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$. Λέμε ότι ο a *διαιρεί* τον b και γράφουμε $a \mid b$, αν υπάρχει $x \in \mathbb{Z}$ ώστε $b = ax$. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι ο a είναι *διαιρέτης* του b ή ότι ο b είναι *πολλαπλάσιο* του a. Σαν παράδειγμα εφαρμογής της αρχής του ελαχίστου θα δώσουμε αυστηρή απόδειξη της «ταυτότητας της διαίρεσης».

Θεώρημα 1.1.4 (ταυτότητα της διαίρεσης)**.** *Έστω $a \in \mathbb{N}$ και $b \in \mathbb{Z}$. Τότε, υπάρχουν μοναδικοί $q, r \in \mathbb{Z}$ ώστε*

$$b = aq + r \quad \textit{και} \quad 0 \leqslant r < a.$$

«Γεωμετρική απόδειξη»: Ένας απλός γεωμετρικός τρόπος για να σκεφτόμαστε την ταυτότητα της διαίρεσης είναι ο εξής: φανταζόμαστε μια ευθεία πάνω στην οποία έχουμε σημειώσει με κουκίδες τους ακεραίους. Σημειώνουμε με πιο σκούρες κουκίδες τα πολλαπλάσια του a. Διαδοχικές σκούρες κουκίδες έχουν απόσταση ακριβώς ίση με a. Τότε, ένα από τα δύο συμβαίνει:

(i) Ο ακέραιος b πέφτει πάνω σε κάποια από αυτές τις σκούρες κουκίδες, οπότε ο b είναι πολλαπλάσιο του a και $r = 0$.

(ii) Ο ακέραιος b βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές σκούρες κουκίδες, δηλαδή ανάμεσα σε δύο διαδοχικά πολλαπλάσια του a, και η απόσταση r ανάμεσα στον b και το μεγαλύτερο πολλαπλάσιο του a που είναι μικρότερο από τον b είναι ένας θετικός ακέραιος που δεν ξεπερνάει τον $a - 1$.

Η αυστηρή απόδειξη που θα δώσουμε παρακάτω βασίζεται σε αυτή την ιδέα: θεωρούμε το σύνολο S των «αποστάσεων» $b - as$ του b από τις σκούρες κουκίδες που βρίσκονται αριστερά του. Εξασφαλίζουμε ότι είναι μη κενό, άρα έχει ελάχιστο στοιχείο $b - aq$. Η κουκίδα aq είναι αυτή που βρίσκεται αμέσως πριν από τον b, και η απόσταση $r = b - aq$ πρέπει να είναι μικρότερη από a.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.4. Αποδεικνύουμε πρώτα την ύπαρξη αριθμών $q, r \in \mathbb{Z}$ που ικανοποιούν το ζητούμενο. Ορίζουμε $\mathbb{Z}^+ = \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant 0\}$ και θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{b - as : s \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{Z}^+$$

των μη αρνητικών ακεραίων της μορφής $b - as$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι το S είναι μη κενό: αν $b \geqslant 0$, τότε $b - a \cdot 0 \in S$. Αν $b < 0$, τότε $b - ab = (1 - a)b \in \mathbb{Z}^+$.

Από την αρχή του ελαχίστου το S έχει ελάχιστο στοιχείο, το οποίο συμβολίζουμε με r. Από τον ορισμό του S έχουμε $r \geqslant 0$ και υπάρχει $q \in \mathbb{Z}$ ώστε $b - aq = r$. Μένει να δείξουμε ότι $r < a$. Ας υποθέσουμε ότι $r \geqslant a$. Τότε,

$$b - a(q + 1) = b - aq - a = r - a \geqslant 0,$$

δηλαδή, $b - a(q+1) \in S$. Όμως $b - a(q+1) = r - a < r$, το οποίο είναι άτοπο αφού ο r ήταν το ελάχιστο στοιχείο του S.

Τέλος, αποδεικνύουμε τη μοναδικότητα των q και r. Ας υποθέσουμε ότι

$$b = aq_1 + r_1 = aq_2 + r_2,$$

όπου $0 \leqslant r_1, r_2 < a$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $r_1 \geqslant r_2$ (οπότε $q_1 \leqslant q_2$). Τότε,

$$r_1 - r_2 = a(q_2 - q_1).$$

Αν $q_1 < q_2$, τότε $a(q_2 - q_1) \geqslant a$ ενώ $r_1 - r_2 < a$ (προσθέστε κατά μέλη τις $r_1 < a$ και $-r_2 \leqslant 0$. Έχουμε αντίφαση, άρα $q_1 = q_2$ και $r_1 = r_2$. □

Σημείωση. Από το Θεώρημα 1.1.4 κάθε ακέραιος b γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $b = 2q + r$ για κάποιον $q \in \mathbb{Z}$ και κάποιον $r \in \{0, 1\}$. Λέμε ότι ο b είναι *άρτιος* αν $r = 0$. Αν $r = 1$, τότε λέμε ότι ο b είναι *περιττός*. Παρατηρήστε ότι οποιαδήποτε δύναμη περιττού ακεραίου είναι περιττός ακέραιος.

1.1.3 Ρητοί αριθμοί

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των *ρητών αριθμών* είναι το

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Θυμηθείτε ότι

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad mn' = nm',$$

και ότι οι πράξεις $+$ και $\cdot$ ορίζονται ως εξής:

$$\frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + m_1 n}{nn_1}, \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{m_1}{n_1} = \frac{mm_1}{nn_1}.$$

Τέλος,

$$\frac{m}{n} < \frac{m_1}{n_1} \quad \text{αν και μόνο αν} \quad m_1 n - mn_1 \in \mathbb{N}.$$

Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα $p.q, r$ για ρητούς αριθμούς.

Λήμμα 1.1.5. *Κάθε ρητός αριθμός q γράφεται σε «ανάγωγη μορφή» $q = \frac{m}{n}$, όπου ο μοναδικός φυσικός που διαιρεί τόσο τον m όσο και τον n είναι ο 1.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$E(q) = \left\{ n \in \mathbb{N} : \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{Z} \text{ ώστε } q = \frac{m}{n} \right\}.$$

Το $E(q)$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ (γιατί $q \in \mathbb{Q}$), άρα έχει ελάχιστο στοιχείο, ας το πούμε n_0. Από τον ορισμό του $E(q)$ υπάρχει $m_0 \in \mathbb{Z}$ ώστε $q = \frac{m_0}{n_0}$.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει φυσικός $d > 1$ ώστε $d \mid m_0$ και $d \mid n_0$. Τότε, υπάρχουν $m_1 \in \mathbb{Z}$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_0 = dm_1$ και $n_0 = dn_1 > n_1$. Τότε,

$$q = \frac{m_0}{n_0} = \frac{dm_1}{dn_1} = \frac{m_1}{n_1},$$

δηλαδή $n_1 \in E(q)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι $n_1 < n_0$. □

Οι βασικές ιδιότητες που ικανοποιούν η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{Q}$ είναι οι ακόλουθες.

(α) *Ιδιότητες της πρόσθεσης.*

- Προσεταιριστικότητα: για κάθε $p, q, r \in \mathbb{Q}$ ισχύει $(p+q)+r = p+(q+r)$.
- Αντιμεταθετικότητα: για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ισχύει $p+q = q+p$.
- Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{Q}$, ο 0, ώστε, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$,

$$q + 0 = 0 + q = q.$$

- Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{Q}$, ο $-q$, ώστε

$$q + (-q) = (-q) + q = 0.$$

Λέμε ότι το $\mathbb{Q}$ με την πράξη της πρόσθεσης είναι αντιμεταθετική ομάδα. Λέμε ότι ο $-q$ είναι ο *αντίθετος* του q. Η *αφαίρεση* στο $\mathbb{Q}$ ορίζεται μέσω της πρόσθεσης και του αντιθέτου, από την

$$p - q := p + (-q) \qquad (p, q \in \mathbb{Q}).$$

(β) *Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού.*

- Προσεταιριστικότητα: για κάθε $p, q, r \in \mathbb{Q}$ ισχύει $(pq)r = p(qr)$.
- Αντιμεταθετικότητα: για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ισχύει $pq = qp$.
- Υπάρχει μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{Q}$, ο 1, ώστε, για κάθε $q \in \mathbb{Q}$,

$$q \cdot 1 = 1 \cdot q = q$$

- Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ με $q \neq 0$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο του $\mathbb{Q}$ που συμβολίζεται με q^{-1}, ώστε

$$qq^{-1} = q^{-1}q = 1.$$

Ο q^{-1} είναι ο *αντίστροφος* του $q \neq 0$. Η *διαίρεση* στο $\mathbb{Q}$ ορίζεται μέσω του πολλαπλασιασμού και του αντιστρόφου, από την

$$\frac{p}{q} = pq^{-1} \quad (p, q \in \mathbb{Q},\ q \neq 0).$$

(γ) Η *επιμεριστική ιδιότητα* συνδέει τον πολλαπλασιασμό με την πρόσθεση: για κάθε $p, q, r \in \mathbb{Q}$, έχουμε

$$p(q + r) = pq + pr.$$

Ορισμός 1.1.6 (σώμα). Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο Σ εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$. Λέγοντας ότι η $+$ είναι πράξη στο Σ εννοούμε ότι για κάθε ζευγάρι x, y στοιχείων του Σ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x + y$ και λέγεται «άθροισμα» των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x + y$ λέγεται «πρόσθεση». Ομοίως, λέγοντας ότι η $\cdot$ είναι πράξη στο Σ εννοούμε ότι για κάθε ζευγάρι

x, y στοιχείων του Σ υπάρχει ακριβώς ένα στοιχείο του Σ που συμβολίζεται με $x \cdot y$ και λέγεται «γινόμενο» των x, y. Η πράξη που στέλνει το ζευγάρι (x, y) στο $x \cdot y$ λέγεται «πολλαπλασιασμός».

Αν το Σ έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία $0 \neq 1$ ώστε οι πράξεις $+$ και $\cdot$ να έχουν όλες τις ιδιότητες που γράψαμε παραπάνω για το $\mathbb{Q}$, τότε λέμε ότι η τριάδα $(\Sigma, +, \cdot)$ είναι ένα *σώμα*. Μπορούμε να δώσουμε παράδειγμα σώματος $(\Sigma, +, \cdot)$ στο οποίο το 0 και το 1 να είναι τα μόνα στοιχεία του Σ: θέτουμε $\Sigma = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ και ορίζουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό στο Σ θέτοντας

$$\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{0}+\mathbf{1}=\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}+\mathbf{0}=\mathbf{1}, \quad \mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{0}$$

και

$$\mathbf{0}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{0}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}=\mathbf{1}.$$

Ελέγξτε ότι με αυτές τις πράξεις το $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του σώματος.

Η τριάδα $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, με τις φυσιολογικές πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού, είναι τυπικό παράδειγμα σώματος. Τα σύνολα $\mathbb{N}$ και $\mathbb{Z}$ των φυσικών και των ακεραίων (με τις γνωστές πράξεις) δεν ικανοποιούν όλες τις ιδιότητες του σώματος: στο $\mathbb{N}$ δεν ορίζεται ο αντίθετος του n (επίσης, συμφωνήσαμε ότι $0 \notin \mathbb{N}$) και στο $\mathbb{Z}$ δεν ορίζεται ο αντίστροφος του $m \neq 0$.

Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά τη διάταξη στο $\mathbb{Q}$. Αυτό το οποίο παίζει σημαντικό ρόλο είναι ότι έχουμε ένα σύνολο *θετικών στοιχείων*, το σύνολο

$$\mathbb{Q}^+ := \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\},$$

το σύνολο των ρητών m/n που τόσο ο *αριθμητής* τους m όσο και ο *παρονομαστής* τους είναι φυσικοί αριθμοί. Το $\mathbb{Q}^+$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

$$q \in \mathbb{Q}^+, \qquad q = 0, \qquad -q \in \mathbb{Q}^+.$$

- Αν $p, q \in \mathbb{Q}^+$ τότε $p + q \in \mathbb{Q}^+$ και $pq \in \mathbb{Q}^+$.

Το σύνολο $\mathbb{Q}^+$ ορίζει τη διάταξη στο $\mathbb{Q}$ ως εξής: λέμε ότι $p < q$ (ισοδύναμα, $q > p$) αν και μόνο αν $q - p \in \mathbb{Q}^+$. Γράφοντας $p \leqslant q$ (ισοδύναμα, $q \geqslant p$) εννοούμε: είτε $p < q$ ή $p = q$. Από τις ιδιότητες του $\mathbb{Q}^+$ έπονται οι βασικές ιδιότητες της διάταξης:

- Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

$$p < q, \qquad p = q, \quad p > q.$$

- Αν $p < q$ και $q < r$, τότε $p < r$.
- Αν $p < q$ τότε για κάθε r ισχύει $p + r < q + r$.
- Αν $p < q$ και $r > 0$, τότε $pr < qr$.

Ορισμός 1.1.7 (διατεταγμένο σώμα). Γενικότερα, ένα σώμα $(\Sigma, +, \cdot)$ λέγεται *διατεταγμένο* αν υπάρχει ένα υποσύνολο Θ του Σ, που λέγεται το σύνολο των *θετικών στοιχείων* του Σ, ώστε:

- Για κάθε $x \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

$$x \in \Theta, \quad x = \mathbf{0}, \quad -x \in \Theta.$$

- Αν $x, y \in \Theta$ τότε $x + y \in \Theta$ και $xy \in \Theta$.

Το σύνολο Θ ορίζει μια *διάταξη* στο σώμα Σ ως εξής: λέμε ότι $x < y$ (ισοδύναμα, $y > x$) αν και μόνο αν $y - x \in \Theta$. Γράφοντας $x \leqslant y$ (ισοδύναμα, $y \geqslant x$) εννοούμε: είτε $x < y$ ή $x = y$. Από τον ορισμό,

$$x \in \Theta \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x > \mathbf{0}.$$

Από τις ιδιότητες του Θ έπονται οι εξής ιδιότητες της διάταξης $<$:

- Για κάθε $x, y \in \Sigma$ ισχύει ακριβώς ένα από τα ακόλουθα:

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

- Αν $x < y$ και $y < z$, τότε $x < z$.
- Αν $x < y$ τότε για κάθε z ισχύει $x + z < y + z$.
- Αν $x < y$ και $z > \mathbf{0}$, τότε $xz < yz$.
- $\mathbf{1} > \mathbf{0}$.

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται σαν άσκηση για τον αναγνώστη.

Αναπαράσταση των ρητών αριθμών στην ευθεία. Η ιδέα ότι οι αριθμοί μπορούν να θεωρηθούν σαν «αποστάσεις» οδηγεί σε μια φυσιολογική αντιστοίχιση τους με τα σημεία μιας ευθείας. Θεωρούμε τυχούσα ευθεία και επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο της, το οποίο ονομάζουμε 0, και ένα δεύτερο σημείο δεξιά του 0, το οποίο ονομάζουμε 1. Το σημείο 0 παίζει το ρόλο της αρχής της «μέτρησης αποστάσεων» ενώ η απόσταση του σημείου 1 από το σημείο 0 προσδιορίζει τη «μονάδα μέτρησης αποστάσεων». Οι ακέραιοι αριθμοί μπορούν τώρα να τοποθετηθούν πάνω στην ευθεία κατά προφανή τρόπο.

Μπορούμε επίσης να τοποθετήσουμε στην ευθεία όλους τους ρητούς αριθμούς. Ας θεωρήσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έναν θετικό ρητό αριθμό q. Αυτός γράφεται στη μορφή $q = \frac{m}{n}$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$. Αν τοποθετήσουμε τον $\frac{1}{n}$ στην ευθεία τότε μπορούμε να κάνουμε το ίδιο και για τον q. Αυτό γίνεται ως εξής: θεωρούμε δεύτερη ευθεία που περνάει από το 0 και πάνω της παίρνουμε n ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα με άκρα $1', \ldots, n'$, ξεκινώντας από το 0. Θεωρούμε την ευθεία που ενώνει το n' με το 1 της πρώτης ευθείας και φέρνουμε παράλληλη προς αυτήν από το σημείο $1'$. Αυτή τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα 01 της πρώτης ευθείας στο σημείο $\frac{1}{n}$ (κανόνας των αναλογιών για όμοια τρίγωνα).

Είδαμε λοιπόν ότι κάθε ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο της ευθείας. Το διατεταγμένο σώμα $\mathbb{Q}$ θα ήταν ένα επαρκές σύστημα αριθμών αν, αντίστροφα, κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχούσε σε κάποιον ρητό αριθμό. Αυτό όμως δεν ισχύει. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα, η υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1 έχει μήκος x που ικανοποιεί την

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

Αν κάθε μήκος μπορούσε να μετρηθεί με ρητό αριθμό, τότε το μήκος x θα έπρεπε να αντιστοιχεί σε κάποιον ρητό q.

Θεώρημα 1.1.8. *Δεν υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $q^2 = 2$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $q^2 = 2$. Αντικαθιστώντας, αν χρειαστεί, τον q με τον $-q$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q > 0$. Τότε, ο q γράφεται στη μορφή $q = m/n$, όπου $m, n \in \mathbb{N}$ και ο μοναδικός φυσικός αριθμός που είναι κοινός διαιρέτης των m και n είναι ο 1. Από την $q^2 = 2$ συμπεραίνουμε ότι $m^2 = 2n^2$, άρα ο m είναι άρτιος (το τετράγωνο περιττού είναι περιττός). Αυτό σημαίνει ότι $m = 2k$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$. Τότε $n^2 = 2k^2$, άρα ο n είναι κι αυτός άρτιος. Αυτό είναι άτοπο: ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m και n. □

Υπάρχουν λοιπόν «μήκη» που δεν μετριούνται με ρητούς αριθμούς. Αν θέλουμε ένα σύστημα αριθμών το οποίο να επαρκεί για τη μέτρηση οποιασδήποτε απόστασης πάνω στην ευθεία, τότε πρέπει να «επεκτείνουμε» το σύνολο των ρητών αριθμών.

1.1.4 Η αρχή της πληρότητας

Από τη στιγμή που σε ένα διατεταγμένο σώμα Σ έχουμε ορισμένη τη διάταξη $<$, μπορούμε να μιλάμε για υποσύνολα του Σ που είναι άνω ή κάτω φραγμένα.

Ορισμός 1.1.9 (άνω φράγμα). Έστω Σ ένα διατεταγμένο σώμα. Ένα μη κενό υποσύνολο A του Σ λέγεται

- *άνω φραγμένο*, αν υπάρχει $\alpha \in \Sigma$ με την ιδιότητα: $x \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in A$.
- *κάτω φραγμένο*, αν υπάρχει $\alpha \in \Sigma$ με την ιδιότητα: $x \geqslant \alpha$ για κάθε $x \in A$.
- *φραγμένο*, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.

Κάθε $\alpha \in \Sigma$ που ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό λέγεται άνω φράγμα (αντίστοιχα, κάτω φράγμα) του A.

Παρατήρηση 1.1.10. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \Sigma$ και έστω α ένα άνω φράγμα του A, δηλαδή $x \leqslant \alpha$ για κάθε $x \in A$. Κάθε στοιχείο α_1 του Σ που είναι μεγαλύτερο ή ίσο του α είναι επίσης άνω φράγμα του A: αν $x \in A$ τότε $x \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1$. Τελείως ανάλογα, αν $\emptyset \neq A \subseteq \Sigma$ και αν α είναι ένα κάτω φράγμα του A, τότε κάθε στοιχείο α_1 του Σ που είναι μικρότερο ή ίσο του α είναι επίσης κάτω φράγμα του A.

Ορισμός 1.1.11 (ελάχιστο άνω φράγμα). (α) Έστω A ένα μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το $\alpha \in \Sigma$ είναι *ελάχιστο άνω φράγμα* του A αν

- το α είναι άνω φράγμα του A και
- αν α_1 είναι άλλο άνω φράγμα του A τότε $\alpha \leqslant \alpha_1$.

(β) Έστω A ένα μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του διατεταγμένου σώματος Σ. Λέμε ότι το $\alpha \in \Sigma$ είναι *μέγιστο κάτω φράγμα* του A αν

- το α είναι κάτω φράγμα του A και
- αν α_1 είναι άλλο κάτω φράγμα του A τότε $\alpha \geqslant \alpha_1$.

Παρατήρηση 1.1.12. Το ελάχιστο άνω φράγμα του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι αν α, α_1 είναι δύο ελάχιστα άνω φράγματα του A τότε $\alpha \leqslant \alpha_1$ και $\alpha_1 \leqslant \alpha$, δηλαδή $\alpha = \alpha_1$. Ομοίως, το μέγιστο κάτω φράγμα του A (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

Στην περίπτωση που υπάρχουν, θα συμβολίζουμε το ελάχιστο άνω φράγμα του A με $\sup A$ (το supremum του A) και το μέγιστο κάτω φράγμα του A με $\inf A$ (το infimum του A). Τα $\inf A$, $\sup A$ μπορεί να ανήκουν ή να μην ανήκουν στο σύνολο A.

Ορισμός 1.1.13 (αρχή της πληρότητας)**.** Λέμε ότι ένα διατεταγμένο σώμα Σ ικανοποιεί την *αρχή της πληρότητας* αν

Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο A του Σ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha \in \Sigma$.

Ένα διατεταγμένο σώμα Σ που ικανοποιεί την αρχή της πληρότητας λέγεται *πλήρως διατεταγμένο σώμα*.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι το $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$, με τις συνήθεις πράξεις και τη συνήθη διάταξη, δεν ικανοποιεί την αρχή της πληρότητας.

Πρόταση 1.1.14. *Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι πλήρως διατεταγμένο σώμα: υπάρχει μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{Q}$ το οποίο δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι το A είναι μη κενό: έχουμε $1 \in A$ (διότι $1 > 0$ και $1^2 = 1 < 2$). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν x, y είναι θετικοί ρητοί τότε $x < y$ αν και μόνο αν $x^2 < y^2$ έχουμε την εξής:

Παρατήρηση: αν για κάποιον θετικό ρητό y ισχύει $y^2 > 2$ τότε ο y είναι άνω φράγμα του A.

Έπεται ότι το A είναι άνω φραγμένο: για παράδειγμα, ο 2 είναι άνω φράγμα του A αφού $2 > 0$ και $2^2 = 4 > 2$.

Υποθέτουμε ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $a \in \mathbb{Q}$, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Αφού δεν υπάρχει ρητός που το τετράγωνο του να ισούται με 2, αναγκαστικά θα ισχύει μία από τις $a^2 > 2$ ή $a^2 < 2$:

(i) Υποθέτουμε ότι $a^2 > 2$. Θα βρούμε $0 < \varepsilon < a$ ώστε $(a - \varepsilon)^2 > 2$. Τότε θα έχουμε $a - \varepsilon < a$ και από την παρατήρηση, ο $a - \varepsilon$ θα είναι άνω φράγμα του A, άτοπο.

Επιλογή του ε: Ζητάμε $0 < \varepsilon < a$ και

$$(a - \varepsilon)^2 = a^2 - 2a\varepsilon + \varepsilon^2 > 2.$$

Αφού $\varepsilon^2 > 0$, αρκεί να εξασφαλίσουμε την $a^2 - 2a\varepsilon > 2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\varepsilon < \frac{a^2 - 2}{2a}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $\frac{a^2-2}{2a}$ είναι θετικός ρητός αριθμός. Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\left\{a, \frac{a^2 - 2}{2a}\right\},$$

τότε έχουμε βρεί ρητό ε που ικανοποιεί τις $0 < \varepsilon < a$ και $(a-\varepsilon)^2 > 2$.

(ii) Υποθέτουμε ότι $a^2 < 2$. Θα βρούμε ρητό $\varepsilon > 0$ ώστε $(a+\varepsilon)^2 < 2$. Τότε θα έχουμε $a+\varepsilon > a$ και $a+\varepsilon \in A$, άτοπο αφού ο a είναι άνω φράγμα του A.

Επιλογή του ε: Ζητάμε $\varepsilon > 0$ και

$$(a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < 2.$$

Θα επιλέξουμε $\varepsilon \leqslant 1$ οπότε θα ισχύει

$$a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 \leqslant a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon = a^2 + \varepsilon(2a+1),$$

διότι $\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon$. Αρκεί λοιπόν να εξασφαλίσουμε την $a^2 + \varepsilon(2a+1) < 2$, η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\varepsilon < \frac{2-a^2}{2a+1}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $\frac{2-a^2}{2a+1}$ είναι θετικός ρητός αριθμός. Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{2-a^2}{2a+1}\right\},$$

τότε έχουμε βρεί ρητό $\varepsilon > 0$ που ικανοποιεί την $(a+\varepsilon)^2 < 2$.

Υποθέτοντας ότι το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα τον $a \in \mathbb{Q}$ αποκλείσαμε τις $a^2 < 2$, $a^2 = 2$ και $a^2 > 2$. Άρα, το A δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα (στο $\mathbb{Q}$). □

Παρατηρήστε ότι το «ελάχιστο άνω φράγμα» του συνόλου A στην απόδειξη της Πρότασης 1.1.14 είναι ακριβώς το σημείο της ευθείας το οποίο θα αντιστοιχούσε στο μήκος της υποτείνουσας του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1 (το οποίο «λείπει» από το $\mathbb{Q}$).

1.2 Πραγματικοί αριθμοί – η αρχή της πληρότητας

Όλη η δουλειά που θα κάνουμε σε αυτό το μάθημα βασίζεται στο εξής θεώρημα επέκτασης.

Θεώρημα 1.2.1. *Το διατεταγμένο σώμα $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ επεκτείνεται σε ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$.*

Το Θεώρημα 1.2.1 είναι πολύ σημαντικό: μας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ το οποίο περιέχει τους ρητούς (συνεπώς και τους ακεραίους και τους φυσικούς). Το $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο των *πραγματικών αριθμών*. Οι πράξεις $+$ και $\cdot$ στο $\mathbb{R}$ επεκτείνουν τις αντίστοιχες πράξεις στο $\mathbb{Q}$, ικανοποιούν τα αξιώματα της πρόσθεσης, τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού και την επιμεριστική ιδιότητα. Η διάταξη $<$ στο $\mathbb{R}$ επεκτείνει την διάταξη στο $\mathbb{Q}$ και ικανοποιεί τα αξιώματα της διάταξης. Επιπλέον, στο $\mathbb{R}$ ισχύει η *αρχή της πληρότητας*.

Αρχή της πληρότητας για τους πραγματικούς αριθμούς. *Κάθε μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε μια τέτοια επέκταση. Περιγράφουμε εδώ εν συντομία την κατασκευή του Dedekind, η οποία βασίζεται στις λεγόμενες *τομές*. Μια καλή αρχή για να περιγράψουμε αυτή την ιδέα είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ρητό $q \in \mathbb{Q}$ το σύνολο

$$\alpha_q = \{p \in \mathbb{Q} : p < q\}$$

των ρητών που είναι μικρότεροι από τον q. Παρατηρήστε ότι ο q προσδιορίζεται πλήρως από το σύνολο α_q με την εξής έννοια:

Αν $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ και $q_1 \neq q_2$ τότε $\alpha_{q_1} \neq \alpha_{q_2}$.

Πράγματι, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $q_1 < q_2$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει ρητός r, π.χ. ο $r = \frac{q_1+q_2}{2}$, ο οποίος ικανοποιεί την $q_1 < r < q_2$. Τότε, από τον ορισμό των συνόλων α_{q_1} και α_{q_2} έχουμε

$$r \in \alpha_{q_2} \quad \text{αλλά} \quad r \notin \alpha_{q_1},$$

απ' όπου έπεται ότι $\alpha_{q_1} \neq \alpha_{q_2}$ (για την ακρίβεια, σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι το α_{q_1} είναι γνήσιο υποσύνολο του α_{q_2} – ελέγξτε το).

Η διαισθητική ιδέα του Dedekind είναι ότι αν θεωρήσουμε ένα σημείο της ευθείας το οποίο δεν αντιστοιχεί σε ρητό αριθμό τότε μπορούμε να ορίσουμε κάποιο σύνολο ρητών το οποίο προσδιορίζει αυτό το σημείο. Ταυτόχρονα, το σύνολο αυτό θα είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ αλλά δεν θα έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{Q}$.

Ένα παράδειγμα μας δίνει το σημείο M το οποίο αντιστοιχεί στο μήκος της υποτείνουσας ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μήκους 1. Αν θεωρήσουμε το σύνολο

$$\alpha = \{p \in \mathbb{Q} : p \leqslant 0\} \cup \{p \in \mathbb{Q} : p > 0 \text{ και } p^2 < 2\},$$

τότε το α είναι το σύνολο όλων των ρητών που «βρίσκονται αριστερά» από το σημείο M, στο οποίο θέλουμε να αντιστοιχίσουμε κάποιον (όχι ρητό) αριθμό. Ταυτόχρονα, η Πρόταση 1.1.14 δείχνει ότι το α είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ και δεν έχει ελάχιστο άνω φράγμα στο $\mathbb{Q}$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε $\sqrt{2}$ αυτό ακριβώς το σύνολο και να του αντιστοιχίσουμε το σημείο M.

Με αυτή τη λογική, κάθε σύνολο ρητών αυτού του τύπου προσδιορίζει ένα σημείο της ευθείας. Και έτσι θα μπορούσαν να προσδιοριστούν όλα τα σημεία της ευθείας - στη δε περίπτωση που κάποιο σημείο αντιστοιχεί σε κάποιον ρητό q, αυτό το σύνολο δεν είναι άλλο από το α_q. Το πρόβλημα είναι ότι τα σημεία δεν αντιστοιχούν ακόμα όλα σε αριθμούς και έχοντας μόνο τους ρητούς στη διάθεσή μας δεν μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνολο των ρητών που είναι μικρότεροι από κάτι που δεν έχουμε ορίσει.

Διαισθητικά, οι βασικές ιδιότητες που έχει «το σύνολο α των ρητών που βρίσκονται αριστερά από ένα σημείο M» είναι οι εξής:

- $\alpha \neq \emptyset$ και $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- Αν $p \in \alpha$ τότε υπάρχει $r > p$ τέτοιος ώστε $r \in \alpha$ (το α δεν έχει μέγιστο στοιχείο).
- Αν $p \in \alpha$ και $r < p$ τότε $r \in \alpha$.
- Αν $p \in \alpha$ και $r \notin \alpha$ τότε $p < r$.
- Αν $r \notin \alpha$ και $s > r$ τότε $s \notin \alpha$.

Ελέγξτε ότι κάθε α_q έχει όλες αυτές τις ιδιότητες. Μια καλή άσκηση είναι επίσης να ελέγξετε ότι αν κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ έχει τις τρεις πρώτες από τις παραπάνω ιδιότητες τότε έχει αναγκαστικά και τις τελευταίες δύο.

Ο Dedekind θεώρησε λοιπόν την κλάση όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{Q}$ τα οποία έχουν αυτές τις ιδιότητες. Ανάμεσά τους είναι όλα τα σύνολα α_q, $q \in \mathbb{Q}$, τα οποία βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους γνωστούς μας ρητούς. Υπάρχουν όμως κι άλλα τέτοια σύνολα, όπως το α του παραδείγματός μας, τα οποία (ελπίζουμε ότι) θα προσδιορίσουν όλα τα υπόλοιπα «σημεία της ευθείας».

Ορισμός 1.2.2 (τομές Dedekind)**.** Ένα υποσύνολο α του $\mathbb{Q}$ λέγεται *τομή* αν ικανοποιεί τα εξής:

- $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
- Αν $p \in \alpha$, $r \in \mathbb{Q}$ και $r < p$, τότε $r \in \alpha$.
- Αν $p \in \alpha$, υπάρχει $r \in \alpha$ ώστε $p < r$.

Η τρίτη ιδιότητα μας λέει ότι μια τομή α δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Η δεύτερη έχει τις εξής άμεσες συνέπειες που θα φανούν χρήσιμες:

- Αν $p \in \alpha$ και $r \notin \alpha$, τότε $p < r$.
- Αν $r \notin \alpha$ και $r < s$, τότε $s \notin \alpha$.

Σημείωση. Σε όλη αυτή την παράγραφο χρησιμοποιούμε τα ελληνικά γράμματα α, β, γ για τομές (=μελλοντικούς πραγματικούς αριθμούς) και τα λατινικά p, q, r, s για ρητούς αριθμούς.

Ορισμός 1.2.3 (πραγματικοί αριθμοί)**.** Ορίζουμε $\mathbb{R} = \{\alpha \subseteq \mathbb{Q} : \text{το } \alpha \text{ είναι τομή}\}$. Αυτό θα είναι τελικά το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πρέπει τώρα να ορίσουμε πράξεις και διάταξη στι σύνολο $\mathbb{R}$ με τέτοιον τρόπο ώστε (α) το $\mathbb{R}$ να γίνει πλήρως διατεταγμένο σώμα και (β) το $\mathbb{R}$ να επεκτείνει με φυσιολογικό τρόπο το διατεταγμένο σώμα $\mathbb{Q}$.

Πρώτα ορίζουμε τη διάταξη στο $\mathbb{R}$. Αν α, β είναι δύο τομές, τότε ορίζουμε ότι:

$$\alpha < \beta \iff \text{το } \alpha \text{ είναι γνήσιο υποσύνολο του } \beta.$$

Άσκηση. Αποδείξτε ότι αν α, β είναι τομές, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.

Είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι, με αυτόν τον ορισμό της διάταξης, αποδεικνύεται άμεσα ότι το $(\mathbb{R}, <)$ ικανοποιεί το αξίωμα της πληρότητας. Δηλαδή:

> *Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και υπάρχει τομή $\beta \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha \leqslant \beta$ για κάθε $\alpha \in A$, τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα.*

Απόδειξη. Ορίζουμε γ την ένωση όλων των στοιχείων του A. Δηλαδή,

$$\gamma = \{q \in \mathbb{Q} : \exists \alpha \in A \text{ με } q \in \alpha\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\gamma = \sup A$.

(α) Το γ είναι τομή: Πρώτον, $\gamma \neq \emptyset$: αφού $A \neq \emptyset$, υπάρχει $\alpha_0 \in A$. Αφού $\alpha_0 \neq \emptyset$, υπάρχει $q \in \alpha_0$. Τότε, $q \in \gamma$. Πρέπει επίσης να δείξουμε ότι $\gamma \neq \mathbb{Q}$: Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με $q \notin \beta$. Αν $\alpha \in A$, τότε $\alpha \leqslant \beta$, άρα $q \notin \alpha$. Επομένως, $q \notin \cup\{\alpha : \alpha \in A\}$ δηλαδή $q \notin \gamma$. Άρα, το γ ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του ορισμού της τομής.

Για τη δεύτερη, έστω $p \in \gamma$ και $q \in \mathbb{Q}$ με $q < p$. Υπάρχει $\alpha \in A$ με $p \in \alpha$ και $q < p$, άρα $q \in \alpha$. Αφού $\alpha \subseteq \gamma$, έπεται ότι $q \in \gamma$.

Για την τρίτη, έστω $p \in \gamma$. Υπάρχει $\alpha \in A$ με $p \in \alpha$. Αφού το α είναι τομή, υπάρχει $q \in \alpha$ με $p < q$. Τότε, $q \in \gamma$ και $p < q$.

(β) Το γ είναι άνω φράγμα του A: Αν $\alpha \in A$, τότε $\alpha \subseteq \gamma$ δηλαδή $\alpha \leqslant \gamma$.

(γ) Το γ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A: Έστω $\beta_1 \in \mathbb{R}$ άνω φράγμα του A. Τότε $\beta_1 \geqslant \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή $\beta_1 \supseteq \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή

$$\beta_1 \supseteq \bigcup\{\alpha : \alpha \in A\} = \gamma,$$

δηλαδή $\beta_1 \geqslant \gamma$. □

Στη συνέχεια ορίζουμε τις πράξεις στο $\mathbb{R}$. Δεν θα μπούμε στις τεχνικές λεπτομέρειες, ας αναφέρουμε όμως τα βασικά βήματα:

(i) Ορίζουμε μια πράξη $+$ (πρόσθεση) στο $\mathbb{R}$ ως εξής: αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε

$$\alpha + \beta = \{p + q : p \in \alpha, q \in \beta\}.$$

(ii) Δείχνουμε ότι το $\alpha + \beta$ είναι τομή, και εύκολα επαληθεύουμε ότι $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(iii) Ορίζουμε $0^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 0\}$ και δείχνουμε ότι το $0^* \in \mathbb{R}$ και είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης: $\alpha + 0^* = 0^* + \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, το $-\alpha$ ορίζεται ως εξής:

$$-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \text{ υπάρχει } r \in \mathbb{Q},\ r > 0 \text{ με } -q - r \notin \alpha\}.$$

Αποδείξτε ότι $-\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0^*$.

Έπεται ότι η πράξη $+$ στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί τα αξιώματα της πρόσθεσης.

(v) Το σύνολο Θ των θετικών στοιχείων του $\mathbb{R}$ ορίζεται τώρα με φυσιολογικό τρόπο:

$$\alpha \in \Theta \Longleftrightarrow 0^* < \alpha.$$

Ελέγξτε ότι αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ακριβώς μία από τις $\alpha \in \Theta$, $\alpha = 0^*$, $-\alpha \in \Theta$.

(vi) Ορίζουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού, πρώτα για $\alpha, \beta \in \Theta$: Αν $\alpha > 0^*$ και $\beta > 0^*$, θέτουμε

$$\alpha\beta = \{q \in \mathbb{Q} : \text{ υπάρχουν } r \in \alpha, s \in \beta, r > 0, s > 0 \text{ με } q \leqslant rs\}.$$

(vii) Δείχνουμε ότι το $\alpha\beta$ είναι τομή και $\alpha\beta = \beta\alpha$, $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ αν $\alpha, \beta, \gamma \in \Theta$.

(viii) Ορίζουμε $1^* = \{q \in \mathbb{Q} : q < 1\}$. Τότε, $\alpha 1^* = 1^* \alpha = \alpha$ για κάθε $\alpha \in \Theta$.

(ix) Αν $\alpha \in \Theta$, ο αντίστροφος α^{-1} του α ορίζεται από την:

$$\alpha^{-1} = \{q \in \mathbb{Q} : q \leqslant 0 \text{ ή } q > 0 \text{ και υπάρχει } r \in \mathbb{Q}, r > 1 \text{ με } (qr)^{-1} \notin \alpha\}.$$

Αποδείξτε ότι $\alpha^{-1} \in \Theta$ και $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1^*$.

(x) Ολοκληρώνουμε τον ορισμό του πολλαπλασιασμού θέτοντας

$$\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta), \text{ αν } \alpha,\beta < 0^*$$
$$\alpha\beta = -[(-\alpha)\beta], \text{ αν } \alpha < 0^*, \beta > 0^*$$
$$\alpha\beta = -[\alpha(-\beta)], \text{ αν } \alpha > 0^*, \beta < 0^*,$$

και

$$\alpha 0^* = 0^*\alpha = 0^*.$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού, καθώς και η επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση.

Συνοψίζοντας:

«Το $\mathbb{R}$ με βάση την παραπάνω κατασκευή είναι ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα.»

Μένει να δούμε με ποιά έννοια το $\mathbb{R}$ *επεκτείνει* το $\mathbb{Q}$. Για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ ορίζουμε $q^* = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}$. Κάθε q^* είναι τομή, δηλαδή $q^* \in \mathbb{R}$. Εύκολα δείχνουμε ότι:

- αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^* + q^* = (p+q)^*$.
- αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^*q^* = (pq)^*$.
- αν $p, q \in \mathbb{Q}$, τότε $p^* < q^*$ αν και μόνο αν $p < q$.

Συνεπώς, η απεικόνιση $I : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ με $I(q) = q^*$ διατηρεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, καθώς και τη διάταξη. Μπορούμε λοιπόν να βλέπουμε το $\mathbb{Q}$ σαν ένα διατεταγμένο υποσώμα του $\mathbb{R}$ μέσω της ταύτισης $\mathbb{Q} \longleftrightarrow \mathbb{Q}^*$ (όπου $\mathbb{Q}^* = \{q^* : q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$).

Παρατήρηση 1.2.4. Είδαμε μία κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Θα μπορούσε εδώ να ανησυχήσει κανείς: αν υπάρχει κι άλλη, πειστική αλλά ουσιωδώς διαφορετική, επέκταση του $\mathbb{Q}$ σε ένα πλήρως διατεταγμένο σώμα, τότε θα μπορούσαμε να μιλάμε για δύο διαφορετικά $\mathbb{R}$ και, πιθανότατα, δύο διαφορετικούς Απειροστικούς Λογισμούς. Μπορεί όμως κανείς να δείξει ότι υπάρχει «μόνο ένα» πλήρως διατεταγμένο σώμα (η επέκταση μπορεί να γίνει με έναν ουσιαστικά τρόπο). Δύο πλήρως διατεταγμένα σώματα είναι *ισόμορφα*. Άρα, οποιαδήποτε άλλη κατασκευή του $\mathbb{R}$ (και υπάρχουν τέτοιες) οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Τώρα, χρησιμοποιώντας την αρχή της πληρότητας, μπορούμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Πρόταση 1.2.5. *Υπάρχει μοναδικός θετικός $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x^2 = 2$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ και } x^2 < 2\}.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι το A είναι μη κενό: έχουμε $1 \in A$ (διότι $1 > 0$ και $1^2 = 1 < 2$). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε $x < y$ αν και μόνο αν $x^2 < y^2$ έχουμε την εξής:

Παρατήρηση: αν για κάποιον θετικό πραγματικό y ισχύει $y^2 > 2$ τότε ο y είναι άνω φράγμα του A.

Έπεται ότι το A είναι άνω φραγμένο: για παράδειγμα, ο 2 είναι άνω φράγμα του A αφού $2 > 0$ και $2^2 = 4 > 2$.

Από την αρχή της πληρότητας, το A **έχει** ελάχιστο άνω φράγμα, έστω $a \in \mathbb{R}$. Προφανώς, $a > 0$. Θα δείξουμε ότι $a^2 = 2$ αποκλείοντας τις $a^2 > 2$ και $a^2 < 2$:

(i) Υποθέτουμε ότι $a^2 > 2$. Με το επιχείρημα της απόδειξης της Πρότασης 1.1.14 βρίσκουμε $0 < \varepsilon < a$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $(a-\varepsilon)^2 > 2$. Τότε, $a - \varepsilon < a$ και από την Παρατήρηση, ο $a - \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A, άτοπο.

(ii) Υποθέτουμε ότι $a^2 < 2$. Με το επιχείρημα της απόδειξης της Πρότασης 1.1.14 βρίσκουμε $\varepsilon > 0$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $(a+\varepsilon)^2 < 2$. Τότε, $a+\varepsilon > a$ και $a+\varepsilon \in A$, άτοπο αφού ο a είναι άνω φράγμα του A.

Αναγκαστικά, $a^2 = 2$. Η μοναδικότητα είναι απλή: χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε $x = y$ αν και μόνο αν $x^2 = y^2$. □

Ορισμός 1.2.6 (άρρητοι αριθμοί)**.** Η Πρόταση 1.2.5 δείχνει ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ ώστε $x^2 = 2$. Από το Θεώρημα 1.1.8, ο x δεν είναι ρητός αριθμός. Συνεπώς, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι δεν είναι ρητοί. Αυτοί ονομάζονται *άρρητοι*. Το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι το *σύνολο των αρρήτων*.

1.3 Πρώτες συνέπειες της αρχής της πληρότητας

Σε αυτή την παράγραφο, χρησιμοποιώντας το αξίωμα της πληρότητας, θα *αποδείξουμε* κάποιες βασικές ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Ξεκινάμε από την ύπαρξη μέγιστου κάτω φράγματος για κάθε μη κενό, κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.3.1. *Κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.*

Απόδειξη. Έστω A μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-x : x \in A\}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι το B είναι μη κενό: υπάρχει $x \in A$ και τότε $-x \in B$. Επίσης, το B άνω φραγμένο: το A είναι κάτω φραγμένο και αν θεωρήσουμε τυχόν κάτω φράγμα t του A μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ο $-t$ είναι άνω φράγμα του B (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup B$ του B. Όπως πριν, αφού ο s είναι άνω φράγμα του B, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A. Αν $y > -s$, τότε $-y < s$. Αφού $s = \sup B$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $-y < b$. Τότε, $-b \in A$ και $-b < y$. Δηλαδή, ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A και αν $y > -s$ τότε ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A. Έπεται ότι $-s = \inf A$. □

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν πολύ χρήσιμο «ε–χαρακτηρισμό» του supremum ενός μη κενού άνω φραγμένου υποσυνόλου του $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω A μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Τότε, $\alpha = \sup A$ αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:*

(α) *Το α είναι άνω φράγμα του A,*

(β) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ ώστε $x > \alpha - \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha = \sup A$. Από τον ορισμό του supremum, ικανοποιείται το (α). Για το (β), έστω $\varepsilon > 0$. Αν για κάθε $x \in A$ ίσχυε η $x \leqslant \alpha - \varepsilon$, τότε το $\alpha - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα του A. Από τον ορισμό του supremum θα έπρεπε να έχουμε

$$\alpha \leqslant \alpha - \varepsilon, \quad \text{δηλαδή} \quad \varepsilon \leqslant 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in A$ (το x εξαρτάται βέβαια από το ε) που ικανοποιεί την $x > \alpha - \varepsilon$.

Αντίστροφα, έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα (α) και (β). Ειδικότερα, το A είναι άνω φραγμένο. Ας υποθέσουμε ότι το α δεν είναι το supremum του A. Τότε, υπάρχει $\beta < \alpha$ το οποίο είναι άνω φράγμα του A. Θέτουμε $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$. Τότε,

$$x \leqslant \beta = \alpha - \varepsilon$$

για κάθε $x \in A$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το (β). □

1.3.1 Αρχιμήδεια ιδιότητα

Πρώτο μας βήμα είναι να δείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$:

Θεώρημα 1.3.3. *Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Από το αξίωμα της πληρότητας το $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα: έστω $\beta = \sup \mathbb{N}$. Τότε $\beta - 1 < \beta$, άρα ο $\beta - 1$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ με $n > \beta - 1$. Έπεται ότι $n + 1 > \beta$, άτοπο αφού $n + 1 \in \mathbb{N}$ και ο β είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. □

Ισοδύναμοι τρόποι διατύπωσης της ίδιας αρχής είναι οι εξής.

Θεώρημα 1.3.4 (Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών)**.** *Έστω ε και a δύο πραγματικοί αριθμοί με $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n\varepsilon > a$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.3.3 ο $\frac{a}{\varepsilon}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > \frac{a}{\varepsilon}$. Αφού $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $n\varepsilon > a$. □

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.3.3 ο $\frac{1}{\varepsilon}$ δεν είναι άνω φράγμα του $\mathbb{N}$. Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Αφού $\varepsilon > 0$, έπεται ότι $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

1.3.2 Ύπαρξη ακεραίου μέρους

Θεώρημα 1.3.6 (ύπαρξη ακεραίου μέρους)**.** *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικός ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ με την ιδιότητα*

$$m \leqslant x < m + 1.$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα που παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον (σημειώστε ότι στην απόδειξή του χρησιμοποιείται η αρχή της πληρότητας).

Λήμμα 1.3.7. *Κάθε μη κενό και άνω φραγμένο σύνολο ακεραίων αριθμών έχει μέγιστο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω A ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το $a = \sup A \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in A$: από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - 1 < x \leqslant a$. Αν $a \notin A$, τότε $x < a$. Αυτό σημαίνει ότι ο x δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε, εφαρμόζοντας πάλι τον χαρακτηρισμό του supremum, βρίσκουμε $y \in A$ ώστε $a - 1 < x < y < a$. Έπεται ότι $0 < y - x < 1$. Αυτό είναι άτοπο διότι οι x και y είναι ακέραιοι. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.6. Το σύνολο $A = \{m \in \mathbb{Z} : m \leqslant x\}$ είναι μη κενό (από την Αρχιμήδεια ιδιότητα – εξηγήστε) και άνω φραγμένο από το x. Από το Λήμμα 1.3.7 το A έχει μέγιστο στοιχείο: ας το πούμε m_0. Αφού $m_0 + 1 \notin A$, έχουμε $m_0 + 1 > x$. Άρα,

$$m_0 \leqslant x < m_0 + 1.$$

Για τη μοναδικότητα ας υποθέσουμε ότι

$$m \leqslant x < m + 1 \text{ και } m_1 \leqslant x < m_1 + 1$$

όπου $m, m_1 \in \mathbb{Z}$. Έχουμε $m < m_1 + 1$ άρα $m \leqslant m_1$, και $m_1 < m + 1$ άρα $m_1 \leqslant m$. Συνεπώς, $m = m_1$. □

Ορισμός 1.3.8. Ο ακέραιος m που μας δίνει το προηγούμενο θεώρημα (και ο οποίος εξαρτάται κάθε φορά από τον x) λέγεται *ακέραιο μέρος* του x, και συμβολίζεται με $[x]$. Δηλαδή, ο $[x]$ προσδιορίζεται από τις

$$[x] \in \mathbb{Z} \quad \text{και} \quad [x] \leqslant x < [x] + 1.$$

Για παράδειγμα, $[2.7] = 2$, $[-2.7] = -3$.

1.3.3 Πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς

Η ύπαρξη του ακεραίου μέρους και η Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών μας εξασφαλίζουν την *πυκνότητα* του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$: ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δύο πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να βρούμε έναν ρητό.

Θεώρημα 1.3.9. *Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$, τότε υπάρχει ρητός q με την ιδιότητα*

$$x < q < y.$$

Απόδειξη. Έχουμε $y - x > 0$ και από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει φυσικός $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n(y - x) > 1$, δηλαδή

$$nx + 1 < ny.$$

Τότε,

$$nx < [nx] + 1 \leqslant nx + 1 < ny,$$

δηλαδή

$$x < \frac{[nx] + 1}{n} < y.$$

Αφού ο $q = \frac{[nx]+1}{n}$ είναι ρητός, έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.3.10. *Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $x < y$, τότε υπάρχει α άρρητος με $x < \alpha < y$.*

Απόδειξη. Έχουμε $x < y$, άρα $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$. Από το Θεώρημα 1.3.9, υπάρχει ρητός q με

$$x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}.$$

Έπεται ότι ο $\alpha := q + \sqrt{2}$ είναι άρρητος (εξηγήστε γιατί) και

$$x < \alpha = q + \sqrt{2} < y.$$

1.3.4 Ύπαρξη n-οστής ρίζας

Το διωνυμικό ανάπτυγμα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ (το γινόμενο όλων των φυσικών από 1 ως n). Συμφωνούμε ότι $0! = 1$. Παρατηρήστε ότι $n! = (n-1)!n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν $0 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Λήμμα 1.3.11 (τρίγωνο του Pascal). *Αν $1 \leqslant k < n$ τότε*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Απόδειξη. Με βάση τους ορισμούς που δώσαμε, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!k}{(k-1)!k(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{(n-1)![(n-k)+k]}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k},\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Συμβολισμός. Αν $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

Παρατηρήστε ότι το άθροισμα $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως εξής:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{m=0}^{n} a_m = \sum_{s=1}^{n+1} a_{s-1}.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί αλλάξαμε (απλώς) το «όνομα» της μεταβλητής από k σε m. Η δεύτερη γιατί κάναμε (απλώς) την «αλλαγή μεταβλητής» $s = m + 1$.

Πρόταση 1.3.12 (διωνυμικό ανάπτυγμα). *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή: για $n = 1$ η ζητούμενη ισότητα γράφεται

$$a + b = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1,$$

η οποία ισχύει: παρατηρήστε ότι $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, $a^0 = b^0 = 1$, $a^1 = a$ και $b^1 = b$.

Υποθέτουμε ότι

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

και δείχνουμε ότι

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\right] \\
&= a \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n}{m} a^{n-m} b^{m+1} + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1}.
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.3.11 έχουμε $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, άρα

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και την απόδειξη. □

Θεώρημα 1.3.13 (ύπαρξη n–οστής ρίζας). *Έστω $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει μοναδικός $x > 0$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $x^n = \rho$.*

[Ο x συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\rho}$ ή $\rho^{1/n}$. Προφανώς μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση $n \geqslant 2$.]

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\rho > 1$. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{y \in \mathbb{R} : y > 0 \text{ και } y^n < \rho\}.$$

Το A είναι μη κενό: έχουμε $1 \in A$. Παρατηρούμε ότι κάθε θετικός πραγματικός αριθμός α με την ιδιότητα $\alpha^n > \rho$ είναι άνω φράγμα του A: αν $y \in A$ τότε $y^n < \rho < \alpha^n$ και, αφού $y, \alpha > 0$, συμπεραίνουμε ότι $y < \alpha$. Ένα τέτοιο άνω φράγμα του A είναι ο ρ: από την $\rho > 1$ έπεται ότι $\rho^n > \rho$.

Αφού το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο, από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει ο $x = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $x^n = \rho$.

(α) Έστω ότι $x^n < \rho$. Θα βρούμε $\varepsilon > 0$ ώστε $(x+\varepsilon)^n < \rho$, δηλαδή $x + \varepsilon \in A$ (άτοπο, γιατί ο x έχει υποτεθεί άνω φράγμα του A).

Αν υποθέσουμε από την αρχή ότι $0 < \varepsilon \leqslant 1$, έχουμε

$$\begin{aligned}(x+\varepsilon)^n &= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\varepsilon^k = x^n + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\varepsilon^{k-1}\right] \\ &\leqslant x^n + \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right].\end{aligned}$$

Θα έχουμε λοιπόν $(x+\varepsilon)^n < \rho$ αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{\rho - x^n}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}}$. Επιλέγουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{1, \frac{\rho - x^n}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}}\right\}.$$

Ο ε είναι θετικός πραγματικός αριθμός (διότι $\rho - x^n > 0$ και $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} > 0$) και $(x+\varepsilon)^n < \rho$.

(β) Έστω ότι $x^n > \rho$. Θα βρούμε $0 < \varepsilon < \min\{x, 1\}$ ώστε $(x-\varepsilon)^n > \rho$ (άτοπο, γιατί τότε ο $x - \varepsilon$ θα ήταν άνω φράγμα του A μικρότερο από το $\sup A$).

Για κάθε $0 < \varepsilon \leqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}(x-\varepsilon)^n &= x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-1)^k\varepsilon^k = x^n - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-1)^{k-1}\varepsilon^{k-1}\right] \\ &\geqslant x^n - \varepsilon \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\right],\end{aligned}$$

διότι

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}(-1)^{k-1}\varepsilon^{k-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\varepsilon^{k-1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Θα έχουμε λοιπόν $(x-\varepsilon)^n > \rho$ αν επιλέξουμε $0 < \varepsilon < \frac{x^n - \rho}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}}$. Επιλέγουμε

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{x,\, 1,\, \frac{x^n - \rho}{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}}\right\}.$$

Ο ε είναι θετικός πραγματικός αριθμός (διότι $x^n - \rho > 0$ και $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k} > 0$) και για τον θετικό πραγματικό αριθμό $x - \varepsilon$ ισχύει $(x-\varepsilon)^n > \rho$.

Αποκλείσαμε τις $x^n < \rho$ και $x^n > \rho$. Συνεπώς, $x^n = \rho$. Η μοναδικότητα είναι απλή: παρατηρήστε ότι αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $x_1^n < x_2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αν $0 < \rho < 1$ έχουμε $\frac{1}{\rho} > 1$ και, από το προηγούμενο βήμα, υπάρχει μοναδικός $x > 0$ ώστε $x^n = \frac{1}{\rho}$. Θεωρούμε τον $\frac{1}{x}$. Τότε,

$$\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} = \rho.$$

Τέλος, αν $\rho = 1$ θεωρούμε τον $x = 1$. □

1.4 Απόλυτη τιμή – επεκτεταμένη ευθεία – διαστήματα

1.4.1 Απόλυτη τιμή

Ορισμός 1.4.1 (απόλυτη τιμή)**.** Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν} \quad a \geqslant 0, \\ \\ -a & \text{αν} \quad a < 0. \end{cases}$$

Ο $|a|$ λέγεται *απόλυτη τιμή* του a. Θεωρώντας τον a σαν σημείο της ευθείας, σκεφτόμαστε την απόλυτη τιμή του σαν την «απόσταση» του a από το 0. Παρατηρήστε ότι $|-a| = |a|$ και $|a| \geqslant 0$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.4.2. *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $\rho \geqslant 0$ ισχύει*

$$|a| \leqslant \rho \quad \textit{αν και μόνο αν} \quad -\rho \leqslant a \leqslant \rho.$$

Απόδειξη. Διακρίνετε περιπτώσεις: $a \geqslant 0$ και $a < 0$. □

Πρόταση 1.4.3 (τριγωνική ανισότητα)**.** *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Επίσης,

$$\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a - b| \quad \textit{και} \quad \big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a + b|\,.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.4.2 έχουμε $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ και $-|b| \leqslant b \leqslant |b|$. Συνεπώς,

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την Πρόταση 1.4.2 συμπεραίνουμε ότι $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Για τη δεύτερη ανισότητα γράφουμε

$$|a| = |(a - b) + b| \leqslant |a - b| + |b|,$$

οπότε $|a| - |b| \leqslant |a - b|$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$|b| = |(b - a) + a| \leqslant |b - a| + |a| = |a - b| + |a|,$$

άρα $|b| - |a| \leqslant |a - b|$. Αφού

$$-|a - b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a - b|,$$

η Πρόταση 1.5.2 δείχνει ότι $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a - b|$.

Αντικαθιστώντας τον b με τον $-b$ στην τελευταία ανισότητα, βλέπουμε ότι $\big|\,|a| - |b|\,\big| \leqslant |a + b|$.
□

1.4.2 Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών

Επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών με δύο ακόμα στοιχεία, το $+\infty$ και το $-\infty$. Το σύνολο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ είναι το *επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών*. Επεκτείνουμε τη διάταξη και τις πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}}$ ως εξής:

(i) Ορίζουμε $-\infty < a$ και $a < +\infty$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$a + (+\infty) = (+\infty) + a = a - (-\infty) = +\infty$$
$$a + (-\infty) = (-\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty.$$

(iii) Αν $a > 0$ ορίζουμε

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = +\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = -\infty.$$

(iv) Αν $a < 0$ ορίζουμε

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = -\infty$$
$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = +\infty.$$

(v) Επίσης, ορίζουμε

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$
$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

και

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

(vi) Δεν ορίζονται οι παραστάσεις

$$(+\infty) + (-\infty),\ (-\infty) + (+\infty), 0 \cdot (+\infty),\ (+\infty) \cdot 0,\ 0 \cdot (-\infty),\ (-\infty) \cdot 0$$

και

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \frac{+\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{+\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}.$$

Τέλος, αν ένα μη κενό σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο ορίζουμε $\sup A = +\infty$, ενώ αν δεν είναι κάτω φραγμένο ορίζουμε $\inf A = -\infty$.

1.4.3 Διαστήματα

Ορισμός 1.4.4. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} \\
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\
[a,b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \\
(a,b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} \\
[a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant a\} \\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\
(-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\} \\
(-\infty,b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.
\end{aligned}$$

Τα υποσύνολα αυτά του συνόλου των πραγματικών αριθμών λέγονται *διαστήματα*.

Στο επόμενο λήμμα περιγράφουμε τα σημεία του κλειστού διαστήματος $[a,b]$.

Λήμμα 1.4.5. *Αν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ τότε*

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb : \, 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Ειδικότερα, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b.$$

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει

$$a \leqslant (1-t)a + tb = a + t(b-a) \leqslant b,$$

δηλαδή $\{(1-t)a + tb : \, 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subseteq [a,b]$.

Αντίστροφα, κάθε $x \in [a,b]$ γράφεται στη μορφή

$$x = \frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b.$$

Παρατηρώντας ότι $t := (x-a)/(b-a) \in [0,1]$ και $1-t = (b-x)/(b-a)$, βλέπουμε ότι $[a,b] \subseteq \{(1-t)a + tb : \, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. □

Τα σημεία $(1-t)a + tb$ του $[a,b]$ λέγονται *κυρτοί συνδυασμοί* των a και b. Το *μέσο* του $[a,b]$ είναι το

$$m = \left(1 - \frac{1}{2}\right)a + \frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}.$$

1.5 Βασικές ανισότητες

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε τρεις βασικές ανισότητες: την ανισότητα του Bernoulli, την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Άλλες βασικές ανισότητες εμφανίζονται στις Ασκήσεις.

Πρόταση 1.5.1 (ανισότητα Bernoulli). *Αν $x > -1$ τότε*

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $1+x = 1+x$. Δείχνουμε το επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $(1+x)^n \geqslant 1+nx$. Αφού $1+x > 0$, έχουμε $(1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$. Άρα,

$$(1+x)^{n+1} \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x. \qquad \square$$

Παρατήρηση. Αν $x > 0$, μπορούμε να δείξουμε την ανισότητα του Bernoulli χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα: για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} x^k = 1+nx+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} > 1+nx,$$

αφού όλοι οι προσθετέοι στο $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$ είναι θετικοί. Ομοίως, αν $n \geqslant 3$ παίρνουμε την ισχυρότερη ανισότητα

$$(1+x)^n > 1+nx+\binom{n}{2}x^2 = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Πρόταση 1.5.2 (ανισότητα Cauchy-Schwarz). *Αν $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2).$$

Απόδειξη. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη βασίζεται στην τεχνική της *κανονικοποίησης*. Θεωρούμε πρώτα $x_1, \ldots, x_n$ και $y_1, \ldots, y_n$ οι οποίοι ικανοποιούν τη συνθήκη

$$x_1^2+\cdots+y_n^2 = y_1^2+\cdots+y_n^2 = 1.$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ έχουμε τη στοιχειώδη ανισότητα

$$|x_ky_k| \leqslant \frac{1}{2}(|x_k|^2+|y_k|^2) = \frac{1}{2}(x_k^2+y_k^2).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|x_1y_1+\cdots+x_ny_n| &\leqslant |x_1y_1|+\cdots+|x_ny_n| \leqslant \frac{1}{2}(x_1^2+y_1^2)+\cdots+\frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)\\ &= \frac{1}{2}(x_1^2+\cdots+x_n^2)+\frac{1}{2}(y_1^2+\cdots+y_n^2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.\end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα τυχόντες $a_1, \ldots, a_n$ και $b_1, \ldots, b_n$ στο $\mathbb{R}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_1^2+\cdots+a_n^2 \neq 0$ και $b_1^2+\cdots+b_n^2 \neq 0$ (διότι, αλλιώς η ανισότητα ισχύει για τετριμμένους λόγους – αν, για παράδειγμα, $a_1^2+\cdots+a_n^2 = 0$ τότε $a_1 = \cdots = a_n = 0$ και έπεται ότι $a_1b_1+\cdots+a_nb_n = 0$, δηλαδή τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό μέλος της ανισότητας που θέλουμε να δείξουμε είναι ίσα με μηδέν).

Ορίζουμε

$$s = \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2} \quad \text{και} \quad t = \sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}.$$

Κατόπιν, θέτουμε

$$x_k = \frac{a_k}{s} \quad \text{και} \quad y_k = \frac{b_k}{t}, \qquad k = 1, \dots, n.$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{s^2} = 1 \quad \text{και} \quad y_1^2 + \cdots + y_n^2 = \frac{b_1^2 + \cdots + b_n^2}{t^2} = 1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 &= (tsx_1y_1 + \cdots + tsx_ny_n)^2 = t^2s^2(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \\ &\leqslant t^2s^2 = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2).\end{aligned}$$

Δεύτερος τρόπος. Μπορούμε, όπως παραπάνω, να υποθέσουμε ότι $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$. Θεωρούμε το τριώνυμο

$$p(x) = (a_1x + b_1)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2.$$

Παρατηρήστε ότι $p(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (για κάθε x έχουμε ένα άθροισμα τετραγώνων, το οποίο είναι προφανώς μη αρνητικό) και ότι το $p(x)$ είναι όντως τριώνυμο: έχουμε

$$p(x) = (a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 + 2(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) =: \alpha x^2 + 2\beta x + \gamma.$$

Η διακρίνουσα $\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha\gamma$ δεν μπορεί να είναι θετική, άρα $\beta^2 \leqslant \alpha\gamma$. Δηλαδή,

$$(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2),$$

όπως θέλαμε. □

Πρόταση 1.5.3 (ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου). *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $m = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ και ορίζουμε $b_k = \frac{a_k}{m}$, $k = 1, \dots, n$. Παρατηρούμε ότι οι b_k είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο

$$b_1 \cdots b_n = \frac{a_1}{m} \cdots \frac{a_n}{m} = \frac{a_1 \cdots a_n}{m^n} = 1.$$

Επίσης, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$b_1 + \cdots + b_n \geqslant n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.5.4. *Αν $n \in \mathbb{N}$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $b_1 \cdots b_n = 1$, τότε $b_1 + \cdots + b_n \geqslant n$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των b_k: αν $n = 1$ τότε έχουμε έναν μόνο αριθμό, τον $b_1 = 1$. Συνεπώς, η ανισότητα είναι τετριμμένη: $1 \geqslant 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε m-άδα θετικών αριθμών $x_1, \ldots, x_m$ με γινόμενο $x_1 \cdots x_m = 1$ ισχύει η ανισότητα

$$x_1 + \cdots + x_m \geqslant m,$$

και δείχνουμε ότι αν $b_1, \cdots, b_{m+1}$ είναι $(m+1)$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί και $b_1 \cdots b_{m+1} = 1$ τότε

$$b_1 + \cdots + b_{m+1} \geqslant m + 1.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{m+1}$. Παρατηρούμε ότι, αν $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m+1} = 1$ τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα. Αν όχι, αναγκαστικά έχουμε $b_1 < 1 < b_{m+1}$ (εξηγήστε γιατί).

Θεωρούμε την m-άδα θετικών αριθμών

$$x_1 = b_1 b_{m+1}\,,\ x_2 = b_2, \ldots,\ x_m = b_m.$$

Αφού $x_1 \cdots x_m = b_1 \cdots b_{m+1} = 1$, από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$(b_1 b_{m+1}) + b_2 + \cdots + b_m = x_1 + \cdots + x_m \geqslant m.$$

Όμως, από την $b_1 < 1 < b_{m+1}$ έπεται ότι $(b_{m+1} - 1)(1 - b_1) > 0$ δηλαδή $b_1 + b_{m+1} > 1 + b_{m+1} b_1$. Άρα,

$$b_1 + b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m > 1 + b_1 b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m \geqslant 1 + m.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το επαγωγικό βήμα. □

Παρατήρηση. Αν οι αριθμοί $a_1, \cdots, a_n$ είναι όλοι ίσοι τότε η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου ισχύει ως ισότητα. Αν οι αριθμοί $a_1, \cdots, a_n$ δεν είναι όλοι ίσοι, τότε η απόδειξη που προηγήθηκε δείχνει ότι η ανισότητα είναι γνήσια (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή: στην ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $a_1 = \cdots = a_n$.

1.6 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leqslant \sup A$.

(β) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leqslant x$.

(γ) Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\sup A \in A$.

(δ) Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τότε $\sup A \in A$.

(ε) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x \leqslant a$.

(στ) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x < a$.

(ζ) Αν το A είναι μη κενό και $\sup A - \inf A = 1$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.

(η) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$.

2. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$:

(α) Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x < y + \varepsilon$, τότε $x \leqslant y$.

(β) Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $x \leqslant y + \varepsilon$, τότε $x \leqslant y$.

(γ) Αν για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $|x - y| \leqslant \varepsilon$, τότε $x = y$.

(δ) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x - y| < b - a$.

3. (α) Αν $|a - b| < \varepsilon$, τότε υπάρχει x ώστε

$$|a - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ και } |b - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(β) Ισχύει το αντίστροφο;

(γ) Έστω ότι $a < b < a + \varepsilon$. Βρείτε όλους τους $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις $|a - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|b - x| < \frac{\varepsilon}{2}$.

4. Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

5. Εξετάστε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
(i) $2^n > n^3$, (ii) $2^n > n^2$, (iii) $2^n > n$, (iv) $n! > 2^n$, (v) $2^{n-1} \leqslant n^2$.

6. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Αν $0 < a < b$, δείξτε ότι

$$na^{n-1} \leqslant \frac{b^n - a^n}{b - a} \leqslant nb^{n-1}.$$

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $a > 1$, τότε $a^n > a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 2$.

(β) Αν $a > 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m < n$.

(γ) Αν $0 < a < 1$, τότε $a^n < a$ για κάθε φυσικό αριθμό $n \geqslant 2$.

(δ) Αν $0 < a < 1$ και $m, n \in \mathbb{N}$, τότε $a^m < a^n$ αν και μόνο αν $m > n$.

8. (α) Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, δείξτε ότι

$$(1 + a_1) \cdots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n.$$

(β) Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$, τότε

$$\begin{aligned} 1 - (a_1 + \cdots + a_n) &\leqslant (1 - a_1) \cdots (1 - a_n) \\ &\leqslant 1 - (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n). \end{aligned}$$

9. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

10. Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

11. Έστω A μη κενό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\inf A = \sup A$. Τι συμπεραίνετε για το A;

12. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Αποδείξτε ότι

$$x = y \Longleftrightarrow A_x = A_y.$$

13. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

(α) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0, 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}$, $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

(β) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.

(γ) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

Β′ Ομάδα

14. (Ανισότητα Bernoulli) Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $a \geqslant -1$, τότε $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

(β) Αν $0 < a < 1/n$, τότε $(1+a)^n < 1/(1-na)$.

(γ) Αν $0 \leqslant a \leqslant 1$, τότε

$$1 - na \leqslant (1-a)^n \leqslant \frac{1}{1+na}.$$

15. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $-1 < a < 0$, τότε $(1+a)^n \leqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $a > 0$, τότε $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

16. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

17. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αποδείξτε ότι: αν $a_1, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Αποδείξτε επίσης την ανισότητα του Minkowski: αν $a_1, \dots, a_n$ και $b_1, \dots, b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

18. (Ταυτότητα του Lagrange) Αν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_k b_j - a_j b_k)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Lagrange δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

19. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) Αν $x_1, \dots, x_n > 0$, τότε

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Επίσης, αν $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, τότε

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)^n .$$

20. Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Αποδείξτε ότι

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geqslant n^2.$$

21. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B.$$

22. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι φραγμένο και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο για το $\sup(A \cap B)$ ή το $\inf(A \cap B)$;

23. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$.

24. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$a \leqslant b.$$

Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

25. Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \left\{ 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad , \quad B = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

26. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n m}{n+m} : \, m, n = 1, 2, \ldots \right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

27. Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} \, : \, x \in A \right\}.$$

Γ΄ Ομάδα

28. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ και $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

29. Αποδείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

30. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Αποδείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B, \qquad \inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

31. Έστω A μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $tA = \{ta : a \in A\}$. Αποδείξτε ότι

(α) αν $t \geqslant 0$ τότε $\sup(tA) = t \sup A$ και $\inf(tA) = t \inf A$.

(β) αν $t < 0$ τότε $\sup(tA) = t \inf A$ και $\inf(tA) = t \sup A$.

32. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$, και

(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

33. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$.

34. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a < b$.

(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε είτε $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

35. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ακέραιος $k_n \in \mathbb{Z}$ ώστε $\left| x - \frac{k_n}{\sqrt{n}} \right| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

36. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $N \geqslant 2$ υπάρχουν ακέραιοι m και n, με $0 < n \leqslant N$, ώστε $|nx - m| < \frac{1}{N}$.

37. (Ανισότητα Chebyshev) Αν $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n > 0$ και $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n > 0$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} &\leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \\ &\leqslant \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n}. \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

2.1 Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Ορισμός 2.1.1. *Ακολουθία* λέγεται κάθε συνάρτηση $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών και τιμές στους πραγματικούς αριθμούς). Αντί να συμβολίζουμε τις τιμές της ακολουθίας a με $a(1), a(2), \ldots$, γράφουμε

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

και λέμε ότι ο αριθμός a_n είναι ο n-οστός *όρος* της ακολουθίας. Η ίδια η ακολουθία συμβολίζεται με $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, (a_n), $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ χωρίς αυτό να προκαλεί σύγχυση.

Παραδείγματα 2.1.2. (α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η ακολουθία $a_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$ λέγεται *σταθερή ακολουθία* με τιμή c.

(β) $a_n = n$. Οι πρώτοι όροι της (a_n) είναι: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

(γ) $a_n = \frac{1}{n}$. Οι πρώτοι όροι της (a_n) είναι: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$.

(δ) $a_n = a^n$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Οι πρώτοι όροι της (a_n) είναι: $a_1 = a$, $a_2 = a^2$, $a_3 = a^3$.

(ε) $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αυτή η ακολουθία ορίζεται *αναδρομικά*: αν γνωρίζουμε τον a_n τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον a_{n+1} χρησιμοποιώντας την $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$. Δεδομένου ότι έχει δοθεί ο πρώτος της όρος, η (a_n) είναι καλά ορισμένη (κάνοντας $n - 1$ βήματα μπορούμε να βρούμε τον a_n). Οι πρώτοι όροι της (a_n) είναι: $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$, $a_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}}$.

(στ) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ και $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αν γνωρίζουμε τους a_n και a_{n+1} τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον a_{n+2} χρησιμοποιώντας την *αναδρομική σχέση* $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Δεδομένου ότι έχουν δοθεί οι πρώτοι δύο όροι, η (a_n) είναι καλά ορισμένη (κάνοντας $n - 2$ βήματα μπορούμε να βρούμε τον a_n). Οι πρώτοι όροι της (a_n) είναι: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$.

(ζ) $a_n = \frac{1}{n}$ αν $n = 2k$ και $a_n = \frac{1}{2}$ αν $n = 2k-1$. Για τον υπολογισμό του n–οστού όρου a_n αρκεί να γνωρίζουμε αν ο n είναι άρτιος ή περιττός: για παράδειγμα, $a_6 = \frac{1}{6}$ και $a_7 = \frac{1}{2}$.

Ορισμός 2.1.3. Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών.

(α) Λέμε ότι $(a_n) = (b_n)$ (οι ακολουθίες είναι *ίσες*) αν $a_n = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή,

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \ldots.$$

(β) Το *άθροισμα*, η *διαφορά*, το *γινόμενο* και το *πηλίκο* των ακολουθιών (a_n), (b_n) είναι οι ακολουθίες $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n b_n)$ και (a_n/b_n) αντίστοιχα (για την τελευταία πρέπει να κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$).

Ορισμός 2.1.4 (σύνολο των όρων)**.** Το σύνολο των όρων της ακολουθίας (a_n) είναι το

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Δεν θα πρέπει να συγχέει κανείς την ακολουθία $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots)$ με το σύνολο των τιμών της. Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της ακολουθίας $(-1)^n = (1, -1, 1, -1, \ldots)$ είναι το δισύνολο $\{-1, 1\}$. Παρατηρήστε επίσης ότι δύο διαφορετικές ακολουθίες μπορεί να έχουν το ίδιο σύνολο τιμών (δώστε παραδείγματα).

Ορισμός 2.1.5 (τελικό τμήμα)**.** Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Κάθε ακολουθία της μορφής $(a_{m+n-1})_{n=1}^{\infty} = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$ όπου $m \in \mathbb{N}$ λέγεται *τελικό τμήμα* της (a_n). Για παράδειγμα, οι ακολουθίες $(5, 6, 7, \ldots)$ και $(30, 31, 32, \ldots)$ είναι τελικά τμήματα της $a_n = n$.

2.2 Σύγκλιση ακολουθιών

Θεωρούμε τις ακολουθίες (a_n) και (b_n) με n-οστούς όρους τους

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad b_n = (-1)^n.$$

Για «μεγάλες» τιμές του n οι όροι $1/n$ της (a_n) βρίσκονται (όλο και πιο) «κοντά» στο 0. Από την άλλη πλευρά, οι όροι $(-1)^n$ της (b_n) δεν πλησιάζουν σε κάποιον πραγματικό αριθμό. Θα λέγαμε ότι η ακολουθία (a_n) συγκλίνει (έχει όριο το 0 καθώς το n τείνει στο άπειρο) ενώ η (b_n) δεν συγκλίνει. Με άλλα λόγια, θέλουμε να εκφράσουμε αυστηρά την πρόταση:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν για *μεγάλες τιμές του* n ο a_n είναι *κοντά* στον a».

Αυτό που πρέπει να κάνουμε σαφές είναι το νόημα των φράσεων «κοντά» και «μεγάλες τιμές». Για παράδειγμα, αν κάποιος θεωρεί ότι η απόσταση 1 είναι ικανοποιητικά μικρή, τότε η (a_n) έχει όλους τους όρους της κοντά στον $1/2$. Επίσης, αν κάποιος θεωρεί ότι η φράση «μεγάλες τιμές» σημαίνει «αρκετές μεγάλες τιμές», τότε η (b_n) έχει αρκετούς όρους κοντά στον 1 αλλά και αρκετούς όρους κοντά στον -1. Συμφωνούμε να λέμε ότι:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν σε οσοδήποτε μικρή περιοχή του a βρίσκονται τελικά όλοι οι όροι της (a_n)».

Η έννοια της *περιοχής* ενός πραγματικού αριθμού a ορίζεται αυστηρά ως εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ το ανοικτό διάστημα $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ με κέντρο τον a και ακτίνα ε είναι μια περιοχή του a (η ε-*περιοχή* του a). Χρησιμοποιώντας την έννοια της ε-περιοχής και την έννοια του τελικού τμήματος μιας ακολουθίας, καταλήγουμε στο εξής:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν κάθε ε–περιοχή του a περιέχει κάποιο τελικό τμήμα της (a_n)».

Παρατηρώντας ότι $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αν και μόνο αν $|x-a| < \varepsilon$, μπορούμε να δώσουμε τον εξής αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 (όριο ακολουθίας)**.** Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_n) *συγκλίνει* στον πραγματικό αριθμό a αν ισχύει το εξής:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(\varepsilon)$ με την ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, τότε $|a_n - a| < \varepsilon$.

Αν η (a_n) συγκλίνει στον a, γράφουμε $\lim a_n = a$ ή $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ή, πιο απλά, $a_n \to a$.

Παρατήρηση 2.2.2. Στον παραπάνω ορισμό, ο δείκτης n_0 εξαρτάται κάθε φορά από το ε. Όσο όμως μικρό κι αν είναι το ε, μπορούμε να βρούμε $n_0(\varepsilon)$ ώστε όλοι οι όροι a_n που έπονται του a_{n_0} να βρίσκονται «ε-κοντά» στον a. Σκεφτείτε την προσπάθεια επιλογής του $n_0(\varepsilon)$ σαν ένα επ' άπειρον παιχνίδι με έναν αντίπαλο ο οποίος επιλέγει ολοένα και μικρότερο $\varepsilon > 0$.

Για να εξοικειωθούμε με τον ορισμό θα αποδείξουμε ότι η $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ ενώ η $b_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει (σε κανέναν πραγματικό αριθμό).

(α) Η $a_n = \frac{1}{n}$ συγκλίνει στο 0: Θεωρούμε τυχούσα ε–περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του 0. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Ο μικρότερος τέτοιος φυσικός αριθμός είναι ο $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (εξηγήστε γιατί), όμως αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$-\varepsilon < 0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, το τελικό τμήμα $\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0+2}, \ldots\right)$ της (a_n) περιέχεται στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Συμφωνα με τον ορισμό, έχουμε $a_n \to 0$.

(β) Η $b_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $(-1)^n \to a$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(β1) Αν $a \neq 1$ υπάρχει ε-περιοχή του a ώστε $1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{|1-a|}{2}$. Αφού $b_n \to a$, υπάρχει τελικό τμήμα $(b_m, b_{m+1}, \ldots)$ που περιέχεται στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Ειδικότερα, $b_n \neq 1$ για κάθε $n \geqslant m$. Αυτό είναι άτοπο: αν θεωρήσουμε άρτιο $n \geqslant m$ τότε $b_n = (-1)^n = 1$.

(β2) Αν $a \neq -1$ υπάρχει ε-περιοχή του a ώστε $-1 \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{|1+a|}{2}$. Αφού $b_n \to a$, υπάρχει τελικό τμήμα $(b_m, b_{m+1}, \ldots)$ που περιέχεται στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Ειδικότερα, $b_n \neq -1$ για κάθε $n \geqslant m$. Αυτό είναι άτοπο: αν θεωρήσουμε περιττό $n \geqslant m$ τότε $b_n = (-1)^n = -1$.

Θεώρημα 2.2.3 (μοναδικότητα του ορίου)**.** *Αν* $a_n \to a$ *και* $a_n \to b$*, τότε* $a = b$*.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a \neq b$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a < b$. Αν πάρουμε $\varepsilon = (b-a)/4$, τότε $a + \varepsilon < b - \varepsilon$. Δηλαδή,

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset.$$

Αφού $a_n \to a$, μπορούμε να βρούμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_1$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Ομοίως, αφού $a_n \to b$, μπορούμε να βρούμε $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_2$ να ισχύει $|a_n - b| < \varepsilon$.

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |a_n - b| < \varepsilon.$$

Όμως τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon),$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Θεώρημα 2.2.4 (κριτήριο παρεμβολής ή κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών)**.** *Θεωρούμε τρείς ακολουθίες* a_n, b_n, γ_n *που ικανοποιούν τα ακόλουθα:*

(α) $a_n \leqslant b_n \leqslant \gamma_n$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$*.*

(β) $\lim a_n = \lim \gamma_n = \ell$*.*

Τότε, η (b_n) *συγκλίνει και* $\lim b_n = \ell$*.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to \ell$ και $\gamma_n \to \ell$, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n_1, n_2 ώστε

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \text{ αν } n \geqslant n_1 \quad \text{και} \quad |\gamma_n - \ell| < \varepsilon \text{ αν } n \geqslant n_2.$$

Ισοδύναμα,

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \text{ αν } n \geqslant n_1 \quad \text{και} \quad \ell - \varepsilon < \gamma_n < \ell + \varepsilon \text{ αν } n \geqslant n_2.$$

Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αν $n \geqslant n_0$, τότε

$$\ell - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant \gamma_n < \ell + \varepsilon$$

δηλαδή, αν $n \geqslant n_0$ έχουμε $|b_n - \ell| < \varepsilon$. Με βάση τον ορισμό, $b_n \to \ell$. □

Παρατηρήσεις 2.2.5. (α) Βεβαιωθείτε ότι έχετε καταλάβει τη διαδικασία απόδειξης: αν θέλουμε να δείξουμε ότι $t_n \to t$, πρέπει για αυθαίρετο (μικρό) $\varepsilon > 0$ – η απόδειξη ξεκινάει με την φράση «έστω $\varepsilon > 0$» – να βρούμε φυσικό n_0 (που εξαρτάται από το ε) με την ιδιότητα: $n \geqslant n_0(\varepsilon) \Longrightarrow |t_n - t| < \varepsilon$.

(β) Ίσως έχετε ήδη παρατηρήσει ότι οι πρώτοι m όροι ($m = 2, 10$ ή και 10^{10}) δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση ή μη μιας ακολουθίας. Αποδείξτε αυστηρά τα εξής:

1. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία $(b_n) = (a_{m+n-1})$ συγκλίνει, και μάλιστα $\lim_n a_n = \lim_n a_{m+n-1}$.

2. Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες που διαφέρουν σε πεπερασμένους το πλήθος όρους: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n = b_n$ για κάθε $n \geqslant m$. Αν η (a_n) συγκλίνει στον a τότε η (b_n) συγκλίνει κι αυτή στον a.

Ορισμός 2.2.6 (φραγμένη ακολουθία)**.** Η ακολουθία (a_n) λέγεται *φραγμένη* αν μπορούμε να βρούμε κάποιον $M > 0$ με την ιδιότητα

$$|a_n| \leqslant M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θεώρημα 2.2.7. *Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geqslant n_0, \text{ τότε } |a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και εύκολα ελέγχουμε ότι $|a_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leqslant n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη. □

Ορισμός 2.2.8 (ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο)**.** Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(α) Λέμε ότι $a_n \to +\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $+\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ ώστε

$$\text{αν } n \geqslant n_0, \text{ τότε } a_n > M.$$

(β) Λέμε ότι $a_n \to -\infty$ (η ακολουθία τείνει στο $-\infty$) αν για κάθε $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο) υπάρχει φυσικός $n_0 = n_0(M)$ ώστε

$$\text{αν } n \geqslant n_0, \text{ τότε } a_n < -M.$$

Παρατήρηση 2.2.9. Χρησιμοποιήσαμε τη λέξη «τείνει» στο $\pm\infty$: συμφωνούμε πως μια ακολουθία (a_n) *συγκλίνει* μόνο αν συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό a (ο οποίος λέγεται και *όριο* της (a_n)). Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις θα λέμε ότι η ακολουθία *αποκλίνει*.

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με την ακριβή διατύπωση της άρνησης του ορισμού του ορίου. Θυμηθείτε ότι:

> «η (a_n) συγκλίνει στον a αν κάθε ε-περιοχή του a περιέχει κάποιο τελικό τμήμα της (a_n)».

Επομένως, η (a_n) *δεν συγκλίνει στον* a αν υπάρχει περιοχή $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ του a η οποία δεν περιέχει κανένα τελικό τμήμα της (a_n). Ισοδύναμα,

> «η (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: κάθε τελικό τμήμα $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ της (a_n) έχει τουλάχιστον έναν όρο που δεν ανήκει στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$».

Παρατηρήστε ότι αν $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ είναι ένα τελικό τμήμα της (a_n) τότε: το $(a_m, a_{m+1}, \ldots)$ δεν περιέχεται στο $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \geqslant m$ ώστε $a_n \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, δηλαδή $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. Καταλήγουμε λοιπόν στην εξής πρόταση:

> «η (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n \geqslant m$ ώστε $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$».

Άσκηση 2.2.10. Αποδείξτε ότι η ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει στον a αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε άπειροι το πλήθος όροι της (a_n) ικανοποιούν την $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$.

2.3 Άλγεβρα των ορίων

Όλες οι βασικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών αποδεικνύονται εύκολα με βάση τον ορισμό.

Πρόταση 2.3.1. *$a_n \to a$ αν και μόνο αν $a_n - a \to 0$ αν και μόνο αν $|a_n - a| \to 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να γράψουμε τους τρείς ορισμούς:

(i) Έχουμε $a_n \to a$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

(ii) Έχουμε $a_n - a \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$.

(iii) Έχουμε $|a_n - a| \to 0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $\big| |a_n - a| - 0 \big| < \varepsilon$.

Παρατηρώντας ότι $|a_n - a| = |(a_n - a) - 0| = \big| |a_n - a| - 0 \big|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι οι τρεις προτάσεις λένε ακριβώς το ίδιο πράγμα. □

Πρόταση 2.3.2. *$a_n \to 0$ αν και μόνο αν $|a_n| \to 0$.*

Απόδειξη. Ειδική περίπτωση της Πρότασης 2.3.1 ($a = 0$). □

Πρόταση 2.3.3. *Αν $a_n \to a$ τότε $|a_n| \to |a|$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\big| |a_n| - |a| \big| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon,$$

από την τριγωνική ανισότητα για την απόλυτη τιμή. □

Πρόταση 2.3.4. *Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$ τότε $a_n + b_n \to a + b$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_1$ να ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ομοίως, αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_2$ να ισχύει

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε ταυτόχρονα $|a_n - a| < \varepsilon/2$ και $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Άρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό δείχνει ότι $a_n + b_n \to a + b$. □

Πρόταση 2.3.5. *Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες. Υποθέτουμε ότι η (b_n) είναι φραγμένη και ότι $a_n \to 0$. Τότε, $a_nb_n \to 0$.*

Απόδειξη. Η (b_n) είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|b_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. Έπεται ότι, αν $n \geqslant n_0$ τότε

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, αυτό δείχνει ότι $a_n b_n \to 0$. □

Πρόταση 2.3.6. *Αν $a_n \to a$ και $t \in \mathbb{R}$ τότε $ta_n \to ta$.*

Απόδειξη. Από την $a_n \to a$ έπεται ότι $a_n - a \to 0$. Θεωρούμε τη σταθερή ακολουθία $b_n = t$. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε

$$ta_n - ta = t(a_n - a) = b_n(a_n - a) \to 0.$$

Συνεπώς, $ta_n \to ta$. □

Πρόταση 2.3.7. *Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε $a_n b_n \to ab$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

$$a_n b_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a).$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Η (a_n) συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Αφού $b_n - b \to 0$, η Πρόταση 2.3.5 δείχνει ότι $a_n(b_n - b) \to 0$.

(ii) Αφού $a_n - a \to 0$, η Πρόταση 2.3.6 δείχνει ότι $b(a_n - a) \to 0$.

Τώρα, η Πρόταση 2.3.4 δείχνει ότι

$$a_n(b_n - b) + b(a_n - a) \to 0 + 0 = 0.$$

Δηλαδή, $a_n b_n - ab \to 0$. □

Πρόταση 2.3.8. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Αν $a_n \to a$ τότε $a_n^k \to a^k$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς k. Αν $a_n \to a$ και αν γνωρίζουμε ότι $a_n^m \to a^m$, τότε

$$a_n^{m+1} = a_n \cdot a_n^m \to a \cdot a^m = a^{m+1}$$

από την Πρόταση 2.3.7. □

Πρόταση 2.3.9. *Έστω (a_n) και (b_n) ακολουθίες με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b \neq 0$, τότε $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.3.7 για τις (a_n) και $\left(\frac{1}{b_n}\right)$.

Αυτό που θέλουμε να γίνει μικρό για μεγάλες τιμές του n είναι η ποσότητα

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n||b|}.$$

Ισχυρισμός. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_1$,

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}.$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$ και, λόγω της $b_n \to b$, βρίσκουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_1$ τότε $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_1$ ισχύει

$$\big|\,|b_n| - |b|\,\big| \leqslant |b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι $|b_n| > \frac{|b|}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_1$.

Ο ισχυρισμός έχει την εξής συνέπεια: αν $n \geqslant n_1$ τότε

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2|b - b_n|}{|b|^2}.$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \to b$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $|b - b_n| < \frac{\varepsilon|b|^2}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_2$. Επιλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Αν $n \geqslant n_0$, τότε

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leqslant \frac{2|b - b_n|}{|b|^2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$. □

Πρόταση 2.3.10. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. Αν $a_n \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $a_n \to a$, τότε $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) $a_n \to 0$: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \varepsilon^k$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$0 \leqslant a_n < \varepsilon^k.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$0 \leqslant \sqrt[k]{a_n} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon.$$

Άρα, $\sqrt[k]{a_n} \to 0$.

(β) $a_n \to a > 0$: Θυμηθείτε ότι αν $x, y \geqslant 0$ τότε

$$|x^k - y^k| = |x - y|(x^{k-1} + x^{k-2}y + \cdots + xy^{k-2} + y^{k-1}) \geqslant |x - y|y^{k-1}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα με $x = \sqrt[k]{a_n}$ και $y = \sqrt[k]{a}$ βλέπουμε ότι

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό για τον θετικό αριθμό $\varepsilon_1 = \sqrt[k]{a^{k-1}} \cdot \varepsilon$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \sqrt[k]{a^{k-1}} \cdot \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}| \leqslant \frac{|a_n - a|}{\sqrt[k]{a^{k-1}}} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$. □

Πρόταση 2.3.11. *Αν $a_n \leqslant b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $a_n \to a$, $b_n \to b$, τότε $a \leqslant b$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a > b$. Αν θέσουμε $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ τότε υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_1$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

και για κάθε $n \geqslant n_2$ ισχύει

$$|b_n - b| < \frac{a-b}{2} \Longrightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$b_n < \frac{a+b}{2} < a_n,$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Πρόταση 2.3.12. *Αν $m \leqslant a_n \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $a_n \to a$, τότε $m \leqslant a \leqslant M$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τις σταθερές ακολουθίες $b_n = m$, $\gamma_n = M$ και εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση. □

2.4 Βασικά όρια και βασικά κριτήρια σύγκλισης

Σε αυτή την παράγραφο βρίσκουμε τα όρια κάποιων συγκεκριμένων ακολουθιών οι οποίες εμφανίζονται πολύ συχνά στη συνέχεια. Με τη βοήθεια αυτών των «βασικών ορίων» αποδεικνύουμε δύο πολύ χρήσιμα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών στο 0 ή στο $+\infty$.

Πρόταση 2.4.1. *Αν $a > 1$, τότε η ακολουθία $x_n = a^n$ τείνει στο $+\infty$.*

Απόδειξη. Αφού $a > 1$, υπάρχει $\vartheta > 0$ ώστε $a = 1 + \vartheta$. Από την ανισότητα Bernoulli παίρνουμε

$$x_n = (1+\vartheta)^n \geqslant 1 + n\vartheta > n\vartheta$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα $M > 0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n_0 > M/\vartheta$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$x_n > n\vartheta \geqslant n_0\vartheta > M.$$

Έπεται ότι $x_n \to +\infty$. □

Πρόταση 2.4.2. *Αν $0 < a < 1$, τότε η ακολουθία $x_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.*

Απόδειξη. Έχουμε $\frac{1}{a} > 1$, άρα υπάρχει $\vartheta > 0$ ώστε $\frac{1}{a} = 1 + \vartheta$. Από την ανισότητα Bernoulli παίρνουμε

$$\frac{1}{x_n} = (1+\vartheta)^n \geqslant 1 + n\vartheta > n\vartheta$$

δηλαδή

$$0 < x_n < \frac{1}{n\vartheta}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την $\frac{1}{n\vartheta} \to 0$ και από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $x_n \to 0$. □

Πρόταση 2.4.3. *Αν $a > 0$, τότε η ακολουθία $x_n = \sqrt[n]{a} \to 1$.*

Απόδειξη. (α) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $a > 1$. Τότε, $\sqrt[n]{a} > 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$\vartheta_n = \sqrt[n]{a} - 1 = x_n - 1.$$

Παρατηρήστε ότι $\vartheta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι $\vartheta_n \to 0$, τότε έχουμε το ζητούμενο: $x_n = 1 + \vartheta_n \to 1$.

Αφού $\sqrt[n]{a} = 1 + \vartheta_n$, μπορούμε να γράψουμε

$$a = (1+\vartheta_n)^n \geqslant 1 + n\vartheta_n > n\vartheta_n.$$

Έπεται ότι

$$0 < \vartheta_n < \frac{a}{n},$$

και από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\vartheta_n \to 0$. Συνεπώς, $x_n = 1 + \vartheta_n \to 1$.

(β) Αν $0 < a < 1$ τότε $\frac{1}{a} > 1$. Από το (α) έχουμε

$$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \to 1 \neq 0.$$

Συνεπώς, $x_n \to 1$.

(γ) Τέλος, αν $a = 1$ τότε $x_n = \sqrt[n]{1} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Είναι τώρα φανερό ότι $x_n \to 1$. □

Πρόταση 2.4.4. *Η ακολουθία $x_n = \sqrt[n]{n} \to 1$.*

Απόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης. Ορίζουμε

$$\vartheta_n = \sqrt[n]{n} - 1 = x_n - 1.$$

Παρατηρήστε ότι $\vartheta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν δείξουμε ότι $\vartheta_n \to 0$, τότε έχουμε το ζητούμενο: $x_n = 1 + \vartheta_n \to 1$.

Αφού $\sqrt[n]{n} = 1 + \vartheta_n$, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό ανάπτυγμα, μπορούμε να γράψουμε

$$n = (1+\vartheta_n)^n \geqslant 1 + n\vartheta_n + \binom{n}{2}\vartheta_n^2 > \frac{n(n-1)}{2}\vartheta_n^2.$$

Έπεται ότι, για $n \geqslant 2$,

$$0 < \vartheta_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}},$$

και από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι $\vartheta_n \to 0$. Συνεπώς, $x_n = 1 + \vartheta_n \to 1$. □

Πρόταση 2.4.5 (κριτήριο του λόγου)**.** *Έστω (a_n) ακολουθία μη μηδενικών όρων ($a_n \neq 0$).*

(α) *Αν $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell > 1$, τότε $a_n \to +\infty$.*

(β) *Αν $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell < 1$, τότε $a_n \to 0$.*

Απόδειξη. (α) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2} > 0$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\vartheta := \frac{\ell+1}{2} > 1$. Τότε, $a_{n_0+1} > \vartheta a_{n_0}$, $a_{n_0+2} > \vartheta^2 a_{n_0}$, $a_{n_0+3} > \vartheta^3 a_{n_0}$, και γενικά, αν $n > n_0$ ισχύει (εξηγήστε γιατί)

$$a_n > \vartheta^{n-n_0} a_{n_0} = \frac{a_{n_0}}{\vartheta^{n_0}} \cdot \vartheta^n.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta^n = +\infty$, έπεται ότι $a_n \to +\infty$.

(β) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2} > 0$. Αφού $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \ell + \varepsilon = \frac{\ell+1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\rho := \frac{\ell+1}{2} < 1$. Τότε, $|a_{n_0+1}| < \rho|a_{n_0}|$, $|a_{n_0+2}| < \rho^2|a_{n_0}|$, $|a_{n_0+3}| < \rho^3|a_{n_0}|$, και γενικά, αν $n > n_0$ ισχύει (εξηγήστε γιατί)

$$|a_n| < \rho^{n-n_0}|a_{n_0}| = \frac{|a_{n_0}|}{\rho^{n_0}} \cdot \rho^n.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^n = 0$, έπεται ότι $a_n \to 0$. □

Παρατήρηση 2.4.6. Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ τότε το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα. Για παράδειγμα, $\frac{n+1}{n} \to 1$ και $n \to \infty$, όμως $\frac{1/(n+1)}{1/n} \to 1$ και $1/n \to 0$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται η ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.4.7. (α) *Έστω $\mu > 1$ και (a_n) ακολουθία θετικών όρων. Αν $a_{n+1} \geqslant \mu a_n$ για κάθε n, τότε $a_n \to +\infty$.*

(β) *Έστω $0 < \mu < 1$ και (a_n) ακολουθία με την ιδιότητα $|a_{n+1}| \leqslant \mu|a_n|$ για κάθε n. Τότε, $a_n \to 0$.*
□

Πρόταση 2.4.8 (κριτήριο της ρίζας)**.** *Έστω (a_n) ακολουθία με μη αρνητικούς όρους.*

(α) *Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho < 1$ τότε $a_n \to 0$.*

(β) *Αν $\sqrt[n]{a_n} \to \rho > 1$ τότε $a_n \to +\infty$.*

Απόδειξη. (α) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1-\rho}{2} > 0$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon = \frac{\rho + 1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\vartheta := \frac{\rho+1}{2} < 1$ και

$$0 \leqslant a_n \leqslant \vartheta^n \quad \text{για κάθε } n \geqslant n_0.$$

Αφού $0 < \vartheta < 1$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta^n = 0$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έπεται ότι $a_n \to 0$.

(β) Θέτουμε $\varepsilon = \frac{\rho-1}{2} > 0$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\sqrt[n]{a_n} > \rho - \varepsilon = \frac{\rho + 1}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι $\vartheta := \frac{\rho+1}{2} > 1$ και

$$a_n \geqslant \vartheta^n \quad \text{για κάθε } n \geqslant n_0.$$

Αφού $\vartheta > 1$, έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} \vartheta^n = +\infty$. Έπεται ότι $a_n \to +\infty$. □

Παρατήρηση 2.4.9. Αν $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ τότε το κριτήριο δεν δίνει συμπέρασμα. Για παράδειγμα, $\sqrt[n]{n} \to 1$ και $n \to \infty$, όμως $\sqrt[n]{1/n} \to 1$ και $1/n \to 0$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται η εξής Πρόταση.

Πρόταση 2.4.10. *Έστω (a_n) ακολουθία με μη αρνητικούς όρους.*

(α) *Αν υπάρχει $0 < \rho < 1$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to 0$.*

(β) *Αν υπάρχει $\rho > 1$ ώστε $\sqrt[n]{a_n} \geqslant \rho$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $a_n \to +\infty$.* □

2.5 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

2.5.1 Σύγκλιση μονότονων ακολουθιών

Ορισμός 2.5.1 (μονότονες ακολουθίες)**.** Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Λέμε ότι η (a_n) είναι

(i) *αύξουσα*, αν $a_{n+1} \geqslant a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) *φθίνουσα*, αν $a_{n+1} \leqslant a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) *γνησίως αύξουσα*, αν $a_{n+1} > a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) *γνησίως φθίνουσα*, αν $a_{n+1} < a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις λέμε ότι η (a_n) είναι *μονότονη*.

Παρατηρήσεις 2.5.2. (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι αν η (a_n) είναι αύξουσα τότε

$$n \leqslant m \Longrightarrow a_n \leqslant a_m.$$

Αποδείξτε το με επαγωγή: σταθεροποιήστε το n και δείξτε ότι αν $a_n \leqslant a_m$ τότε $a_n \leqslant a_{m+1}$. Αντίστοιχο συμπέρασμα ισχύει για όλους τους άλλους τύπους μονοτονίας.

(β) Κάθε γνησίως αύξουσα ακολουθία είναι αύξουσα και κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία είναι φθίνουσα.

(γ) Κάθε αύξουσα ακολουθία είναι κάτω φραγμένη, για παράδειγμα από τον πρώτο της όρο a_1. Συνεπώς, μια αύξουσα ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι άνω φραγμένη.

Εντελώς ανάλογα, κάθε φθίνουσα ακολουθία είναι άνω φραγμένη, για παράδειγμα από τον πρώτο της όρο a_1. Συνεπώς, μια φθίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη αν και μόνο αν είναι κάτω φραγμένη.

Η διαίσθηση υποδεικνύει ότι αν μια ακολουθία είναι μονότονη και φραγμένη, τότε πρέπει να συγκλίνει. Για παράδειγμα, αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε οι όροι της συσσωρεύονται στο ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Θα δώσουμε αυστηρή απόδειξη γι' αυτό:

Θεώρημα 2.5.3 (σύγκλιση μονότονων ακολουθιών)**.** *Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι αύξουσα. Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό (για παράδειγμα, $a_1 \in A$) και άνω φραγμένο διότι η (a_n) είναι (άνω) φραγμένη. Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα του. Έστω $a = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a - \varepsilon < a$, ο $a - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του A που είναι μεγαλύτερο από τον $a - \varepsilon$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a - \varepsilon < a_{n_0}.$$

Αφού η a_n είναι αύξουσα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $a_{n_0} \leqslant a_n$ και επειδή ο a είναι άνω φράγμα του A, $a_n \leqslant a$. Δηλαδή, αν $n \geqslant n_0$ τότε

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n \leqslant a < a + \varepsilon$$

Έπεται ότι $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to a$.
□

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται τα εξής:

(i) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε τείνει στο $+\infty$.

(iii) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε τείνει στο $-\infty$.

Ας δούμε για παράδειγμα την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού: Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, ο M δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$a_n \geqslant a_{n_0} > M.$$

Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, $a_n \to +\infty$. □

2.5.2 Ο αριθμός e

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών θα ορίσουμε τον αριθμό e και θα δούμε πώς μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να επιτύχει καλές προσεγγίσεις του.

Πρόταση 2.5.4. *Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό που ανήκει στο $(2,3)$. Ορίζουμε $e := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη.

(α) Θέλουμε να ελέγξουμε ότι $a_n < a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1}\\ &\iff \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n\\ &\iff 1-\frac{1}{n+2} < \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Για να δείξουμε ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη χρησιμοποιούμε μια δεύτερη ακολουθία, την $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Παρατηρήστε ότι $a_n < b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η (b_n) είναι γνησίως φθίνουσα: για να δείξουμε ότι $b_n > b_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{n+2}{n+1}\\ &\iff \frac{n+2}{n+1} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+1}\\ &\iff 1+\frac{1}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} > 1+\frac{n+1}{n(n+2)}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι

$$\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{1}{n+1},$$

το οποίο ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έπεται ότι $a_n < b_n < b_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $a_n < (1+1)^2 = 4$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, η φθίνουσα ακολουθία (b_n) είναι κάτω φραγμένη: $b_n > a_n > a_1 = 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, οι (a_n) και (b_n) συγκλινουν. Έχουν μάλιστα το ίδιο όριο: αφού $b_n = a_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Ονομάζουμε e το κοινό όριο των (a_n) και (b_n). Έχουμε ήδη δεί ότι $2 < e < 4$. Για να προσεγγίσουμε την τιμή του ορίου καλύτερα, παρατηρούμε ότι, για παράδειγμα, αν $n \geqslant 5$ τότε $a_5 < a_n < e < b_n < b_5$, και συνεπώς,

$$2.48832 = \left(\frac{6}{5}\right)^5 < e < \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.985984.$$

Δηλαδή, $2 < e < 3$. □

2.5.3 Αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων

Μια σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος 2.5.3 είναι η «αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων»:

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω $[a_1, b_1] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}] \supseteq \cdots$ μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων. Τότε,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Αν επιπλέον $b_n - a_n \to 0$, τότε το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό (είναι μονοσύνολο).

Απόδειξη. Από την $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}]$ έπεται ότι

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) είναι φθίνουσα.

Από την $[a_n, b_n] \subseteq [a_1, b_1]$ βλέπουμε ότι

$$a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι άνω φραγμένη από τον b_1 και η (b_n) είναι κάτω φραγμένη από τον a_1.

Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a_n \to a \quad \text{και} \quad b_n \to b.$$

Αφού $a_n \leqslant b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η Πρόταση 2.3.11 δείχνει ότι $a \leqslant b$. Επίσης, η μονοτονία των $(a_n), (b_n)$ δίνει

$$a_n \leqslant a \quad \text{και} \quad b \leqslant b_n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$[a, b] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

όπου συμφωνούμε ότι $[a,b]=\{a\}=\{b\}$ αν $a=b$. Ειδικότερα,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\emptyset.$$

Ισχύει μάλιστα ότι

$$[a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n].$$

Πράγματι, αν $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ τότε $a_n\leqslant x\leqslant b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, άρα $a=\lim_n a_n\leqslant x\leqslant \lim_n b_n=b$. Δηλαδή, $x\in[a,b]$.

Τέλος, αν υποθέσουμε ότι $b_n-a_n\to 0$, έχουμε

$$b-a=\lim_n b_n-\lim_n a_n=\lim_n(b_n-a_n)=0.$$

Δηλαδή, $a=b$. Άρα το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ περιέχει ακριβώς έναν πραγματικό αριθμό: τον $a(=b)$. □

Παρατήρηση 2.5.6. Η υπόθεση ότι τα κιβωτισμένα διαστήματα του Θεωρήματος 2.5.5 είναι *κλειστά* δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, θεωρήστε τα ανοικτά διαστήματα $(a_n,b_n)=\left(0,\frac{1}{n}\right)$. Έχουμε

$$(0,1)\supseteq\left(0,\frac{1}{2}\right)\supseteq\cdots\supseteq\left(0,\frac{1}{n}\right)\supseteq\left(0,\frac{1}{n+1}\right)\supseteq\cdots,$$

όμως

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\frac{1}{n}\right)=\emptyset.$$

Αλιώς, θα υπήρχε $x>0$ που θα ικανοποιούσε την $x<\frac{1}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό είναι αδύνατο, λόγω της Αρχιμήδειας ιδιότητας.

2.5.4 Αναδρομικές ακολουθίες

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα παράδειγμα αναδρομικής ακολουθίας. Η τεχνική που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη της σύγκλισης αναδρομικών ακολουθιών βασίζεται συχνά στο θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών.

Παράδειγμα 2.5.7. Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) που έχει πρώτο όρο τον $a_1=1$ και ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n}$ για $n\geqslant 1$. Θα δείξουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον αριθμό $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Απόδειξη. Από τον τρόπο ορισμού της (a_n) είναι φανερό ότι όλοι οι όροι της είναι θετικοί (δείξτε το αυστηρά με επαγωγή).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταφέρει να δείξουμε ότι $a_n\to a$ για κάποιον $a\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$a_{n+1}\to a\quad\text{και}\quad\sqrt{1+a_n}\to\sqrt{1+a}.$$

Αφού $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$, από τη μοναδικότητα του ορίου ο a πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $a = \sqrt{1+a}$, δηλαδή $a^2 - a - 1 = 0$. Συνεπώς,

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ή}\ a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Όμως, το όριο της (a_n), αν υπάρχει, είναι μη αρνητικό. Άρα, $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Μένει να δείξουμε την ύπαρξη του ορίου. Παρατηρούμε ότι $a_2 = \sqrt{2} > 1 = a_1$. Μια ιδέα είναι λοιπόν να δείξουμε ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Τότε, από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (a_n) συγκλινει (και το όριο της είναι ο $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

(α) Δείχνουμε με επαγωγή ότι $a_{n+1} \geqslant a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ήδη ελέγξει ότι $a_2 > a_1$. Υποθέτοντας ότι $a_{m+1} \geqslant a_m$, παίρνουμε

$$a_{m+2} = \sqrt{1+a_{m+1}} \geqslant \sqrt{1+a_m} = a_{m+1},$$

δηλαδή έχουμε δείξει το επαγωγικό βήμα.

(β) Τέλος, δείχνουμε με επαγωγή ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Από τη στιγμή που έχουμε δείξει ότι η (a_n) είναι αύξουσα, θα έπρεπε να μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το «υποψήφιο όριο» $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι άνω φράγμα της (a_n). Για παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $a_n < 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε $a_1 = 1 < 2$ και αν $a_m < 2$ τότε $a_{m+1} = \sqrt{1+a_m} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$. □

2.6 Υπακολουθίες

Ορισμός 2.6.1. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η ακολουθία (b_n) λέγεται *υπακολουθία* της (a_n) αν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$b_n = a_{k_n} \ \text{ για κάθε }\ n \in \mathbb{N}.$$

Με άλλα λόγια, οι όροι της (b_n) είναι οι $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$, όπου $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$. Γενικά, μια ακολουθία έχει πολλές (συνήθως άπειρες το πλήθος) διαφορετικές υπακολουθίες.

Παραδείγματα 2.6.2. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών.

(α) Η υπακολουθία (a_{2n}) των «άρτιων όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_2, a_4, a_6, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = 2n$.

(β) Η υπακολουθία (a_{2n-1}) των «περιττών όρων» της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_3, a_5, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = 2n - 1$.

(γ) Η υπακολουθία (a_{n^2}) της (a_n) έχει όρους τους

$$a_1, a_4, a_9, \ldots.$$

Εδώ, $k_n = n^2$.

(δ) Κάθε τελικό τμήμα $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots)$ της (a_n) είναι υπακολουθία της (a_n). Εδώ, $k_n = m + n - 1$.

Παρατήρηση 2.6.3. Έστω (k_n) μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε, $k_n \geqslant n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή: αφού ο k_1 είναι φυσικός αριθμός, είναι φανερό ότι $k_1 \geqslant 1$. Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $k_m \geqslant m$. Αφού η (k_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $k_{m+1} > k_m$, άρα $k_{m+1} > m$. Αφού οι k_{m+1} και m είναι φυσικοί αριθμοί, έπεται ότι $k_{m+1} \geqslant m + 1$ (θυμηθείτε ότι ανάμεσα στον m και στον $m + 1$ δεν υπάρχει άλλος φυσικός). □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό τότε όλες οι υπακολουθίες της είναι συγκλίνουσες και συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

Πρόταση 2.6.4. *Αν $a_n \to a$ τότε για κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) ισχύει $a_{k_n} \to a$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_n \to a$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα:

$$\text{Για κάθε } m \geqslant n_0 \text{ ισχύει } |a_m - a| < \varepsilon.$$

Από την Παρατήρηση 2.6.3 για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $k_n \geqslant n \geqslant n_0$. Θέτοντας λοιπόν $m = k_n$ στην προηγούμενη σχέση, παίρνουμε:

$$\text{Για κάθε } n \geqslant n_0 \text{ ισχύει } |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $a_{k_n} \to a$: για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε όλοι οι όροι $a_{k_{n_0}}, a_{k_{n_0+1}}, \ldots$ της (a_{k_n}) να ανήκουν στο $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. □

Παρατήρηση 2.6.5. Η προηγούμενη πρόταση είναι πολύ χρήσιμη αν θέλουμε να δείξουμε ότι μια ακολουθία (a_n) δεν συγκλίνει σε κανέναν πραγματικό αριθμό. Αρκεί να βρούμε δύο υπακολουθίες της (a_n) οι οποίες να έχουν διαφορετικά όρια.

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την $(a_n) = (-1)^n$. Τότε, $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \to 1$ και $a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1 \to -1$.

Ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Οι (a_{2n}) και (a_{2n-1}) είναι υπακολουθίες της (a_n), πρέπει λοιπόν να ισχύει $a_{2n} \to a$ και $a_{2n-1} \to a$. Από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n}) παίρνουμε $a = 1$ και από τη μοναδικότητα του ορίου της (a_{2n-1}) παίρνουμε $a = -1$. Δηλαδή, $1 = -1$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η (a_n) δεν συγκλίνει.

Το επόμενο θεώρημα παίζει πολύ ουσιαστικό ρόλο στη συνέχεια του μαθήματος.

Θεώρημα 2.6.6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει τουλάχιστον μία υπακολουθία που συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων. Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε, υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_1, c_1]$ στο οποίο ανήκουν όλοι οι όροι a_n.

Χωρίζουμε το $[b_1, c_1]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα που έχουν το ίδιο μήκος $\frac{c_1 - b_1}{2}$: τα $\left[b_1, \frac{b_1+c_1}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_1+c_1}{2}, c_1\right]$. Κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_2, c_2]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_1, c_1]$ έχουμε δείξει το εξής.

> Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_2, c_2] \subset [b_1, c_1]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος
> $$c_2 - b_2 = \frac{c_1 - b_1}{2}.$$

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: χωρίζουμε το $[b_2, c_2]$ σε δύο διαδοχικά διαστήματα μήκους $\frac{c_2-b_2}{2}$: τα $\left[b_2, \frac{b_2+c_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{b_2+c_2}{2}, c_2\right]$. Αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιο από αυτά τα δύο διαστήματα περιέχει άπειρους το πλήθος όρους της (a_n). Παίρνοντας σαν $[b_3, c_3]$ αυτό το υποδιάστημα του $[b_2, c_2]$ έχουμε δείξει το εξής.

> Υπάρχει κλειστό διάστημα $[b_3, c_3] \subset [b_2, c_2]$ το οποίο περιέχει άπειρους όρους της (a_n) και έχει μήκος
> $$c_3 - b_3 = \frac{c_2 - b_2}{2} = \frac{c_1 - b_1}{2^2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε ακολουθία $\big([b_m, c_m]\big)_{m\in\mathbb{N}}$ κλειστών διαστημάτων που ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $[b_{m+1}, c_{m+1}] \subset [b_m, c_m]$.

(ii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $c_m - b_m = (c_1 - b_1)/2^{m-1}$.

(iii) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν άπειροι όροι της (a_n) στο $[b_m, c_m]$.

Χρησιμοποιώντας την τρίτη συνθήκη, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) με την ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_{k_m} \in [b_m, c_m]$. Πράγματι, υπάρχει $k_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{k_1} \in [b_1, c_1]$ – για την ακρίβεια, όλοι οι όροι της (a_n) βρίσκονται στο $[b_1, c_1]$. Τώρα, αφού το $[b_2, c_2]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n), κάποιος από αυτούς έχει δείκτη μεγαλύτερο από k_1. Δηλαδή, υπάρχει $k_2 > k_1$ ώστε $a_{k_2} \in [b_2, c_2]$. Με τον ίδιο τρόπο, αν έχουν οριστεί $k_1 < \cdots < k_m$ ώστε $a_{k_s} \in [b_s, c_s]$ για κάθε $s = 1, \ldots, m$, μπορούμε να βρούμε $k_{m+1} > k_m$ ώστε $a_{k_{m+1}} \in [b_{m+1}, c_{m+1}]$ (διότι, το $[b_{m+1}, c_{m+1}]$ περιέχει άπειρους όρους της (a_n)). Έτσι, ορίζεται μια υπακολουθία (a_{k_m}) της (a_n) που ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι η (a_{k_m}) συγκλίνει. Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων (και λόγω της (ii)) υπάρχει μοναδικός $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ανήκει σε όλα τα κλειστά διαστήματα $[b_m, c_m]$. Θυμηθείτε ότι
$$\lim_{m\to\infty} b_m = a = \lim_{m\to\infty} c_m.$$
Αφού $b_m \leqslant a_{k_m} \leqslant c_m$ για κάθε m, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι $a_{k_m} \to a$. □

2.7 Βασικές ακολουθίες

Ο ορισμός της βασικής ακολουθίας έχει σαν αφετηρία την εξής παρατήρηση: ας υποθέσουμε ότι $a_n \to a$. Τότε, οι όροι της (a_n) είναι τελικά «κοντά» στο a, άρα είναι τελικά και «μεταξύ τους κοντά». Για να εκφράσουμε αυστηρά αυτή την παρατήρηση, ας θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geqslant n_0$ έχουμε
$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ορισμός 2.7.1. Μια ακολουθία (a_n) λέγεται *βασική ακολουθία* (ή *ακολουθία Cauchy*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$\text{αν } m, n \geqslant n_0(\varepsilon), \text{ τότε } \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Παρατήρηση 2.7.2. Αν η (a_n) είναι βασική ακολουθία, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\text{αν } n \geqslant n_0(\varepsilon), \text{ τότε } \quad |a_n - a_{n+1}| < \varepsilon.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν, από κάποιον δείκτη και πέρα, διαδοχικοί όροι είναι κοντά, δεν έπεται αναγκαστικά ότι η ακολουθία είναι βασική. Για παράδειγμα, θεωρήστε την

$$a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Τότε,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$$

όταν $n \to \infty$, όμως

$$|a_{2n} - a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to +\infty$$

όταν $n \to \infty$, απ᾽ όπου βλέπουμε ότι η (a_n) δεν είναι βασική ακολουθία. Πράγματι, αν η (a_n) ήταν βασική ακολουθία, θα έπρεπε (εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = 1$) για μεγάλα $n, m = 2n$ να ισχύει

$$|a_{2n} - a_n| < 1 \ \text{ δηλαδή } \ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} < 1,$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι βασική ακολουθία. Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα.

Πρόταση 2.7.3. *Κάθε βασική ακολουθία είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) βασική ακολουθία. Πάρτε $\varepsilon = 1 > 0$ στον ορισμό: υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a_m| < 1$ για κάθε $n, m \geqslant n_0$. Ειδικότερα, $|a_n - a_{n_0}| < 1$ για κάθε $n > n_0$. Δηλαδή,

$$|a_n| < 1 + |a_{n_0}| \quad \text{για κάθε} \quad n > n_0.$$

Θέτουμε $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a_{n_0}|\}$ και εύκολα επαληθεύουμε ότι

$$|a_n| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Πρόταση 2.7.4. *Αν μια βασική ακολουθία (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, τότε η (a_n) συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία και ότι η υπακολουθία (a_{k_n}) συγκλίνει στο $a \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a_n \to a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $a_{k_n} \to a$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_1$,

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η (a_n) είναι βασική ακολουθία, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n, m \geqslant n_2$

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Έστω $n \geqslant n_0$. Τότε $k_n \geqslant n \geqslant n_0 \geqslant n_1$, άρα

$$|a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επίσης $k_n, n \geqslant n_0 \geqslant n_2$, άρα

$$|a_{k_n} - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή, $|a_n - a| < \varepsilon$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $a_n \to a$. □

Θεώρημα 2.7.5. *Μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι βασική ακολουθία.*

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση αποδείχτηκε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου: αν υποθέσουμε ότι $a_n \to a$ και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, για κάθε $n, m \geqslant n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα, η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση: έστω (a_n) βασική ακολουθία. Από την Πρόταση 2.7.3, η (a_n) είναι φραγμένη. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, η (a_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Τέλος, από την Πρόταση 2.7.4 έπεται ότι η (a_n) συγκλίνει. □

Αυτό το κριτήριο σύγκλισης είναι πολύ χρήσιμο. Πολλές φορές θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ορίου για μια ακολουθία χωρίς να μας ενδιαφέρει η τιμή του ορίου. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι βασική, δηλαδή ότι οι όροι της είναι «κοντά» για μεγάλους δείκτες, κάτι που δεν απαιτεί να μαντέψουμε εκ των προτέρων ποιό είναι το όριο. Αντίθετα, για να δουλέψουμε με τον ορισμό του ορίου, πρέπει ήδη να ξέρουμε ποιό είναι το υποψήφιο όριο (συγκρίνετε τους δύο ορισμούς: «$a_n \to a$» και «(a_n) βασική ακολουθία».)

2.8 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

(γ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

(δ) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(ε) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

(στ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

(ζ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

(η) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ϑ) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.

(ι) Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ια) Αν η (a_n) συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή.

2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;

3. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\}\\
A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\}\\
A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\}\\
A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\}\\
A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant 2\}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, 5$ εξετάστε αν (α) το A_j είναι πεπερασμένο, (β) το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.

4. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n} \to 1.$$

5. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, αποδείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.

6. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

7. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\begin{aligned}
&\alpha_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad \gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n}, \qquad \delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\\
&\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n, \qquad \zeta_n = \frac{n^6}{6^n}, \qquad \eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \vartheta_n = \frac{\sin n}{n}\\
&\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad \rho_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, \qquad \sigma_n = \frac{n^2}{3n^2 + n + 1}\\
&\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

8. (α) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

9. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

10. Έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.

11. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.
(α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.
(β) Αποδείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.

12. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

13. Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.
Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

14. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

15. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αποδείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a.

16. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}), (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι:
(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.
(β) Η (a_n) συγκλίνει.

B′ Ομάδα

17. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{5^n + n}{6^n - n}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}, \qquad \gamma_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

$$\delta_n = n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}\right), \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(n^2\right)$$

$$\lambda_n = (-1)^n\frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \mu_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \vartheta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}.$$

18. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
b_n &= \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \\
\gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\
\delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}.
\end{aligned}$$

19. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a = \sup A$, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του A, αποδείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι *γνησίως αύξουσα*.

20. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Αποδείξτε ότι $b_n \to a$.

21. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \to a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to a \quad \text{και} \quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \to a.$$

22. Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = a$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{n} \to a.$$

23. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to a.$$

Αποδείξτε ότι $a_n \to a$.

24. Αποδείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

25. Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n} \\
\beta_n &= \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n} \\
\gamma_n &= \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}
\end{aligned}$$

26. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και
$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

27. Έστω (a_n), (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

28. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2},$$
δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική ακολουθία. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

29. Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει
$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geqslant 2.$$
Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

30. Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geqslant 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Γ′ Ομάδα

31. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

32. Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε
$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

33. Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

34. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \ldots$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η (α_n) είναι αύξουσα.

(β) $\alpha_n \to 1$.

35. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 3}{5}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

36. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
Αποδείξτε ότι η (x_n), τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

37. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι (a_n), (b_n) συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

38. Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n).]

39. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leqslant k\}$ είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

40. Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Αποδείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό q, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q .$$

41. (Λήμμα του Stoltz) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

42. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $0 < a_1 < 1$ και $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σειρές πραγματικών αριθμών

3.1 Σύγκλιση σειράς

Ορισμός 3.1.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n.$$

Δηλαδή,

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad \ldots$$

Περιγραφικά, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ για να δηλώσουμε την «πρόθεσή» μας να προσθέσουμε τους $a_1, a_2, \ldots$ με «τη σειρά που μας έχουν δοθεί». Θα λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι η *σειρά* με όρους a_k. Το άθροισμα $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ είναι το *n-οστό μερικό άθροισμα* της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και η (s_n) είναι η *ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Αν η (s_n) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s, τότε γράφουμε

$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{ή} \quad s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

και λέμε ότι η σειρά *συγκλίνει* (στο s), το δε όριο $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ είναι το *άθροισμα* της σειράς.

Αν $s_n \to +\infty$ ή αν $s_n \to -\infty$, τότε γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ ή $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ και λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει στο* $+\infty$ *ή στο* $-\infty$ αντίστοιχα.

Αν η (s_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, τότε λέμε ότι *η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει*.

Παρατηρήσεις 3.1.2. (α) Πολλές φορές εξετάζουμε τη σύγκλιση σειρών της μορφής $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ή $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ όπου $m \geqslant 2$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $s_{n+1} = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ ή $s_{n-m+1} = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$ (για $n \geqslant m$) αντίστοιχα, και εξετάζουμε τη σύγκλιση της ακολουθίας (s_n).

(β) Από τους ορισμούς που δώσαμε είναι φανερό ότι για να εξετάσουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας σειράς, απλώς εξετάζουμε τη σύγκλιση ή απόκλιση μιας ακολουθίας (της ακολουθίας (s_n) των μερικών αθροισμάτων της σειράς). Ο n-οστός όμως όρος της ακολουθίας (s_n) είναι ένα «άθροισμα με ολοένα αυξανόμενο μήκος», το οποίο αδυνατούμε (συνήθως) να γράψουμε σε κλειστή μορφή. Συνεπώς, η εύρεση του ορίου $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ (όταν αυτό υπάρχει) είναι πολύ συχνά ανέφικτη. Σκοπός μας είναι λοιπόν να αναπτύξουμε κάποια κριτήρια τα οποία να μας επιτρέπουν (τουλάχιστον) να πούμε αν η (s_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό ή όχι.

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, θα δούμε κάποιες απλές προτάσεις που θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα στη συνέχεια.

Αν έχουμε δύο σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, μπορούμε να σχηματίσουμε το γραμμικό συνδυασμό τους $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$, όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 3.1.3. *Αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$, *τότε*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k. \tag{3.1.1}$$

Απόδειξη. Αν $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)$ είναι τα n-οστά μερικά αθροίσματα των σειρών, τότε $u_n = \lambda s_n + \mu t_n$. Αυτό προκύπτει εύκολα από τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, αφού έχουμε αθροίσματα με πεπερασμένους το πλήθος όρους. Όμως, $s_n \to s$ και $t_n \to t$, άρα $u_n \to \lambda s + \mu t$. Από τον ορισμό του αθροίσματος σειράς έπεται η (3.1.1). □

Πρόταση 3.1.4. (α) *Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος «αρχικών» όρων μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλισή της.*

(β) *Αν αλλάξουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους μιας σειράς, δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή απόκλισή της.*

Απόδειξη. (α) Θεωρούμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Με τη φράση «απαλείφουμε τους αρχικούς όρους $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$» εννοούμε ότι θεωρούμε την καινούργια σειρά $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Αν συμβολίσουμε με s_n και t_n τα n-οστά μερικά αθροίσματα των δύο σειρών αντιστοίχως, τότε για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m + \cdots + a_n = a_1 + \cdots + a_{m-1} + t_{n-m+1}. \tag{3.1.2}$$

Άρα η (s_n) συγκλίνει αν και μόνον αν η (t_{n-m+1}) συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνον αν η (t_n) συγκλίνει. Επίσης, αν $s_n \to s$ και $t_n \to t$, τότε $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + t$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{m-1} + \sum_{k=m}^{\infty} a_k. \tag{3.1.3}$$

(β) Θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Αλλάζουμε πεπερασμένους το πλήθος όρους της (a_k). Θεωρούμε δηλαδή μια νέα σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ που όμως έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $a_k = b_k$ για κάθε $k \geqslant m$. Αν απαλείψουμε τους πρώτους $m-1$ όρους των δύο σειρών, προκύπτει η ίδια σειρά $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$. Τώρα, εφαρμόζουμε το (α). □

Πρόταση 3.1.5. (α) *Αν* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$, *τότε* $a_n \to 0$.

(β) *Αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει, τότε για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *ώστε: για κάθε* $n \geqslant N$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon.$$

Απόδειξη. (α) Αν $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, τότε $s_n \to s$ και $s_{n-1} \to s$. Άρα,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

Στην πραγματικότητα, αυτό που κάνουμε εδώ είναι να θεωρήσουμε μια δεύτερη ακολουθία (t_n) η οποία ορίζεται ως εξής: δίνουμε αυθαίρετη τιμή στον t_1 – για παράδειγμα, $t_1 = 0$ – και για κάθε $n \geqslant 2$ θέτουμε $t_n = s_{n-1}$. Τότε, $t_n \to s$ (άσκηση) και για κάθε $n \geqslant 2$ έχουμε $a_n = s_n - t_n \to s - s = 0$ (εξηγήστε την πρώτη ισότητα).

Ένας άλλος τρόπος για να αποδείξουμε ότι $a_n \to 0$ είναι με τον ορισμό. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $n \geqslant n_1$. Θέτουμε $n_0 = n_1 + 1$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $n \geqslant n_1$ και $n - 1 \geqslant n_1$. Συνεπώς, $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2}$, απ' όπου έπεται ότι

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leqslant |s_n - s| + |s - s_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. Με βάση τον ορισμό, $a_n \to 0$.

(β) Αν $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$, τότε από την (3.1.3) έχουμε

$$\beta_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = s - s_n \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Από τον ορισμό του ορίου ακολουθίας, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant N$, $|\beta_n| < \varepsilon$. □

Σημείωση. Το μέρος (α) της Πρότασης 3.1.5 χρησιμοποιείται σαν *κριτήριο απόκλισης*: Αν η ακολουθία (a_k) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αναγκαστικά αποκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Η *γεωμετρική σειρά* με λόγο $x \in \mathbb{R}$ είναι η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k. \tag{3.1.4}$$

Δηλαδή $a_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Αν $x = 1$ τότε $s_n = n + 1$, ενώ αν $x \neq 1$ έχουμε

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}. \tag{3.1.5}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $|x| \geqslant 1$ τότε $|a_k| = |x|^k \geqslant 1$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Από την Πρόταση 3.1.5 (α) βλέπουμε ότι η σειρά (3.1.4) αποκλίνει.

(ii) Αν $|x| < 1$ τότε $x^{n+1} \to 0$, οπότε η (3.1.5) δείχνει ότι $s_n \to \frac{1}{1-x}$. Δηλαδή,

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

(β) *Τηλεσκοπικές σειρές.* Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (a_k) ικανοποιεί την

$$a_k = b_k - b_{k+1}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου (b_k) μια άλλη ακολουθία. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (b_k) συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1},$$

οπότε $b_n \to b$ αν και μόνον αν $s_n \to b_1 - b$.

Σαν παράδειγμα θεωρούμε τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Τότε,

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1},$$

όπου $b_k = \frac{1}{k}$. Άρα,

$$\begin{aligned} s_n = a_1 + \cdots + a_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Θεώρημα 3.1.6 (κριτήριο Cauchy). *Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $N \leqslant m < n$ τότε*

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Αν $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς, η σειρά συγκλίνει αν και μόνον αν η (s_n) συγκλίνει. Δηλαδή, αν και μόνον αν η (s_n) είναι βασική ακολουθία. Αυτό όμως είναι (από τον ορισμό της βασικής ακολουθίας) ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $N \leqslant m < n$,

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |(a_1 + \cdots + a_n) - (a_1 + \cdots + a_m)| = |s_n - s_m| < \varepsilon. \qquad \square$$

3.2 Σειρές με μη αρνητικούς όρους

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε τη σύγκλιση ή απόκλιση σειρών με μη αρνητικούς όρους. Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν για την ακολουθία (a_k) έχουμε $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι αύξουσα: πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$s_{n+1} - s_n = (a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}) - (a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1} \geqslant 0.$$

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω (a_k) ακολουθία με $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνον αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.*

Απόδειξη. Η (s_n) είναι αύξουσα ακολουθία. Αν είναι άνω φραγμένη τότε συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό, άρα η σειρά συγκλίνει. Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε, αφού είναι αύξουσα, έχουμε $s_n \to +\infty$. □

Πρόταση 3.2.2 (αρμονική σειρά). *Η **αρμονική σειρά** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε με επαγωγή ότι

$$s_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.1}$$

Για $n = 1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$. Υποθέτουμε ότι η (3.2.1) ισχύει για κάποιο φυσικό n. Τότε,

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο $s_{2^{n+1}} - s_{2^n}$ είναι ένα άθροισμα 2^n το πλήθος αριθμών και ότι ο μικρότερος από αυτούς είναι ο $\frac{1}{2^{n+1}}$. Συνεπώς,

$$s_{2^{n+1}} \geqslant s_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = s_{2^n} + \frac{1}{2} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}.$$

Άρα, η (3.2.1) ισχύει για τον φυσικό $n + 1$.

Έστω τώρα $M > 0$. Υπάρχει φυσικός n_1 τέτοιος ώστε $1 + \frac{n_1}{2} > M$. Θέτουμε $n_0 = 2^{n_1}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$s_n \geqslant s_{n_0} = s_{2^{n_1}} \geqslant 1 + \frac{n_1}{2} > M.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $s_n \to +\infty$. □

Παρατήρηση 3.2.3. Το παράδειγμα της αρμονικής σειράς δείχνει ότι το αντίστροφο της Πρότασης 3.1.5 (α) δεν ισχύει. Αν $a_k \to 0$ τότε δεν είναι απαραίτητα σωστό ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3.2.1 Σειρές με φθίνοντες μη αρνητικούς όρους

Πολλές φορές συναντάμε σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ των οποίων οι όροι a_k *φθίνουν* προς το 0: $a_{k+1} \leqslant a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $a_k \to 0$. Ένα κριτήριο σύγκλισης που εφαρμόζεται συχνά σε τέτοιες περιπτώσεις είναι το *κριτήριο συμπύκνωσης*.

Πρόταση 3.2.4 (κριτήριο συμπύκνωσης - Cauchy)**.** *Έστω (a_k) μια φθίνουσα ακολουθία με $a_k > 0$ και $a_k \to 0$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Τότε, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$t_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

είναι άνω φραγμένη. Έστω M ένα άνω φράγμα της (t_n). Θα δείξουμε ότι ο M είναι άνω φράγμα για τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Έστω $s_m = a_1 + \cdots + a_m$. Ο αριθμός m βρίσκεται ανάμεσα σε δύο διαδοχικές δυνάμεις του 2: υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^n \leqslant m < 2^{n+1}$. Τότε, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} s_m &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\qquad + (a_{2^n} + \cdots + a_m) \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^{n-1}} + \cdots + a_{2^n - 1}) \\ &\qquad + (a_{2^n} + \cdots + a_m + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^{n-1} a_{2^{n-1}} + 2^n a_{2^n} \\ &\leqslant M. \end{aligned}$$

Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ έχει μη αρνητικούς όρους και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 3.2.1 δείχνει ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δηλαδή ότι η (s_m) είναι άνω φραγμένη: υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $s_m \leqslant M$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για το τυχόν μερικό άθροισμα (t_n) της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ έχουμε

$$\begin{aligned} t_n &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} \\ &\leqslant 2a_1 + 2a_2 + 2(a_3 + a_4) + \cdots + 2(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}) \\ &= 2s_{2^n} \leqslant 2M. \end{aligned}$$

Αφού η (t_n) είναι άνω φραγμένη, το Θεώρημα 3.2.1 δείχνει ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα 3.2.5 (p-σειρές)**.** Η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, όπου $p>0$. Έχουμε $a_k = \frac{1}{k^p}$. Αφού $p>0$, η (a_k) φθίνει προς το 0. Θεωρούμε την

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{2^{p-1}}\Big)^k.$$

Η τελευταία σειρά είναι γεωμετρική σειρά με λόγο $x_p = \frac{1}{2^{p-1}}$ Είδαμε ότι συγκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$, δηλαδή αν $p>1$ και αποκλίνει αν $x_p = \frac{1}{2^{p-1}} \geqslant 1$, δηλαδή αν $p \leqslant 1$.

Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ συγκλίνει αν $p>1$ και αποκλίνει στο $+\infty$ αν $0<p\leqslant 1$.

3.2.2 Ο αριθμός e

Έχουμε ορίσει τον αριθμό e ως το όριο της γνησίως αύξουσας και άνω φραγμένης ακολουθίας $\alpha_n := \big(1+\frac{1}{n}\big)^n$ καθώς το $n\to\infty$.

Πρόταση 3.2.6. *Ο αριθμός e ικανοποιεί την*

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $0! = 1$. Γράφουμε s_n για το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς στο δεξιό μέλος:

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Από το διωνυμικό ανάπτυγμα, έχουμε

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\ &\qquad + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big[\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big)\Big]\\ &\leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\alpha_n \leqslant s_n. \tag{3.2.2}$$

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι αν $k>n$ τότε

$$\begin{aligned}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big[\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{k}\Big)\Big]\\ &\qquad + \cdots + \frac{1}{k!}\Big[\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{k-1}{k}\Big)\Big]\\ &\geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{k}\Big) + \cdots + \frac{1}{n!}\Big[\Big(1-\frac{1}{k}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{k}\Big)\Big].\end{aligned}$$

Κρατώντας το n σταθερό και αφήνοντας το $k \to \infty$, βλέπουμε ότι

$$e = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \geqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = s_n.$$

Αφού η αύξουσα ακολουθία (s_n) είναι άνω φραγμένη από τον e, έπεται ότι η (s_n) συγκλίνει και $\lim\limits_{n\to\infty} s_n \leqslant e$. Από την άλλη πλευρά, η (3.2.2) δείχνει ότι $e = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. Άρα,

$$e = \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

όπως ισχυρίζεται η πρόταση. □

Χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση του e, θα δείξουμε ότι είναι άρρητος αριθμός.

Πρόταση 3.2.7. *Ο e είναι άρρητος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο e είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$e = \frac{m}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(n+s)!} + \cdots\right). \tag{3.2.3}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (3.2.3) με $n!$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} 0 < A = n! \left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right] \\ = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots . \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, από τον τρόπο ορισμού του, ο

$$A = n! \left[\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)\right]$$

είναι φυσικός αριθμός. Όμως, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} &\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^s} \\ &< \frac{2}{3} + \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+1)\cdots(n+s)} + \cdots \leqslant \frac{11}{12}.$$

Έπεται ότι ο φυσικός αριθμός A ικανοποιεί την

$$0 < A \leqslant \frac{11}{12}$$

και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

3.3 Γενικά κριτήρια

3.3.1 Απόλυτη σύγκλιση σειράς

Ορισμός 3.3.1. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως* αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει *υπό συνθήκη* αν συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την (απλή) σύγκλιση.

Πρόταση 3.3.2. *Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιείται το κριτήριο Cauchy (Θεώρημα 3.1.6). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $N \leqslant m < n$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $N \leqslant m < n$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Άρα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ικανοποιεί το κριτήριο Cauchy. Από το Θεώρημα 3.1.6, συγκλίνει. □

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ συγκλίνει. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι συγκλίνει απολύτως: έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

και η τελευταία σειρά συγκλίνει (είναι της μορφής $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ με $p = 2 > 1$).

(β) Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ δεν συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

(αρμονική σειρά). Μπορούμε όμως να δείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει υπό συνθήκη. Θεωρούμε πρώτα το μερικό άθροισμα

$$\begin{aligned} s_{2m} &= \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m} \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)2m}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι
$$s_{2m+2} = s_{2m} + \frac{1}{(2m+1)(2m+2)} > s_{2m},$$
δηλαδή, η υπακολουθία (s_{2m}) είναι γνησίως αύξουσα. Παρατηρούμε επίσης ότι η (s_{2m}) είναι άνω φραγμένη, αφού

$$s_{2m} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)^2}, \tag{3.3.1}$$

και το δεξιό μέλος της (3.3.1) φράσσεται από το $(2m-1)$-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ η οποία συγκλίνει. Άρα, η υπακολουθία (s_{2m}) συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Τότε,
$$s_{2m-1} = s_{2m} + \frac{1}{2m} \to s + 0 = s.$$
Αφού οι υπακολουθίες (s_{2m}) και (s_{2m-1}) των άρτιων και των περιττών όρων της (s_m) συγκλίνουν στον s, συμπεραίνουμε ότι $s_n \to s$.

3.3.2 Κριτήρια σύγκρισης

Θεώρημα 3.3.3 (κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει* $M > 0$ *ώστε*
$$|a_k| \leqslant M \cdot b_k$$
για κάθε $k \in \mathbb{N}$ *και ότι η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Θέτουμε $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$ και $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$. Από την υπόθεση έπεται ότι
$$s_n \leqslant M \cdot t_n$$
για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, η ακολουθία (t_n) είναι άνω φραγμένη. Άρα, η (s_n) είναι κι αυτή άνω φραγμένη. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. □

Θεώρημα 3.3.4 (οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, *όπου* $b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Υποθέτουμε ότι*
$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in \mathbb{R}$$
και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει. Τότε, η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε
$$\left|\frac{a_k}{b_k}\right| \leqslant M$$
για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.3. □

Θεώρημα 3.3.5 (ισοδύναμη συμπεριφορά). *Θεωρούμε τις σειρές* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$*, όπου* $a_k, b_k > 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$*. Υποθέτουμε ότι*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell > 0.$$

Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το Θεώρημα 3.3.4.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αφού $\frac{a_k}{b_k} \to \ell > 0$, έχουμε $\frac{b_k}{a_k} \to \frac{1}{\ell}$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των (a_k) και (b_k), βλέπουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 3.3.5. □

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left|\frac{\sin(kx)}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, συμπεραίνουμε (από το κριτήριο σύγκρισης) ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$. Παρατηρούμε ότι αν $a_k = \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ και $b_k = \frac{1}{k^3}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4+k^3}{k^4+k^2+3} \to 1.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ συγκλίνει, το οριακό κριτήριο σύγκρισης δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^4+k^2+3}$ συγκλίνει.

(γ) Τέλος, εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τις ακολουθίες $b_k = \frac{k+1}{k^2+2}$ και $a_k = \frac{1}{k}$, τότε

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^2+2}{k^2+k} \to 1 > 0.$$

Από το Θεώρημα 3.3.5 έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2+2}$ έχει την ίδια συμπεριφορά με την $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

3.3.3 Κριτήριο λόγου και κριτήριο ρίζας

Θεώρημα 3.3.6 (κριτήριο λόγου - D' Alembert). *Έστω* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *μια σειρά με μη μηδενικούς όρους.*

(α) *Αν* $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$*, τότε η* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν* $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$*, τότε η* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *αποκλίνει.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \ell < 1$. Έστω $x > 0$ με $\ell < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε: $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leqslant x$ γιά κάθε $k \geqslant N$. Δηλαδή,

$$|a_{N+1}| \leqslant x|a_N|, \quad |a_{N+2}| \leqslant x|a_{N+1}| \leqslant x^2|a_N| \quad \text{κλπ.}$$

Επαγωγικά δείχνουμε ότι

$$|a_k| \leqslant x^{k-N}|a_N| = \frac{|a_N|}{x^N}\cdot x^k$$

γιά κάθε $k \geqslant N$.

Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty}x^k$. Έχουμε

$$|a_k| \leqslant M\cdot x^k$$

για κάθε $k \geqslant N$, όπου $M = \frac{|a_N|}{x^N}$. Η σειρά $\sum\limits_{k=N}^{\infty}x^k$ συγκλίνει, διότι προέρχεται από την γεωμετρική σειρά $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$ (με απαλοιφή των πρώτων όρων της) και $0 < x < 1$. Άρα, η $\sum\limits_{k=N}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$ συγκλίνει κι αυτή.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geqslant 1$ για κάθε $k \geqslant N$. Δηλαδή,

$$|a_k| \geqslant |a_{k-1}| \geqslant \cdots \geqslant |a_N| > 0$$

για κάθε $k \geqslant N$. Τότε, $a_k \not\to 0$ και, από την Πρόταση 3.1.5 (α), η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$. Παρατηρήστε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k}{k+1} \to 1$, ενώ η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει και $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$.

Παράδειγμα

Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Έχουμε

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1.$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει.

Θεώρημα 3.3.7 (κριτήριο ρίζας - Cauchy). *Έστω $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ μια σειρά πραγματικών αριθμών.*

(α) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει απολύτως.*

(β) *Αν $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.*

Απόδειξη (α) Επιλέγουμε $x > 0$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < x < 1$. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \leqslant x$ για κάθε $k \geqslant N$. Ισοδύναμα,

$$|a_k| \leqslant x^k$$

για κάθε $k \geqslant n$. Συγκρίνουμε τις σειρές $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ και $\sum\limits_{k=N}^{\infty} x^k$. Αφού $x < 1$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει. Άρα η $\sum\limits_{k=N}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει. Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αφού $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 1$ για κάθε $k \geqslant N$. Δηλαδή, $|a_k| \geqslant 1$ τελικά. Άρα $a_k \not\to 0$ και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. □

Σημείωση. Αν $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, πρέπει να εξετάσουμε αλλιώς τη σύγκλιση ή απόκλιση της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Για τις $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$. Η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Παραδείγματα

(α) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{\sqrt[k]{k}} \to |x|$. Αν $|x| < 1$, τότε $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| < 1$ και η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| > 1$, τοτε $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x| > 1$ και η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| = 1$, το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ η οποία αποκλίνει. Για $x = -1$ παίρνουμε την «εναλλάσσουσα σειρά» $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ η οποία συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1 \leqslant x < 1$.

(β) Εξετάζουμε τη σύγκλιση της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{x^2}{\sqrt[k]{k^2}} \to x^2$. Άρα, $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = x^2$. Αν $|x| > 1$ η σειρά αποκλίνει. Αν $|x| < 1$ η σειρά συγκλίνει απολύτως. Αν $|x| = 1$ το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα. Στην περίπτωση $x = \pm 1$ η σειρά παίρνει τη μορφή $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, δηλαδή συγκλίνει. Άρα, η σειρά συγκλίνει απολύτως όταν $|x| \leqslant 1$.

3.3.4 Το κριτήριο του Dirichlet

Το κριτήριο του Dirichlet εξασφαλίζει (μερικές φορές) τη σύγκλιση μιας σειράς η οποία δεν συγκλίνει απολύτως (συγκλίνει υπό συνθήκη).

Λήμμα 3.3.8 (άθροιση κατά μέρη - Abel). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες. Ορίζουμε $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $s_0 = 0$. Για κάθε $1 \leqslant m < n$, ισχύει η ισότητα*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=m}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^{n} s_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} s_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m,\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.3.9 (κριτήριο Dirichlet). *Έστω (a_k) και (b_k) δύο ακολουθίες με τις εξής ιδιότητες:*
(α) *Η (b_k) έχει θετικούς όρους και φθίνει προς το 0.*
(β) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ της (a_k) είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε*

$$|s_n| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (α), βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{\varepsilon}{2M} > b_N \geqslant b_{N+1} \geqslant b_{N+2} \geqslant \cdots > 0.$$

Άν $N \leqslant m < n$, τότε

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\ &\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n| + |s_{m-1}||b_m| \\ &\leqslant M \sum_{k=m}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) + M b_n + M b_m \\ &= 2M b_m < 2M \frac{\varepsilon}{2M} \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

Πόρισμα 3.3.10 (κριτήριο Leibniz). *Έστω (b_k) φθίνουσα ακολουθία τέτοια ώστε $b_k \to 0$. Τότε, η σειρά με εναλλασσόμενα πρόσημα*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} b_k$$

συγκλίνει.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο Dirichlet για την (b_k) και την $a_k = (-1)^{k-1}$. Τα μερικά αθροίσματα της $((-1)^{k-1})$ είναι φραγμένα, αφού $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος και $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός. Άρα, η σειρά συγκλίνει. □

Για παράδειγμα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ (ενώ δεν συγκλίνει απολύτως).

3.4 *Δεκαδική παράσταση πραγματικών αριθμών

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση: είναι δηλαδή άθροισμα σειράς της μορφής

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots ,$$

όπου $a_0 \in \mathbb{Z}$ και $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geqslant 1$.

Παρατηρήστε ότι κάθε σειρά αυτής της μορφής συγκλίνει και ορίζει έναν πραγματικό αριθμό $x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$. Πράγματι, η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ συγκλίνει και επειδή $0 \leqslant \frac{a_k}{10^k} \leqslant \frac{9}{10^k}$ για κάθε $k \geqslant 1$, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ συγκλίνει σύμφωνα με το κριτήριο σύγκρισης σειρών.

Λήμμα 3.4.1. *Αν $N \geqslant 1$ και $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geqslant N$, τότε*

$$0 \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \frac{1}{10^{N-1}}.$$

Η αριστερή ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 0$ για κάθε $k \geqslant N$, ενώ η δεξιά ανισότητα ισχύει σαν ισότητα αν και μόνον αν $a_k = 9$ για κάθε $k \geqslant N$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{0}{10^k} = 0.$$

Αν $a_k = 0$ για κάθε $k \geqslant N$, τότε $\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = 0$. Αντίστροφα, αν $a_m \geqslant 1$ για κάποιον $m \geqslant N$, τότε

$$\begin{aligned} \sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \geqslant \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{0}{10^k} \\ &= \frac{1}{10^m} > 0. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^N} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots \right) = \frac{1}{10^{N-1}}.$$

Αν $a_k = 9$ για κάθε $k \geqslant N$, τότε

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^{N-1}}.$$

Αντίστροφα, αν $a_m \leqslant 8$ για κάποιον $m \geqslant N$, τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} &= \frac{a_m}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \\
&\leqslant \frac{8}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10^m} - \frac{1}{10^m} + \sum_{\substack{k=N \\ k\neq m}}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \sum_{k=N}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= -\frac{1}{10^m} + \frac{1}{10^{N-1}} \\
&< \frac{1}{10^{N-1}},
\end{aligned}$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Λήμμα 3.4.2. *Έστω n μη αρνητικός ακέραιος και έστω $N \geqslant 0$. Υπάρχουν ακέραιοι $p_0, p_1, \dots p_n$ τέτοιοι ώστε:*

(i) $p_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ *για* $0 \leqslant k \leqslant N-1$,

(ii) $p_N \geqslant 0$ *και*

$$n = 10^N p_N + 10^{N-1} p_{N-1} + \cdots + 10 p_1 + p_0.$$

Απόδειξη. Διαιρώντας διαδοχικά με 10 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0, \quad \text{όπου} \quad 0 \leqslant p_0 \leqslant 9 \quad \text{και} \quad q_1 \geqslant 0 \\
q_1 &= 10q_2 + p_1, \quad \text{όπου} \quad 0 \leqslant p_1 \leqslant 9 \quad \text{και} \quad q_2 \geqslant 0 \\
q_2 &= 10q_3 + p_2, \quad \text{όπου} \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant 9 \quad \text{και} \quad q_3 \geqslant 0 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
q_{N-1} &= 10p_N + p_{N-1}, \quad \text{όπου} \quad 0 \leqslant p_{N-1} \leqslant 9 \quad \text{και} \quad q_N \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Επαγωγικά, έχουμε:

$$\begin{aligned}
n &= 10q_1 + p_0 = 10^2 q_2 + 10p_1 + p_0 = 10^3 q_3 + 10^2 p_2 + 10 p_1 + p_0 = \cdots \\
&= 10^N q_N + 10^{N-1} p_{N-1} + 10p_1 + p_0.
\end{aligned}$$

Θέτοντας $p_N = q_N$ έχουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας τα δύο προηγούμενα λήμματα θα δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός έχει δεκαδική παράσταση.

Θεώρημα 3.4.3. (α) *Κάθε πραγματικός αριθμός $x \geqslant 0$ γράφεται σαν άθροισμα «δεκαδικής σειράς»:*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots,$$

όπου $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ για κάθε $k \geqslant 1$. Τότε, λέμε ότι ο x έχει τη δεκαδική παράσταση $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$.

(β) *Οι αριθμοί της μορφής $x = \frac{m}{10^N}$ όπου $m \in \mathbb{N}$ και $N \geqslant 0$ έχουν ακριβώς δύο δεκαδικές παραστάσεις:*

$$x = a_0.a_1a_2\cdots a_N 9999\cdots = a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)000\cdots$$

Όλοι οι άλλοι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί έχουν μοναδική δεκαδική παράσταση.

Απόδειξη. (α) Έστω $x \geqslant 0$. Υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a_0, το ακέραιο μέρος του x, ώστε:

$$a_0 \leqslant x < a_0 + 1.$$

Χωρίζουμε το διάστημα $[a_0, a_0 + 1)$ σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά. Άρα, υπάρχει $a_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

Χωρίζουμε το νέο αυτό διάστημα (που έχει μήκος $\frac{1}{10}$) σε 10 ίσα υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{10^2}$. Ο x ανήκει σε ένα από αυτά, άρα υπάρχει $a_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, για κάθε $k \geqslant 1$ βρίσκουμε $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ώστε

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_k + 1}{10^k}.$$

Από την κατασκευή, τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$ η οποία δημιουργείται, ικανοποιούν την $s_n \leqslant x < s_n + \frac{1}{10^n}$. Άρα,

$$0 \leqslant x - s_n < \frac{1}{10^n}.$$

Έπεται ότι $s_n \to x$, δηλαδή

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}.$$

(β) Ας υποθέσουμε ότι κάποιος $x \geqslant 0$ έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές δεκαδικές παραστάσεις. Δηλαδή,

$$x = a_0.a_1a_2\cdots = b_0.b_1b_2\cdots,$$

όπου $a_0, b_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k, b_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ για κάθε $k \geqslant 1$, και υπάρχει $m \geqslant 0$ με την ιδιότητα $a_m \neq b_m$.

Έστω $N \geqslant 0$ ο ελάχιστος m για τον οποίο $a_m \neq b_m$. Δηλαδή,

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots,\ a_{N-1} = b_{N-1},\ a_N \neq b_N.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $a_N < b_N$. Από την

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{b_k}{10^k}$$

και από το Λήμμα 3.4.1 έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10^N} &\leqslant \frac{b_N - a_N}{10^N} \\
&= \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} - \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{b_k}{10^k} \\
&\leqslant \frac{1}{10^N} - 0 \\
&= \frac{1}{10^N}.
\end{aligned}$$

Άρα, όλες οι ανισότητες είναι ισότητες. Δηλαδή,

$$b_N - a_N = 1$$

και
$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}=\frac{1}{10^N},\qquad \sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{b_k}{10^k}=0.$$
Από το Λήμμα 3.4.1,
$$\begin{aligned} b_N &= a_N+1,\\ a_k &= 9,\ \text{αν } k\geqslant N+1,\\ b_k &= 0,\ \text{αν } k\geqslant N+1.\end{aligned}$$
Άρα, αν ο x έχει περισσότερες από μία δεκαδικές παραστάσεις, τότε έχει ακριβώς δύο παραστάσεις, τις ακόλουθες:
$$x=a_0.a_1a_2\cdots a_N999\cdots = a_0.a_1a_2\cdots a_{N-1}(a_N+1)\ 00\cdots$$
Τότε, ο x ισούται με
$$\begin{aligned} x &= a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{10^{N-1}}+\frac{a_N+1}{10^N}\\ &= \frac{10^Na_0+10^{N-1}a_1+\cdots+10a_{N-1}+a_N+1}{10^N}\\ &= \frac{m}{10^N}\end{aligned}$$
για κάποιους $m\in\mathbb{N}$ και $N\geqslant 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι $x=\frac{m}{10^N}$, όπου $m\in\mathbb{N}$ και $N\geqslant 0$. Από το Λήμμα 3.4.2 μπορούμε να γράψουμε
$$m=10^Np_N+10^{N-1}p_{N-1}+\cdots+10p_1+p_0,$$
όπου $p_N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $p_k\in\{0,1,\dots,9\}$ για $0\leqslant k\leqslant N-1$. Αν p_m είναι ο πρώτος μη μηδενικός όρος της ακολουθίας $p_0,p_1,\dots,p_{N-1},p_N$, τότε
$$\begin{aligned} x &= \frac{10^Np_N+\cdots+10^mp_m}{10^N}\\ &= p_N+\frac{p_{N-1}}{10}+\cdots+\frac{p_m}{10^{N-m}}\\ &= p_N.p_{N-1}\cdots p_m000\cdots = p_N.p_{N-1}\cdots(p_m-1)\ 99\cdots.\end{aligned}$$
Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του (β). □

3.5 Δυναμοσειρές

Ορισμός 3.5.1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η σειρά
$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$
λέγεται *δυναμοσειρά* με συντελεστές a_k.

Ο x είναι μια παράμετρος από το $\mathbb{R}$. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε εδώ είναι: για δοθείσα ακολουθία συντελεστών (a_k) να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες η αντίστοιχη δυναμοσειρά συγκλίνει. Για κάθε τέτοιο x λέμε ότι *η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* x.

Πρόταση 3.5.2. *Έστω* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ *μια δυναμοσειρά με συντελεστές* a_k.

(α) *Αν η δυναμοσειρά συγκλίνει στο* $y\neq 0$ *και αν* $|x|<|y|$, *τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο* x.

(β) *Αν η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* y *και αν* $|x|>|y|$, *τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο* x.

Απόδειξη. (α) Αφού η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k y^k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k y^k \to 0$. Άρα, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|a_k y^k| \leqslant 1 \quad \text{για κάθε } k \geqslant N.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}$ με $|x| < |y|$. Για κάθε $k \geqslant N$ έχουμε

$$|a_k x^k| = |a_k y^k| \cdot \left|\frac{x}{y}\right|^k \leqslant \left|\frac{x}{y}\right|^k.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=N}^{\infty} \left|\frac{x}{y}\right|^k$ συγκλίνει, διότι $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$. Από το κριτήριο σύγκρισης έπεται το συμπέρασμα.

(β) Αν η δυναμοσειρά συνέκλινε στο x, από το (α) θα συνέκλινε απολύτως στο y, άτοπο. □

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Με βάση την Πρόταση 3.5.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το σύνολο των σημείων στα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι «ουσιαστικά» ένα διάστημα συμμετρικό ως προς το 0 (ή, ενδεχομένως, το $\{0\}$ ή το $\mathbb{R}$). Αυτό φαίνεται ως εξής: ορίζουμε

$$R := \sup\{|x| : \text{ η δυναμοσειρά συγκλίνει στο } x\}.$$

Το σύνολο στο δεξιό μέλος είναι μη κενό, αφού η δυναμοσειρά συγκλίνει στο 0. Η Πρόταση 3.5.2 δείχνει ότι αν $|x| < R$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x. Πράγματι, από τον ορισμό του R υπάρχει y με $R \geqslant |y| > |x|$ ώστε η δυναμοσειρά να συγκλίνει στο y, οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 3.5.2 (α) στο x. Από τον ορισμό του R είναι φανερό ότι αν $|x| > R$ τότε η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x. Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει σε κάθε x με $|x| > R$.

Το διάστημα $(-R, R)$ ονομάζεται *διάστημα σύγκλισης* της δυναμοσειράς. Η συζήτηση που κάναμε δείχνει ότι το *σύνολο σύγκλισης* της δυναμοσειράς, δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων στα οποία συγκλίνει, προκύπτει από το $(-R, R)$ με την προσθήκη (ίσως) του R ή του $-R$ ή των $\pm R$. Στην περίπτωση που $R = +\infty$, η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε $x \in R$. Στην περίπτωση που $R = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο στο σημείο $x = 0$.

Το πρόβλημα είναι λοιπόν τώρα το εξής: πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε την *ακτίνα σύγκλισης* μιας δυναμοσειράς συναρτήσει των συντελεστών της. Μια απάντηση μας δίνει το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές a_k. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$ με τη σύμβαση ότι $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$.*

(α) Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.

(β) Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο της ρίζας για τη σύγκλιση σειρών. Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση $0 < a < +\infty$ (οι περιπτώσεις $a = 0$ και $a = +\infty$ αφήνονται σαν άσκηση).

(α) Αν $|x| < R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = |x| \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = |x|a = \frac{|x|}{R} < 1.$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Αν $|x| > R$ τότε

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k x^k|} = \frac{|x|}{R} > 1.$$

Από το κριτήριο της ρίζας, η $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ αποκλίνει. □

Παρατήρηση 3.5.4. Το Θεώρημα 3.5.3 δεν μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως τις συμβαίνει στα «άκρα $\pm R$ του διαστήματος σύγκλισης». Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, μπορεί η δυναμοσειρά να συγκλίνει σε ένα, σε κανένα ή και στα δύο άκρα.

1. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

οι οποίες αποκλίνουν.

2. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)^2}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}$$

οι οποίες συγκλίνουν.

3. Για την $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1}$ ελέγχουμε ότι $R = 1$. Για $x = \pm 1$ έχουμε τις σειρές

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Η πρώτη αποκλίνει, ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του λόγου στη θέση του κριτηρίου της ρίζας.

Θεώρημα 3.5.5. *Έστω $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ μια δυναμοσειρά με συντελεστές $a_k \neq 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = a$ και θέτουμε $R = \frac{1}{a}$.*

(α) Αν $x \in (-R, R)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απολύτως στο x.

(β) Αν $x \notin [-R, R]$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο x.

Απόδειξη. Εφαρμόστε το κριτήριο του λόγου για τη σύγκλιση σειρών. □

3.6 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(στ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(ζ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(η) Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(θ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

(ι) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ια) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

3. Εξετάστε για ποιές τιμές του p συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$.

4. Αποδείξτε ότι

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1.$

5. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

6. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0 < p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0 < q < p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ $(0 < q < p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Ομάδα Β΄

10. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$, (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{k^2+1}$, (ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, (στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k}$, (η) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, (θ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$.

11. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

12. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Αποδείξτε ότι $0 \leqslant (-1)^n (s - s_n) \leqslant a_{n+1}$.

13. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k \to 0$.

14. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

15. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

16. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

17. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

18. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει και αν $p > 1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

19. Προσδιορίστε τις τιμές των a, b, c για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

20. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

21. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k\to\infty} a_k > 1$. Αποδείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

22. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

24. Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

25. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ φραγμένη ακολουθια. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

26. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ ακολουθια πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Γ΄ Ομάδα

27. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

28. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Αποδείξτε ότι: αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

29. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geqslant 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

30. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Αποδείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geqslant 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Αποδείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

31. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

32. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αποδείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συνέχεια και όρια συναρτήσεων

4.1 Συναρτήσεις

Έστω X και Y δύο μη κενά σύνολα. Με τον όρο *συνάρτηση από το X στο Y* εννοούμε μια *αντιστοίχιση* που *στέλνει* κάθε στοιχείο x του X σε ένα και μοναδικό στοιχείο y του Y. Μπορούμε να κωδικοποιήσουμε την πληροφορία ότι *το x απεικονίζεται στο y* χρησιμοποιώντας το διατεταγμένο ζεύγος (x,y): το πρώτο στοιχείο x του ζεύγους είναι στο X και το δεύτερο είναι το στοιχείο του Y στο οποίο αντιστοιχίζουμε το x. Οδηγούμαστε έτσι στον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.1.1. Έστω X και Y δύο μη κενά σύνολα. Θεωρούμε το καρτεσιανό γινόμενο των X και Y:

$$X \times Y = \{(x,y) : x \in X,\, y \in Y\}.$$

Συνάρτηση f από το X στο Y λέγεται κάθε υποσύνολο f του $X \times Y$ το οποίο ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(x,y) \in f$. Η συνθήκη αυτή περιγράφει το γεγονός ότι απαιτούμε *κάθε* $x \in X$ να απεικονίζεται σε κάποιο $y \in Y$.

(ii) Αν $(x,y_1) \in f$ και $(x,y_2) \in f$, τότε $y_1 = y_2$. Η συνθήκη αυτή περιγράφει το γεγονός ότι απαιτούμε κάθε $x \in X$ να έχει *μονοσήμαντα ορισμένη* εικόνα $y \in Y$.

Γράφοντας $f : X \to Y$ εννοούμε ότι f είναι μια συνάρτηση από το X στο Y. Συμφωνούμε επίσης να γράφουμε $y = f(x)$ για την *εικόνα* του x μέσω της f. Δηλαδή, $y = f(x) \Longleftrightarrow (x,y) \in f$.

Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι το X είναι το *πεδίο ορισμού* της f και το Y είναι το *σύνολο αφίξεως* της f. Το *σύνολο τιμών* (ή *εικόνα*) της f είναι το σύνολο

$$f(X) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in X \text{ ώστε } f(x) = y\} \;=\; \{f(x) : x \in X\}.$$

Παραδείγματα 4.1.2. (α) Έστω $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ λέγεται *σταθερή συνάρτηση*. Το σύνολο τιμών της f είναι το μονοσύνολο $f(X) = \{c\}$.

(β) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(X) = \mathbb{R}$.

(γ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(X) = [0, +\infty)$.

(δ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(X) = \{0, 1\}$.

(ε) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{q}$ αν $x \neq 0$ ρητός ο οποίος γράφεται στη μορφή $x = \frac{p}{q}$ όπου $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, ΜΚΔ$(p, q) = 1$, και $f(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ ή $x = 0$. Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(X) = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ορισμός 4.1.3. Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται *επί* αν $f(X) = Y$, δηλαδή αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$.

Η συνάρτηση f λέγεται *1-1* αν απεικονίζει διαφορετικά στοιχεία του X σε διαφορετικά στοιχεία του Y. Δηλαδή, αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$ έχουμε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ισοδύναμα, για να ελέγξουμε ότι η f είναι 1-1 πρέπει να δείξουμε ότι αν $x_1, x_2 \in X$ και $f(x_1) = f(x_2)$, τότε $x_1 = x_2$.

Ορισμός 4.1.4 (σύνθεση συναρτήσεων)**.** Έστω $f : X \to Y$ και $g : W \to Z$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(X) \subseteq W$, δηλαδή, η εικόνα της f περιέχεται στο πεδίο ορισμού της g. Τότε, αν $x \in X$ έχουμε $f(x) \in W$ και ορίζεται η εικόνα $g(f(x))$ του $f(x)$ μέσω της g. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια συνάρτηση $g \circ f : X \to Z$, θέτοντας

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in X).$$

Η συνάρτηση $g \circ f$ είναι η *σύνθεση* της g με την f.

Ορισμός 4.1.5 (εικόνα και αντίστροφη εικόνα)**.** Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση.

(α) Για κάθε $A \subseteq X$, η *εικόνα* του A μέσω της f είναι το σύνολο

$$f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in A \text{ ώστε } f(x) = y\} = \{f(x) : x \in A\}.$$

(β) Για κάθε $B \subseteq Y$, η *αντίστροφη εικόνα* του B μέσω της f είναι το σύνολο

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Πρόταση 4.1.6. *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $A_1 \subseteq A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1) \subseteq f(A_2)$.*

(ii) *Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.*

(iii) *Αν $A_1, A_2 \subseteq X$, τότε $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$. Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Ισχύει όμως πάντα ισότητα αν η f είναι 1-1.*

(iv) *Αν $B_1 \subseteq B_2 \subseteq Y$ τότε $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$.*

(v) *Αν $B_1, B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.*

(vi) *Αν $B_1, B_2 \subseteq Y$, τότε $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.*

(vii) *Αν $B \subseteq Y$ τότε $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$.*

(viii) *Αν* $A \subseteq X$ *τότε* $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. *Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Ισχύει όμως πάντα ισότητα αν η* f *είναι 1-1.*

(ix) *Αν* $B \subseteq Y$ *τότε* $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. *Ο εγκλεισμός μπορεί να είναι γνήσιος. Ισχύει όμως πάντα ισότητα αν η* f *είναι επί.*

Ορισμός 4.1.7 (αντίστροφη συνάρτηση)**.** Έστω $f : X \to Y$ μια 1-1 συνάρτηση. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση f σαν συνάρτηση από το X στο $f(X)$ (η f παίρνει τιμές στο σύνολο $f(X)$). Η $f : X \to f(X)$ είναι 1-1 και επί. Συνεπώς, για κάθε $y \in f(X)$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) = y$, και αυτό το $x \in X$ είναι μοναδικό αφού η f είναι 1-1. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια συνάρτηση $f^{-1} : f(X) \to X$, ως εξής:

$$f^{-1}(y) = x, \text{ όπου } x \text{ είναι το μοναδικό } x \in X \text{ για το οποίο } f(x) = y.$$

Με άλλα λόγια,

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη συνάρτηση από το $f(X)$ στο X, η *αντίστροφη συνάρτηση* της f.

Πρόταση 4.1.8. *Έστω* $f : X \to Y$ *μια 1-1 συνάρτηση. Οι* $f^{-1} \circ f : X \to X$ *και* $f \circ f^{-1} : f(X) \to f(X)$ *ορίζονται καλά και ικανοποιούν τις:*

(α) $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ *για κάθε* $x \in X$.

(β) $(f \circ f^{-1})(y) = y$ *για κάθε* $y \in f(X)$.

Ορισμός 4.1.9 (πράξεις και διάταξη)**.** Έστω A ένα μη κενό σύνολο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : A \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$. Τότε,

(i) Η συνάρτηση $f + g : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ για κάθε $x \in A$.

(ii) Η συνάρτηση $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ για κάθε $x \in A$.

(iii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζεται η συνάρτηση $tf : A \to \mathbb{R}$ με $(tf)(x) = tf(x)$ για κάθε $x \in A$.

(iv) Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε ορίζεται η $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ με $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ για κάθε $x \in A$.

Λέμε ότι $f \leqslant g$ αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 4.1.10 (μονότονες συναρτήσεις)**.** *Έστω* A *ένα μη κενό υποσύνολο του* $\mathbb{R}$ *και έστω* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση. Λέμε ότι:*

(i) *Η* f *είναι αύξουσα αν για κάθε* $x, y \in A$ *με* $x < y$ *ισχύει* $f(x) \leqslant f(y)$.

(ii) *Η* f *είναι γνησίως αύξουσα αν για κάθε* $x, y \in A$ *με* $x < y$ *ισχύει* $f(x) < f(y)$.

(iii) *Η* f *είναι φθίνουσα αν για κάθε* $x, y \in A$ *με* $x < y$ *ισχύει* $f(x) \geqslant f(y)$.

(iv) *Η* f *είναι γνησίως φθίνουσα αν για κάθε* $x, y \in A$ *με* $x < y$ *ισχύει* $f(x) > f(y)$.

(v) *Η* f *είναι μονότονη αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα.*

(vi) *Η* f *είναι γνησίως μονότονη αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

Ορισμός 4.1.11 (φραγμένη συνάρτηση)**.** *Έστω A ένα μη κενό σύνολο και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι:*

(i) *Η f είναι άνω φραγμένη αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \leqslant M$.*

(ii) *Η f είναι κάτω φραγμένη αν υπάρχει $m \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $f(x) \geqslant m$.*

(iii) *Η f είναι φραγμένη αν είναι άνω και κάτω φραγμένη. Ισοδύναμα, αν υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει $|f(x)| \leqslant M$.*

Ορισμός 4.1.12 (άρτια-περιττή συνάρτηση)**.** *Μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται άρτια αν $g(-x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και περιττή αν $g(-x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η $g_1(x) = x^2$ και η $g_2(x) = |x|$ είναι άρτιες συναρτήσεις, η $g_3(x) = x$ και η $g_4(x) = x^3$ είναι περιττές συναρτήσεις.*

Ορισμός 4.1.13 (περιοδική συνάρτηση)**.** *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική (με περίοδο a) αν υπάρχει $a \neq 0$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $f(x + a) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = x - [x]$ είναι περιοδική με περίοδο 1. Παρατηρήστε ότι: αν η f είναι περιοδική με περίοδο $a \neq 0$, τότε, για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, ο ka είναι επίσης περίοδος της f.*

4.1.1 Κλάσεις πραγματικών συναρτήσεων

1. Ακολουθίες. Κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών λέγεται ακολουθία (αυτός ήταν άλλωστε ο ορισμός που δώσαμε στο Κεφάλαιο 2).

2. Πολυωνυμικές συναρτήσεις. *Πολυώνυμο* λέγεται κάθε συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι η μηδενική ή ορίζεται από τύπο της μορφής

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_n \neq 0$. Ο μη αρνητικός ακέραιος n είναι ο *βαθμός* του πολυωνύμου. Αν $n = 0$ και $a_0 = 0$, τότε $p \equiv 0$ και ο βαθμός του p δεν ορίζεται. Αν $n = 1$ τότε το $p(x) = a_1 x + a_0$ λέγεται *γραμμική συνάρτηση*.

3. Ρητές συναρτήσεις. *Ρητή* λέγεται κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τύπο της μορφής

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

όπου p, q πολυώνυμα και $b_m \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Παρατηρήστε ότι το πλήθος των ριζών ενός πολυωνύμου $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, $b_m \neq 0$, είναι το πολύ ίσο με m: αποδείξτε το με επαγωγή ως προς τον βαθμό, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι αν ρ είναι μια ρίζα του q τότε $q(x) = (x - \rho) q_1(x)$ όπου q_1 είναι πολυώνυμο βαθμού $m - 1$.

4. Αλγεβρικές συναρτήσεις. *Αλγεβρική* λέγεται κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί εξίσωση της μορφής

$$p_0(x) + p_1(x) f(x) + \cdots + p_k(x) [f(x)]^k = 0$$

για κάθε $x \in X$, όπου $p_0, p_1, \ldots, p_k$ πολυωνυμικές συναρτήσεις και $p_k \neq 0$. Παρατηρήστε ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι αλγεβρική: η $f = p/q$ ικανοποιεί την εξίσωση $p(x) - q(x)f(x) = 0$ στο πεδίο ορισμού $X = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Υπάρχουν αλγεβρικές συναρτήσεις που δεν είναι ρητές: το απλούστερο, ίσως, παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, με πεδίο ορισμού το $X = [0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί την $x - 1 \cdot [f(x)]^2 = 0$ (μπορείτε να εξηγήσετε γιατί δεν είναι ρητή συνάρτηση;).

4.1.2 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Σε αυτή τη σύντομη παράγραφο δίνουμε «προκαταρκτικό ορισμό» και υπενθυμίζουμε κάποιες βασικές ταυτότητες και ανισότητες για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις sin (ημίτονο), cos (συνημίτονο), tan (εφαπτομένη) και cot (συνεφαπτομένη). Ο ορισμός αυτός στηρίζεται στη γεωμετρική εποπτεία και αρκετές από τις εύλογες παραδοχές που σιωπηρά κάνουμε δεν καλύπτονται αυτή τη στιγμή από τα αξιώματα των πραγματικών αριθμών (για παράδειγμα, δεν έχουμε ορίσει την έννοια του μήκους τόξου).

Από το Λύκειο θυμόμαστε ότι αν θεωρήσουμε δύο κάθετους άξονες $X'OX$ και $Y'OY$ στο επίπεδο τότε, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (t, s) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί μοναδικό σημείο $M = M(t, s)$ του επιπέδου με τετμημένη t και τεταγμένη s (αυτές είναι οι προσημασμένες προβολές του M στους δύο άξονες). Το σημείο O έχει συντεταγμένες $(0, 0)$. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 1, ο οποίος τέμνει τους δύο άξονες στα σημεία $A' = (-1, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ και $B' = (0, -1)$.

Κάνουμε την παραδοχή ότι σε κάθε πραγματικό αριθμό x αντιστοιχεί ένα σημείο αυτού του κύκλου ως εξής: αν συμβολίσουμε με π το μισό του μήκους της περιφέρειας του κύκλου, στον $x = 0$ αντιστοιχεί το A, στον $x = \pi/2$ αντιστοιχεί το B, στον $x = \pi$ αντιστοιχεί το A' και γενικά, για δοσμένο x μετράμε πάνω στην περιφέρεια του κύκλου τόξο AM που έχει μήκος ίσο με $|x|$ ξεκινώντας από το A και ακολουθώντας κατεύθυνση αντίθετη προς αυτήν των δεικτών του ρολογιού αν $x > 0$ ή κατεύθυνση ίδια προς αυτήν των δεικτών του ρολογιού αν $x < 0$. Αν το σημείο $M = M(t, s)$ αντιστοιχεί στον x, ορίζουμε

$$\cos x = t, \qquad \sin x = s, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Οι δύο τελευταίοι αριθμοί ορίζονται αν $x \notin \{(2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ ή $x \notin \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι το ίδιο σημείο M αντιστοιχεί στους αριθμούς $x, y \in \mathbb{R}$ αν και μόνο αν ο $x - y$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π.

Με βάση αυτόν τον προκαταρκτικό ορισμό, και χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, μπορούμε να δείξουμε όλες τις γνωστές σχέσεις ανάμεσα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (υποθέτουμε ότι είναι γνωστές στον αναγνώστη):

Πρόταση 4.1.14. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι*

$$|\sin x| \leqslant 1, \qquad |\cos x| \leqslant 1 \qquad \text{και} \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

και

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

Οι συναρτήσεις $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ και $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ είναι περιοδικές, με ελάχιστη περίοδο 2π. Η $\sin$ είναι περιττή συνάρτηση, ενώ η $\cos$ είναι άρτια.

Πρόταση 4.1.15. *Αν* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, *τότε*

$$\sin x < x < \tan x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Έπεται ότι, για κάθε $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ *ισχύουν οι ανισότητες*

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x|$$

και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *ισχύει η*

$$|\sin x| \leqslant |x|.$$

Πρόταση 4.1.16 (συνημίτονο και ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς)**.** *Για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a\, \cos b + \sin a\, \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a\, \cos b - \sin a\, \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a\, \cos b + \cos a\, \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a\, \cos b - \cos a\, \sin b. \end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.17 (συνημίτονο και ημίτονο του $2a$)**.** *Για κάθε* $a \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) &= 2 \sin a\, \cos a. \end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.18 (μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο)**.** *Για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}$ *ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \cos x - \cos y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}. \end{aligned}$$

4.1.3 Εκθετική συνάρτηση

Έστω a ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Μπορούμε να ορίσουμε τον a^x όταν ο x είναι ρητός, ακολουθώντας τα εξής απλά βήματα:

(α) Αν $x \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a^x = a \cdot a \cdots a$ (x φορές).

(β) Αν $x = 0$, θέτουμε $a^0 = 1$.

(γ) Αν $x \in \mathbb{Z}$ και $x < 0$, θέτουμε $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$

Με βάση αυτούς τους ορισμούς ελέγχουμε εύκολα ότι:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Z}$ και $a, b > 0$.

(γ) Αν $x = 1/n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (έχουμε αποδείξει την ύπαρξη και το μονοσήμαντο θετικής n-οστής ρίζας για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό).

(ε) Αν $x = m/n$ όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ είναι τυχών ρητός, θέτουμε

$$a^x = \left(a^{1/n}\right)^m .$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $x = \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$, τότε

$$\left(a^{1/n}\right)^m = \left(a^{1/n_1}\right)^{m_1} .$$

Δηλαδή, ο a^x ορίζεται και ισχύουν οι

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad (a^x)^y = a^{xy}, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{Q}$ και $a, b > 0$.

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε μια σύντομη περιγραφή του «φυσιολογικού» τρόπου ορισμού της εκθετικής συνάρτησης a^x: επεκτείνουμε τον ορισμό για άρρητους εκθέτες x. Ο ορισμός του a^x, $x \notin \mathbb{Q}$ θα βασιστεί στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.1.19. *Έστω $a > 0$ και (q_n) ακολουθία ρητών αριθμών με $q_n \to 0$. Τότε,*

$$a^{q_n} \to 1.$$

Απόδειξη. Αν $a = 1$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Η περίπτωση $0 < a < 1$ ανάγεται στην $a > 1$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $a > 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι αν $q, q' \in \mathbb{Q}$ και $q < q'$ τότε $a^q < a^{q'}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τις $\sqrt[m]{a} \to 1$ και $\frac{1}{\sqrt[m]{a}} \to 1$ βλέπουμε ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$1 - \varepsilon < \frac{1}{\sqrt[k]{a}} = a^{-1/k} < a^{1/k} = \sqrt[k]{a} < 1 + \varepsilon.$$

Αφού $q_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = 1/k > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $-1/k < q_n < 1/k$. Τότε, χρησιμοποιώντας τη μονοτονία της a^q, $q \in \mathbb{Q}$, παίρνουμε το εξής: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$1 - \varepsilon < a^{-1/k} < a^{q_n} < a^{1/k} < 1 + \varepsilon.$$

Δηλαδή, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a^{q_n} - 1| < \varepsilon$. Έπεται ότι $a^{q_n} \to 1$. □

Η ιδέα μας για να επεκτείνουμε τον ορισμό του a^x για άρρητο x είναι η εξής: οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$, επομένως αν μας δώσουν $x \notin \mathbb{Q}$ υπάρχουν (πολλές) ακολουθίες ρητών $q_n \to x$. Θα δείξουμε ότι για κάποια από αυτές το $\lim_n a^{q_n}$ υπάρχει και θα ορίσουμε

$$a^x = \lim_n a^{q_n}.$$

Για να είναι καλός ο ορισμός, θα πρέπει αν πάρουμε μια άλλη ακολουθία ρητών αριθμών $q_n' \to x$ να υπάρχει το $\lim_n a^{q_n'}$ και να ισχύει η

$$\lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{q_n}.$$

Αυτό θα δείχνει ότι η τιμή a^x που ορίσαμε είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της ακολουθίας ρητών $q_n \to x$.

Θεώρημα 4.1.20. *Έστω $x \in \mathbb{R}$ και $q_n, q_n' \in \mathbb{Q}$ με $\lim_n q_n = \lim_n q_n' = x$. Αν $a > 1$, τότε*

(i) *τα $\lim_n a^{q_n'}$ και $\lim_n a^{q_n}$ υπάρχουν.*

(ii) $\lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{q_n}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία ρητών $r_n \to x$. Έστω q ρητός με $q > x$. Τότε $a^{r_n} < a^q$, δηλαδή η a^{r_n} είναι άνω φραγμένη. Επίσης, από την $r_n \leqslant r_{n+1}$ έπεται ότι $a^{r_n} \leqslant a^{r_{n+1}}$, δηλαδή η (a^{r_n}) είναι αύξουσα. Συνεπώς, η a^{r_n} συγκλίνει.

Παίρνουμε τώρα οποιαδήποτε από τις (q_n), (q_n'). Έχουμε $q_n - r_n \to x - x = 0$, οπότε το Λήμμα 3.4.1 δείχνει ότι $a^{q_n - r_n} \to 1$. Τότε,

$$a^{q_n} = a^{q_n - r_n} a^{r_n} \to \lim_n a^{r_n}.$$

Ομοίως,

$$a^{q_n'} \to \lim_n a^{r_n}.$$

Αφού $\lim_n a^{q_n} = \lim_n a^{q_n'} = \lim_n a^{r_n}$, παίρνουμε τα (i) και (ii) ταυτόχρονα. □

Έχουμε λοιπόν ορίσει τον a^x για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, πρέπει να αποδείξουμε διαδοχικά τα εξής (οι αποδείξεις είναι μια καλή άσκηση πάνω στη σύγκλιση ακολουθιών).

Πρόταση 4.1.21. *Έστω $a, b > 0$ και $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε,*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$

Πρόταση 4.1.22. *Έστω $a > 0$. Η $x \mapsto a^x$ είναι γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$.*

4.2 Συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 4.2.1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο* x_0 αν: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in A \text{ και } |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Λέμε ότι η f είναι *συνεχής στο* A αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in A$.

Παρατηρήσεις 4.2.2. (α) Το δοθέν $\varepsilon > 0$ καθορίζει μια περιοχή $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ της τιμής $f(x_0)$. Αυτό που ζητάμε είναι να μπορούμε να βρούμε μια περιοχή $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ του x_0 ώστε *κάθε* $x \in A$ που ανήκει σε αυτήν την περιοχή του x_0 να απεικονίζεται στο $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Δηλαδή, να ισχύει $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$.

Αν το παραπάνω ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι εξετάζουμε τη συνέχεια μόνο στα σημεία του πεδίου ορισμού της f.

Παραδείγματα 4.2.3. (α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $\delta>0$ ώστε: αν $x\in\mathbb{R}$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Όμως, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$|f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon.$$

Δηλαδή, μπορούμε να επιλέξουμε *οποιοδήποτε* $\delta>0$ (για παράδειγμα, $\delta=100$).

(β) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $\delta>0$ ώστε: αν $x\in\mathbb{R}$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Αφού $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|$, αρκεί να επιλέξουμε $\delta=\varepsilon$. Τότε,

$$|x-x_0|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\delta=\varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αυτό το παράδειγμα, το δ εξαρτάται από το ε αλλά δεν εξαρτάται από το x_0.

(γ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon>0$. Ζητάμε $\delta>0$ ώστε: αν $x\in\mathbb{R}$ και $|x-x_0|<\delta$, τότε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

$$|f(x)-f(x_0)|=|(2x^2-1)-(2x_0^2-1)|=|2x^2-2x_0^2|=2|x+x_0|\cdot|x-x_0|.$$

Ζητάμε λοιπόν $\delta>0$ ώστε: αν $|x-x_0|<\delta$, τότε $2|x+x_0|\cdot|x-x_0|<\varepsilon$. Δεδομένου ότι *εμείς* θα κάνουμε την επιλογή του δ, μπορούμε να υποθέσουμε από την αρχή ότι το δ θα είναι μικρότερο από 1. Τότε, αν $|x-x_0|<\delta$ θα έχουμε $|x-x_0|<1$, και συνεπώς,

$$|x+x_0|\leqslant|x-x_0+2x_0|\leqslant|x-x_0|+2|x_0|<1+2|x_0|.$$

Αν, επιπλέον, $\delta<\frac{\varepsilon}{2(2|x_0|+1)}$, τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$ θα έχουμε

$$|f(x)-f(x_0)|=2|x+x_0|\cdot|x-x_0|\leqslant 2(2|x_0|+1)\,|x-x_0|<2(2|x_0|+1)\delta<\varepsilon.$$

Δηλαδή, αν επιλέξουμε

$$0<\delta<\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2(2|x_0|+1)}\right\},$$

έχουμε

$$|x-x_0|<\delta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Παρατηρήστε ότι το δ που επιλέξαμε εξαρτάται από το δοθέν ε αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο εξετάζουμε τη συνέχεια της f.

4.2.1 Η άρνηση του ορισμού

Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in A$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Με βάση τη συζήτηση που έγινε μετά τον ορισμό της συνέχειας, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιο ε με την εξής ιδιότητα: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $\delta>0$ και την αντίστοιχη περιοχή $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ του x_0, τότε δεν ισχύει $f((x_0-\delta,x_0+\delta)\cap A)\subseteq(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$. Με άλλα λόγια, υπάρχει κάποιο $x\in A$ το οποίο ανήκει στο $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ αλλά δεν ικανοποιεί την $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. Ισοδύναμα, Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο εξής:

Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ασυνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ και $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$.

Με λόγια, θα λέγαμε ότι η f είναι ασυνεχής στο x_0 αν «οσοδήποτε κοντά στο x_0 υπάρχει $x \in A$ ώστε οι τιμές $f(x)$ και $f(x_0)$ να απέχουν αρκετά».

Παράδειγμα 4.2.4. Η συνάρτηση του Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ και θα δείξουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \frac{1}{2}$. Πράγματι, αν ο x_0 είναι ρητός, παρατηρούμε ότι στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ μπορούμε να βρούμε άρρητο α. Από τον ορισμό της f έχουμε

$$|f(\alpha) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

Αν ο x_0 είναι άρρητος, παρατηρούμε ότι στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ μπορούμε να βρούμε ρητό q. Από τον ορισμό της f έχουμε

$$|f(q) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 \geqslant \frac{1}{2}.$$

4.2.2 Αρχή της μεταφοράς

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Η *αρχή της μεταφοράς* δίνει έναν χαρακτηρισμό της συνέχειας της f στο x_0 μέσω ακολουθιών.

Θεώρημα 4.2.5 (αρχή της μεταφοράς). *Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν: για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \to f(x_0)$: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της συνέχειας της f στο x_0).

Έχουμε υποθέσει ότι $x_n \to x_0$. Άρα, γι' αυτό το $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $|x_n - x_0| < \delta$ (αυτός είναι ακριβώς ο ορισμός της σύγκλισης της (x_n) στο x_0).

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε: αν $n \geqslant n_0$, τότε $|x_n - x_0| < \delta$ άρα

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f(x_n) \to f(x_0)$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο $f(x_0)$. Υποθέτουμε επίσης ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού η f δεν είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

(∗) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $|x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$.

Χρησιμοποιούμε την (∗) διαδοχικά με $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $1/n > 0$ και από την (∗) βρίσκουμε $x_n \in A$ με $|x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$. Από το κριτήριο παρεμβολής είναι φανερό ότι $x_n \to x_0$ και από την υπόθεση που κάναμε πρέπει η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει στο $f(x_0)$. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού $|f(x_n) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατήρηση 4.2.6. Η αρχή της μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους.

(i) για να δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να δείξουμε ότι «$x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to f(x_0)$».

(ii) για να δείξουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0 αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $x_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq f(x_0)$. Πολύ συχνά, εξασφαλίζουμε την ασυνέχεια της f στο x_0 βρίσκοντας δύο ακολουθίες $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$ (στο A) ώστε $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$. Αν η f ήταν συνεχής στο x_0, θα έπρεπε τα δύο όρια να είναι ίσα με $f(x_0)$, άρα και μεταξύ τους ίσα.

Απλό παράδειγμα. Έχουμε δει ότι η συνάρτηση του Dirichlet, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη, χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς. Από την πυκνότητα των ρητών και των αρρήτων, μπορούμε να βρούμε ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών με $q_n \to x_0$ και ακολουθία (α_n) αρρήτων αριθμών με $\alpha_n \to x_0$. Όμως, $f(q_n) = 1 \to 1$ και $f(\alpha_n) = 0 \to 0$. Από την προηγούμενη παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0.

4.2.3 Συνέχεια και πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση της συνέχειας με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 4.2.7. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι συνεχείς στο x_0. Τότε,*

(i) *Οι $f + g$ και $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0.*

(ii) *Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο A και είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών είναι απλή: για παράδειγμα, για να δείξουμε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο x_0, σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A που συγκλίνει στο x_0, η ακολουθία $\left(\left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\right)$ συγκλίνει στο $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0)$. Από την υπόθεση, οι f και g είναι συνεχείς στο x_0. Από την αρχή της μεταφοράς έχουμε έχουμε $f(x_n) \to f(x_0)$ και $g(x_n) \to g(x_0)$. Αφού $g(x_n) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $g(x_0) \neq 0$, έχουμε

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Η απόδειξη της συνέχειας των $f+g$ και $f\cdot g$ στο x_0 αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

Πρόταση 4.2.8 (σύνθεση συνεχών συναρτήσεων)**.** *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω $g:B\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $f(A)\subseteq B$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η $g\circ f:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του A με $x_n\to x_0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n)\to f(x_0)$. Αφού η g είναι συνεχής στο $f(x_0)\in B$, για κάθε ακολουθία (y_n) σημείων του B με $y_n\to f(x_0)$ έχουμε $g(y_n)\to g(f(x_0))$.

Όμως, $f(x_n)\in B$ και $f(x_n)\to f(x_0)$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n))\to g(f(x_0)).$$

Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n\to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g\circ f)(x_n)=g(f(x_n))\to g(f(x_0))=(g\circ f)(x_0).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, η $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0. $\square$

4.2.4 Συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και της εκθετικής συνάρτησης

Η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$ ($c\in\mathbb{R}$) και η ταυτοτική συνάρτηση $g(x)=x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και ότι κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της.

Δείχνουμε τώρα τη συνέχεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και της εκθετικής συνάρτησης.

Πρόταση 4.2.9. *Οι συναρτήσεις* $\sin,\cos:\mathbb{R}\to[-1,1]$ *είναι συνεχείς.*

Απόδειξη. Έστω $x_0\in\mathbb{R}$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Από την Πρόταση 4.1.15 έχουμε

$$\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\leqslant\left|\frac{x-x_0}{2}\right|.$$

Συνεπώς,

$$|\sin x-\sin x_0|\leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right|=|x-x_0|.$$

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι η $\sin$ είναι συνεχής στο x_0 (πάρτε $\delta=\varepsilon$ και επαληθεύστε τον ορισμό της συνέχειας). Η $\cos$ είναι συνεχής ως σύνθεση της συνεχούς $x\mapsto\frac{\pi}{2}-x$ με την $\sin$. Ανεξάρτητα από αυτό, μπορείτε να δώσετε απόδειξη ξεκινώντας από την ταυτότητα

$$\cos x-\cos x_0=2\sin\frac{x_0-x}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}$$

και χρησιμοποιώντας την $|\sin t|\leqslant|t|$. $\square$

Πρόταση 4.2.10. *Έστω $a>0$. Η συνάρτηση $f_a:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ με $f_a(x)=a^x$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a>1$ (αν $a=1$ η f_a είναι σταθερή και αν $0<a<1$ έχουμε $f_a=\frac{1}{f_{1/a}}$).

Δείχνουμε πρώτα ότι η f_a είναι συνεχής στο 0: έστω $\varepsilon>0$. Από τις $\sqrt[n]{a}\to 1$ και $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\to 1$ βλέπουμε ότι υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε

$$1-\varepsilon<\frac{1}{\sqrt[n_0]{a}}=a^{-1/n_0}<a^{1/n_0}=\sqrt[n_0]{a}<1+\varepsilon.$$

Επιλέγουμε $\delta=1/n_0>0$. Αφού η f_a είναι γνησίως αύξουσα, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x|<\delta$ έχουμε

$$1-\varepsilon<a^{-1/n_0}<a^x<a^{1/n_0}<1+\varepsilon,$$

δηλαδή

$$|f_a(x)-f_a(0)|=|a^x-1|<\varepsilon.$$

Δείχνουμε τώρα τη συνέχεια της f_a στο τυχόν $x_0\in\mathbb{R}$ χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς. Έστω (x_n) στο $\mathbb{R}$ με $x_n\to x_0$. Από τη συνέχεια της f_a στο 0 συμπεραίνουμε ότι $f_a(x_n-x_0)=a^{x_n-x_0}\to a^0=1$. Τότε,

$$f_a(x_n)=a^{x_n}=a^{x_0}\cdot a^{x_n-x_0}\to a^{x_0}\cdot 1=f_a(x_0).$$

Η (x_n) ήταν τυχούσα, άρα η f_a είναι συνεχής στο x_0. □

Στο επόμενο Κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε και τη συνέχεια της συνάρτησης $a\mapsto a^x$:

Πρόταση 4.2.11. *Έστω $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g_x:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $g_x(a)=a^x$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x>0$ (αν $x=0$ η g_x είναι σταθερή και αν $x<0$ έχουμε $g_x=\frac{1}{g_{-x}}$).

Δείχνουμε πρώτα ότι η g_x είναι συνεχής στο 1: υπάρχει $m\in\mathbb{N}$ ώστε $|x|\leqslant m$. Έστω (a_n) στο $(0,+\infty)$ με $a_n\to 1$. Τότε, $a_n^m\to 1$ και $a_n^{-m}\to 1$. Από τις ταυτότητες $2\min\{x,y\}=x+y-|x-y|$ και $2\max\{x,y\}=x+y+|x-y|$ βλέπουμε ότι

$$t_n:=\min\{a_n^m,a_n^{-m}\}\to 1\quad\text{και}\quad s_n:=\max\{a_n^m,a_n^{-m}\}\to 1.$$

Παρατηρήστε ότι: αν $a_n\geqslant 1$ τότε $a_n^{-m}\leqslant a_n^x\leqslant a_n^m$ ενώ αν $a_n\leqslant 1$ τότε $a_n^m\leqslant a_n^x\leqslant a_n^{-m}$. Έπεται ότι $t_n\leqslant a_n^x\leqslant s_n$ και από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $g_x(a_n)=a_n^x\to 1=g_x(1)$. Αφού η (a_n) ήταν τυχούσα, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι η g_x είναι συνεχής στο 1.

Δείχνουμε τώρα τη συνέχεια της g_x στο τυχόν $a_0>0$ χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς. Έστω (a_n) στο $(0,+\infty)$ με $a_n\to a_0$. Από τη συνέχεια της g_x στο 1 συμπεραίνουμε ότι $g_x(a_n/a_0)=a_n^x/a_0^x\to 1^x=1$. Τότε,

$$g_x(a_n)=a_n^x=a_0^x(a_n/a_0)^x\to a_0^x\cdot 1=g_x(a_0).$$

Η (a_n) ήταν τυχούσα, άρα η g_x είναι συνεχής στο a_0. □

4.2.5 Συνέχεια και τοπική συμπεριφορά

Από τον ορισμό της συνέχειας είναι φανερό ότι η συμπεριφορά μιας συνάρτησης f «μακριά» από το x_0 δεν επηρεάζει τη συνέχεια ή μη της f στο x_0.

Πρόταση 4.2.12. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε ο περιορισμός της f στο $A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ να είναι συνάρτηση συνεχής στο x_0. Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Με τον όρο «περιορισμός της f» εννοούμε τη συνάρτηση $\tilde{f} : A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\tilde{f}$ είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in (A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho))$ με $|x - x_0| < \delta_1$ να ισχύει $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_o)| < \varepsilon$.

Θέτουμε $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$. Τότε, έχουμε $\delta > 0$ και αν $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε ταυτόχρονα $x \in A \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ και $|x - x_0| < \delta \leqslant \delta_1$. Άρα,

$$|f(x) - f(x_0)| = |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_o)| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, τότε είναι «τοπικά φραγμένη», δηλαδή φραγμένη σε μια περιοχή του x_0. Παρατηρήστε ότι μια συνεχής συνάρτηση f δεν είναι απαραίτητα φραγμένη σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. Απλά παραδείγματα μας δίνουν οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ και $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \in (0,1))$.

Πρόταση 4.2.13. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ και $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να ισχύει $|f(x)| \leqslant M$.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας της f στο x_0 με $\varepsilon = 1 > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < 1$. Δηλαδή, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| < 1 + |f(x_0)|.$$

Έπεται το ζητούμενο, με $M = 1 + |f(x_0)|$. □

Η τελευταία παρατήρηση είναι ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ και αν $f(x_0) \neq 0$, τότε η f διατηρεί το πρόσημο του $f(x_0)$ σε μια ολόκληρη (ενδεχομένως μικρή) περιοχή του x_0.

Πρόταση 4.2.14. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 και ότι $f(x_0) \neq 0$.*

(i) *Αν $f(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

(ii) *Αν $f(x_0) < 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f(x_0) > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε τον $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \Longrightarrow -\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) \Longrightarrow f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Δηλαδή, $f(x) > 0$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x_0) < 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, αν θεωρήσουμε τον $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$ τότε

$$|f(x) - f(x_0)| < -\frac{f(x_0)}{2} \Longrightarrow f(x) - f(x_0) < -\frac{f(x_0)}{2} \Longrightarrow f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

Δηλαδή, $f(x) < 0$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

4.3 Βασικά θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε δύο θεμελιώδη και διαισθητικά αναμενόμενα θεωρήματα για συνεχείς συναρτήσεις που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα: το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και το θεώρημα ύπαρξης μέγιστης και ελάχιστης τιμής. Η απόδειξη τους απαιτεί ουσιαστική χρήση του αξιώματος της πληρότητας.

4.3.1 Το θεώρημα ελάχιστης και μέγιστης τιμής

Το πρώτο βασικό θεώρημα μας λέει ότι αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε η f είναι άνω φραγμένη και κάτω φραγμένη, και μάλιστα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $x \in [a, b]$,*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Δηλαδή, η f είναι άνω και κάτω φραγμένη.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο

$$A = \{y \in [a, b] : \text{ η } f \text{ είναι άνω φραγμένη στο } [a, y]\}.$$

Ισχυρισμός 1. Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο b είναι άνω φράγμα για το A. Για να δείξουμε ότι το A είναι μη κενό, σκεφτόμαστε ως εξής: αφού η f είναι συνεχής στο a, από την Πρόταση 4.2.13 υπάρχουν $M \in \mathbb{R}$ και $0 < \delta < b - a$ ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, a + \delta)$. Αν λοιπόν $a < y < a + \delta$, τότε

για κάθε x με $a \leqslant x \leqslant y$ ισχύει $f(x) \leqslant M$,

το οποίο σημαίνει ότι $y \in A$. Συνεπώς, $(a, a + \delta) \subseteq A$ (το A είναι μη κενό). □

Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει ο $\xi = \sup A$.

Ισχυρισμός 2. $\xi = b$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\xi < b$. Αφού η f είναι συνεχής στο ξ, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.13 βρίσκουμε $0 < \delta_1 < \min\{b - \xi, \xi - a\}$ και $M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in (\xi - \delta_1, \xi + \delta_1)$ να έχουμε $f(x) \leqslant M_1$. Τώρα, στο διάστημα $(\xi - \delta_1, \xi]$ μπορούμε να βρούμε $y_1 \in A$ από τον χαρακτηρισμό του supremum. Αφού $y_1 \in A$, υπάρχει $M_2 > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M_2$ για κάθε $x \in [a, y_1]$. Τότε, $f(x) \leqslant M := \max\{M_1, M_2\}$ για κάθε $x \in [a, \xi + \delta_1)$. Αυτό είναι άτοπο: αν επιλέξουμε $y_2 \in (\xi, \xi + \delta_1)$ τότε $y_2 \in A$ (εξηγήστε γιατί) και $y_2 > \xi = \sup A$.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι η f είναι άνω φραγμένη στο $[a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο b, χρησιμοποιώντας ξανά την Πρόταση 4.2.13 βρίσκουμε $0 < \delta_2 < b-a$ και $M_3 > 0$ ώστε για κάθε $x \in (b-\delta_2, b]$ να έχουμε $f(x) \leqslant M_3$. Στο διάστημα $(b-\delta_2, b]$ μπορούμε να βρούμε $y_3 \in A$ από τον χαρακτηρισμό του supremum. Αφού $y_3 \in A$, υπάρχει $M_4 > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M_4$ για κάθε $x \in [a, y_3]$. Τότε, $f(x) \leqslant M := \max\{M_3, M_4\}$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η f είναι κάτω φραγμένη (ή, αν θέλετε, θεωρήστε την $-f$: γνωρίζετε ήδη ότι είναι άνω φραγμένη). □

Κάνοντας ένα ακόμα βήμα, δείχνουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[a,b]$:

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $y_1, y_2 \in [a,b]$ ώστε $f(y_1) \leqslant f(x) \leqslant f(y_2)$ για κάθε $x \in [a,b]$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 4.3.1 η f είναι άνω φραγμένη. Συνεπώς, το σύνολο

$$A = \{f(x) : x \in [a,b]\}$$

είναι άνω φραγμένο. Έστω $\rho = \sup A$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $y_2 \in [a,b]$ με $f(y_2) = \rho$.

Υποθέτουμε ότι η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο $[a,b]$. Τότε, $f(x) < \rho$ για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \frac{1}{\rho - f(x)}.$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, οπότε είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $g(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αυτό οδηγεί σε άτοπο ως εξής: από τον ορισμό του supremum, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε στοιχείο του A στο $(\rho - 1/n, \rho)$. Δηλαδή, υπάρχει $x_n \in [a,b]$ για το οποίο

$$\rho - \frac{1}{n} < f(x_n) < \rho.$$

Τότε,

$$M \geqslant g(x_n) = \frac{1}{\rho - f(x_n)} > n.$$

Δηλαδή, το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο από τον M, άτοπο.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή (ή, αν θέλετε, θεωρήστε την $-f$: γνωρίζετε ήδη ότι παίρνει μέγιστη τιμή). □

Παρατήρηση 4.3.3. Μπορούμε να αποδείξουμε τα προηγούμενα δύο θεωρήματα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano-Weiertstrass.

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$, με απαγωγή σε άτοπο. Αν αυτό δεν ισχύει, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a,b]$ ώστε $|f(x_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, από την αρχή της μεταφοράς έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(x_0)$, άρα

$$|f(x_{k_n})| \to |f(x_0)|.$$

Όμως, $|f(x_{k_n})| > k_n \geqslant n$. Άρα, $|f(x_{k_n})| \to +\infty$, το οποίο είναι άτοπο.

Τώρα, γνωρίζουμε ότι η f είναι φραγμένη, άρα

$$M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} < \infty.$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε $x_n \in [a,b]$ ώστε $f(x_n) \to M$ (γενικά, αν $s = \sup(A)$ τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) στο A ώστε $a_n \to s$). Η (x_n) έχει υπακολουθία (x_{k_n}) ώστε $x_{k_n} \to x_0 \in [a,b]$. Αφού $f(x_n) \to M$, έχουμε $f(x_{k_n}) \to M$. Από την αρχή της μεταφοράς,

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = M.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή (στο x_0).

4.3.2 Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής

Ας υποθέσουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παίρνει ετερόσημες τιμές στα άκρα του $[a,b]$. Τότε, αυτό που περιμένει κανείς από την γραφική παράσταση της f είναι ότι για κάποιο σημείο $\xi \in (a,b)$ θα ισχύει $f(\xi) = 0$ (η καμπύλη $y = f(x)$ θα τμήσει τον οριζόντιο άξονα). Θα δώσουμε τρεις αποδείξεις. Όλες χρησιμοποιούν ουσιαστικά το αξίωμα της πληρότητας. Καθεμία από αυτές «στοχεύει» σε «διαφορετική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$».

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(a) < 0$ και $f(b) > 0$. Τότε, υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = 0$.*

Πρώτη απόδειξη. Θα προσπαθήσουμε να «βρούμε» τη μικρότερη λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a,b). Ψάχνουμε δηλαδή για κάποιο $\xi \in (a,b)$ για το οποίο $f(\xi) = 0$ και $f(x) < 0$ για κάθε x με $a \leqslant x < \xi$.

Η ιδέα είναι ότι αυτό το ξ πρέπει να είναι το supremum του συνόλου όλων των $y \in (a,b)$ που ικανοποιούν το εξής:

$$\text{για κάθε } \ x \text{ με } a \leqslant x < y \ \text{ ισχύει } f(x) < 0.$$

Ορίζουμε λοιπόν

$$A = \{y \in (a,b] : \ a \leqslant x < y \Longrightarrow f(x) < 0\}.$$

Ισχυρισμός 1. Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο b είναι άνω φράγμα για το A. Για να δείξουμε ότι το A είναι μη κενό, σκεφτόμαστε ως εξής: η f είναι συνεχής στο a και $f(a) < 0$. Από την Πρόταση 4.2.14 υπάρχει $0 < \delta < b - a$ ώστε η f να παίρνει αρνητικές τιμές στο $[a,b] \cap (a-\delta, a+\delta) = [a, a+\delta)$. Αν λοιπόν $a < y < a + \delta$, τότε

$$\text{για κάθε } \ x \text{ με } a \leqslant x < y \ \text{ ισχύει } f(x) < 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι $y \in A$. Άρα, $(a, a+\delta) \subseteq A$ (το A είναι μη κενό). □

Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει ο $\xi = \sup A$. Επίσης, $a < \xi$ διότι $(a, a+\delta) \subseteq A$.

Ισχυρισμός 2. Για τον $\xi = \sup A$ ισχύουν οι $a < \xi < b$ και $f(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\xi < b$: Έχουμε $f(b) > 0$ και η f είναι συνεχής στο b. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.14 βρίσκουμε $0 < \delta_1 < b - a$ ώστε για κάθε $x \in (b - \delta_1, b]$ να έχουμε

$f(x) > 0$. Τότε, ο $b - \delta_1$ είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, αν $y \in A$ τότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [a, y)$ και αφού $f(x) > 0$ στο $(b - \delta_1, b]$ έχουμε $y \leqslant b - \delta_1$. Συνεπώς,

$$a < a + \delta \leqslant \xi \leqslant b - \delta_1 < b.$$

Ειδικότερα, $a < \xi < b$.

Μένει να δείξουμε ότι $f(\xi) = 0$. Θα αποκλείσουμε τα ενδεχόμενα $f(\xi) < 0$ και $f(\xi) > 0$.

(i) Έστω ότι $f(\xi) < 0$. Από τη συνέχεια της f στο ξ, υπάρχει $0 < \delta_2 < \min\{\xi - a, b - \xi\}$ ώστε $f(x) < 0$ στο $(\xi - \delta_2, \xi + \delta_2)$ (εξηγήστε γιατί). Όμως τότε, $f(x) < 0$ στο $[a, \xi + \delta_2)$ (γιατί υπάρχει $y \in A$ με $y > \xi - \delta_2$, οπότε $f(x) < 0$ στο $[a, y) \cup (\xi - \delta_2, \xi + \delta_2) = [a, \xi + \delta_2)$). Επομένως, $\xi + \delta_2 \in A$. Αυτό είναι άτοπο αφού $\xi = \sup A$.

(ii) Έστω ότι $f(\xi) > 0$. Τότε, υπάρχει $0 < \delta_3 < \min\{\xi - a, b - \xi\}$ ώστε $f(x) > 0$ στο $(\xi - \delta_3, \xi + \delta_3)$. Αν πάρουμε $y \in A$ με $y > \xi - \delta_3$ και z με $y > z > \xi - \delta_3$, τότε

$$y \in A \Longrightarrow f(z) < 0$$

ενώ

$$z \in (\xi - \delta_3, \xi + \delta_3) \Longrightarrow f(z) > 0$$

δηλαδή οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Με την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού ολοκληρώνεται και η απόδειξη του θεωρήματος. □

Δεύτερη απόδειξη. Θα προσπαθήσουμε να «βρούμε» τη μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο (a, b). Ψάχνουμε δηλαδή για κάποιο $\xi \in (a, b)$ για το οποίο $f(\xi) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε x με $\xi < x \leqslant b$.

Η ιδέα είναι ότι αυτό το ξ πρέπει να είναι το supremum του συνόλου

$$A = \{y \in [a, b] : f(y) \leqslant 0\}.$$

Ισχυρισμός 1. Το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι ο b είναι άνω φράγμα για το A. Το A είναι μη κενό: αφού $f(a) < 0$, έχουμε $a \in A$. □

Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει ο $\xi = \sup A$. Επίσης, $a < \xi$. Πράγματι, στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι υπάρχει $0 < \delta < b - a$ ώστε $(a, a + \delta) \subseteq A$.

Ισχυρισμός 2. Για τον $\xi = \sup A$ ισχύουν οι $a < \xi < b$ και $f(\xi) = 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\xi < b$: Έχουμε $f(b) > 0$ και η f είναι συνεχής στο b. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.14 βρίσκουμε $0 < \delta_1 < b - a$ ώστε για κάθε $x \in (b - \delta_1, b]$ να έχουμε $f(x) > 0$. Τότε, ο $b - \delta_1$ είναι άνω φράγμα του A. Πράγματι, αν $y \in A$ τότε $f(y) \leqslant 0$, άρα $y \in [a, b - \delta_1]$. Έπεται ότι

$$\xi = \sup A \leqslant b - \delta_1 < b.$$

Μένει να δείξουμε ότι $f(\xi) = 0$. Θα δείξουμε ότι $f(\xi) \leqslant 0$ και $f(\xi) \geqslant 0$ χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς.

(i) Αφού $\xi = \sup A$, υπάρχει ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \to \xi$. Έχουμε $f(x_n) \leqslant 0$ και η f είναι συνεχής στο ξ. Από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $f(\xi) = \lim_n f(x_n) \leqslant 0$.

(ii) Αφού $\xi < b$, υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία (y_n) στο $(\xi, b]$ με $y_n \to \xi$ (για παράδειγμα, η $y_n = \xi + \frac{b-\xi}{n}$). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $y_n \notin A$, και συνεπώς, $f(y_n) > 0$. Από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε $f(\xi) = \lim_n f(y_n) \geqslant 0$. □

Με την απόδειξη του δεύτερου ισχυρισμού ολοκληρώνεται και η απόδειξη του θεωρήματος. □

Τρίτη απόδειξη. Προσπαθούμε να προσεγγίσουμε μια ρίζα x_0 της f «οπουδήποτε» ανάμεσα στα a και b, με διαδοχικές διχοτομήσεις του $[a, b]$. Η ύπαρξη της ρίζας θα εξασφαλιστεί από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων και την αρχή της μεταφοράς.

Στο πρώτο βήμα, διχοτομούμε το $[a, b]$ θεωρώντας το μέσο του $\frac{a+b}{2}$. Αν συμβεί να έχουμε $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, θέτουμε $\xi = \frac{a+b}{2}$ και έχουμε $f(\xi) = 0$. Αλλιώς, υπάρχουν δύο ενδεχόμενα. Είτε $f(\frac{a+b}{2}) > 0$ οπότε θέτουμε $a_1 = a$ και $b_1 = \frac{a+b}{2}$, ή, $f(\frac{a+b}{2}) < 0$, οπότε θέτουμε $a_1 = \frac{a+b}{2}$ και $b_1 = b$. Σε κάθε περίπτωση, έχουμε $f(a_1) < 0$ και $f(b_1) > 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι $a \leqslant a_1 < b_1 \leqslant b$ και ότι το μήκος του $[a_1, b_1]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{2}$.

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία στο $[a_1, b_1]$. Αν $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = 0$, θέτουμε $\xi = \frac{a_1+b_1}{2}$ και έχουμε $f(\xi) = 0$. Αλλιώς, βρίσκουμε a_2, b_2 που ικανοποιούν τις $a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_1$, $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$ και $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, είτε βρίσκουμε $\xi \in [a, b]$ με $f(\xi) = 0$ ή ορίζουμε ακολουθίες (a_n) και (b_n) στο $[a, b]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $a \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \cdots \leqslant b_2 \leqslant b_1 \leqslant b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $f(a_n) < 0 < f(b_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία (a_n) που κατασκευάσαμε είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Άρα, συγκλίνουν. Από την $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$$

για κάποιο $\xi \in [a, b]$. Αφού $f(a_n) < 0$ και $f(b_n) > 0$, από τη συνέχεια της f και από την αρχή της μεταφοράς παίρνουμε

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi),$$

δηλαδή, $f(\xi) = 0$. □

Σαν πόρισμα παίρνουμε το *θεώρημα ενδιάμεσης τιμής*:

Θεώρημα 4.3.5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(a) < f(b)$ και $f(a) < \rho < f(b))$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f(\xi) = \rho$. Όμοια, αν $f(b) < f(a)$ και $f(b) < \rho < f(a))$, τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώσστε $f(\xi) = \rho$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την $g(x) = f(x) - \rho$. Η g είναι συνεχής στο $[a, b]$ και $g(a) = f(a) - \rho < 0$, $g(b) = f(b) - \rho > 0$. Από το Θεώρημα 4.3.4 υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $g(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \rho$.

Για την άλλη περίπτωση, χρησιμοποιήστε τη συνεχή συνάρτηση $h(x) = \rho - f(x)$. □

Ορισμός 4.3.6 (διάστημα). Ένα υποσύνολο I του $\mathbb{R}$ λέγεται *διάστημα* αν για κάθε $x, y \in I$ με $x < y$ ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$ περιέχεται στο I.

Με άλλα λόγια, διαστήματα είναι τα ανοικτά, κλειστά ή ημιανοικτά διαστήματα και οι ανοικτές ή κλειστές ημιευθείες.

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η εικόνα $f(I)$ της f είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Έστω $u, v \in f(I)$ με $u < v$ και έστω $u < w < v$. Υπάρχουν $x, y \in I$ ώστε $f(x) = u$ και $f(y) = v$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < y$. Αφού το I είναι διάστημα, έχουμε $[x, y] \subseteq I$ και η $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[x, y]$. Αφού $f(x) = u < w < v = f(y)$, υπάρχει $z \in (x, y)$ ώστε $f(z) = w$. Αφού $z \in I$, συμπεραίνουμε ότι $w = f(z) \in f(I)$. Από τον ορισμό του διαστήματος έπεται ότι το $f(I)$ είναι διάστημα. □

Πόρισμα 4.3.8. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχουν $m \leqslant M$ στο $\mathbb{R}$ ώστε $f([a, b]) = [m, M]$.*

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής και ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Συνεπώς, η f παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή M στο $[a, b]$. Δηλαδή, $m, M \in f([a, b])$ και $f([a, b]) \subseteq [m, M]$. Από το προηγούμενο θεώρημα, το $f([a, b])$ είναι διάστημα και περιέχει τα m, M. Άρα, $f([a, b]) \supseteq [m, M]$. Έπεται ότι $f([a, b]) = [m, M]$. □

4.3.3 Παραδείγματα

Η συνέχεια της f αλλά και η υπόθεση ότι το πεδίο ορισμού είναι κλειστό διάστημα είναι απαραίτητες στα προηγούμενα θεωρήματα.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ στο $[-1, 1]$. Η f δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο $[-1, 1]$. Έχουμε $1 = \sup\{f(x) : x \in [-1, 1]\}$, αλλά ο 1 δεν είναι τιμή της f: παρατηρήστε ότι $0 \leqslant f(x) < 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$. Τότε, $f(0) < 0$ και $f(2) > 0$, αλλά δεν υπάρχει λύση της $f(x) = 0$ στο $[0, 2]$. Η f είναι ασυνεχής στο σημείο 1.

(γ) Θεωρούμε την $f(x) = 1/x$ στο $(0, 1]$. Η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη. Το πεδίο ορισμού της f *δεν είναι κλειστό διάστημα*.

(δ) Θεωρούμε την $f(x) = x$ στο $(0, 1)$. Η f είναι συνεχής και φραγμένη στο $(0, 1)$, αλλά δεν παίρνει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Το πεδίο ορισμού της f *δεν είναι κλειστό διάστημα*.

4.3.4 Εφαρμογές των βασικών θεωρημάτων

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής χρησιμοποιείται συχνά για την απόδειξη της ύπαρξης ρίζας κάποιας εξίσωσης. Το πρώτο μας παράδειγμα είναι η «ύπαρξη n-οστής ρίζας» που είχαμε εξασφαλίσει με χρήση του αξιώματος της πληρότητας.

Θεώρημα 4.3.9. *Έστω $n \geqslant 2$ και έστω ρ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Υπάρχει μοναδικός $\xi > 0$ ώστε $\xi^n = \rho$.*

Απόδειξη. Έστω $\rho > 0$. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^n$. Πρώτα θα δείξουμε ότι υπάρχει $b > 0$ ώστε $f(b) > \rho$. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) Αν $\rho < 1$, τότε $f(1) = 1^n = 1 > \rho$.

(ii) Αν $\rho > 1$, τότε $f(\rho) = \rho^n > \rho$.

(iii) Αν $\rho = 1$, τότε $f(2) = 2^n > 2 > 1$.

Δείξαμε ότι υπάρχει $b > 0$ ώστε $f(0) = 0 < \rho < f(b)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (0, b)$ ώστε $f(\xi) = \rho$, δηλαδή $\xi^n = \rho$.

Η μοναδικότητα είναι απλή: έχουμε δεί ότι αν $a, b > 0$ τότε $a^n = b^n$ αν και μόνο αν $a = b$. Αν λοιπόν έχουμε $\xi_1^n = \rho = \xi_2^n$ για κάποιους $\xi_1, \xi_2 > 0$, τότε $\xi_1 = \xi_2$. □

Θεώρημα 4.3.10. *Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα.*

Απόδειξη. Έστω $P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, όπου $a_m \neq 0$ και m περιττός. Γράφουμε $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0 = a_m x^m (1 + \Delta(x))$ όπου

$$\Delta(x) = \frac{a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{a_m x^m}.$$

Παρατηρήστε ότι αν

$$|x| > 2 \frac{|a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|a_m|} + 1$$

τότε $|x|^k \leqslant |x|^{m-1}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, m-1$, και συνεπώς,

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &\leqslant \frac{|a_{m-1}| x^{m-1} + \cdots + |a_1| x + |a_0|}{|a_m|\, |x|^m} \\ &\leqslant \frac{|a_{m-1}|\, |x|^{m-1} + \cdots + |a_1|\, |x|^{m-1} + |a_0|\, |x|^{m-1}}{|a_m|\, |x|^m} \\ &= \frac{|a_{m-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|a_m|\, |x|} \\ &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $|x| \geqslant M$ τότε

$$1 + \Delta(x) \geqslant 1 - |\Delta(x)| \geqslant 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Δηλαδή, αν $|x| \geqslant M$ τότε οι $P(x)$ και $a_m x^m$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Έπεται ότι ο $P(-M)P(M)$ είναι ομόσημος με τον $a_m^2 (-M)^m M^m = a_m^2 M^{2m} (-1)^m$, δηλαδή αρνητικός. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\xi \in (-M, M)$ ώστε $P(\xi) = 0$. □

Θεώρημα 4.3.11 (θεώρημα σταθερού σημείου)**.** *Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ ώστε $f(x_0) = x_0$.*

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι η καμπύλη $y = f(x)$ τέμνει την διαγώνιο $y = x$. Αρκεί να δείξουμε ότι η συνεχής συνάρτηση $h(x) = f(x) - x$ μηδενίζεται κάπου στο $[0, 1]$.

Αν $f(0) = 0$ ή $f(1) = 1$ έχουμε το ζητούμενο για $x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$ αντίστοιχα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 1$. Τότε, $h(0) = f(0) > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 < 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $h(x_0) = 0$. Δηλαδή, $f(x_0) = x_0$. □

4.4 Όριο συνάρτησης

4.4.1 Σημεία συσσώρευσης και μεμονωμένα σημεία

Ορισμός 4.4.1. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι ο x_0 είναι *σημείο συσσώρευσης* του A αν για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in A$ ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$ (ισοδύναμα: $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ και $x \neq x_0$).

Δηλαδή, ο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν οσοδήποτε κοντά στον x_0 μπορούμε να βρούμε στοιχεία του A διαφορετικά από τον x_0. Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τον x_0 να είναι στοιχείο του A.

Παραδείγματα 4.4.2. (α) Αν $A = [a, b]$, τότε ο x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A αν και μόνο αν $x_0 \in [a, b]$. Αν $A = (a, b]$, τότε κάθε σημείο του A είναι σημείο συσσώρευσης του A, και υπάρχει άλλο ένα σημείο συσσώρευσης του A, το a, το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο.

(β) Αν $A = [0, 1] \cup \{2\}$, τότε $2 \in A$ αλλά ο 2 δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(γ) Το $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης.

(δ) Αν $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, τότε ο 0 είναι το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του A (και δεν ανήκει στο A).

Ορισμός 4.4.3. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$. Λέμε ότι ο x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A αν δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A, δηλαδή, αν υπάρχει περιοχή του x_0 η οποία δεν περιέχει άλλα σημεία του A εκτός από το x_0 (ισοδύναμα, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$).*

Η επόμενη πρόταση δίνει χρήσιμους χαρακτηρισμούς του σημείου συσσώρευσης.

Πρόταση 4.4.4. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.*

(ii) *Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος σημεία του A στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*

(iii) *Υπάρχει ακολουθία (x_n) διαφορετικών ανά δύο, και διαφορετικών από το x_0, σημείων του A, η οποία συγκλίνει στο x_0.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Έστω $\delta > 0$. Αφού το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A, στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ μπορούμε να βρούμε σημεία του A διαφορετικά από το x_0. Ας υποθέσουμε ότι αυτά τα σημεία είναι πεπερασμένα το πλήθος, τα $y_1, \dots, y_m$. Κάποιο από αυτά, ας πούμε το y_j για κάποιον $1 \leqslant j \leqslant m$, είναι το πλησιέστερο προς το x_0. Θέτουμε $\delta_1 = |x_0 - y_j|$. Τότε, $\delta_1 > 0$ (διότι $y_j \neq x_0$) και στην περιοχή $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ δεν υπάρχει σημείο του A διαφορετικό από το x_0 (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, διότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A.

(ii)⇒(iii) Από την υπόθεση, στο $(x_0 - 1, x_0 + 1)$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος σημεία του A. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_1 \in A$ με $x_1 \neq x_0$ και $|x_1 - x_0| < 1$.

Ομοίως, στο $\left(x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\right)$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος σημεία του A. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_2 \in A$ με $x_2 \neq x_0, x_1$ και $|x_2 - x_0| < \frac{1}{2}$.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: έστω ότι έχουμε βρεί $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1} \in A$ διαφορετικά ανά δύο (και διαφορετικά από το x_0) ώστε $|x_k - x_0| < \frac{1}{k}$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Στο $\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right)$ υπάρχουν άπειρα το πλήθος σημεία του A. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $x_n \in A$ με $x_n \neq x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ και $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$.

Η ακολουθία (x_n), που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο, συγκλίνει στο x_0 και έχει όρους που ανήκουν στο A, είναι διαφορετικοί ανά δύο και διαφορετικοί από τον x_0.

(iii)⇒(i) Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) διαφορετικών ανά δύο σημείων του A, η οποία συγκλίνει στο x_0. Έστω $\delta > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Αφού οι όροι της (x_n) είναι διαφορετικοί ανά δύο, κάποιος από αυτούς (για την ακρίβεια, άπειροι το πλήθος) είναι διαφορετικός από το x_0 και ανήκει στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Αφού το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του A. □

4.4.2 Ορισμός του ορίου

Ορισμός 4.4.5 (όριο συνάρτησης)**.** Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 υπάρχει και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ αν:

$$\text{Για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε: αν } x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ τότε } |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Αν ένας τέτοιος αριθμός ℓ υπάρχει, τότε είναι μοναδικός (δείξτε το) και γράφουμε $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ή $f(x) \to \ell$ καθώς $x \to x_0$.

Ορισμός 4.4.6. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A.

(α) Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς το $x \to x_0$ αν:

$$\text{Για κάθε } M > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε: αν } x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) > M.$$

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

(β) Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς το $x \to x_0$ αν:

$$\text{Για κάθε } M > 0 \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε: αν } x \in A \text{ και } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x) < -M.$$

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Παρατήρηση 4.4.7. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να εξετάσουμε την ύπαρξη ή μη του ορίου της $f : A \to \mathbb{R}$ σε κάθε σημείο συσσώρευσης x_0 του A. Το x_0 μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο A: αρκεί να υπάρχουν $x \in A$ οσοδήποτε κοντά στο x_0. Επίσης, ακόμα κι αν το x_0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, η τιμή $f(x_0)$ δεν επηρεάζει την ύπαρξη ή μη του $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ούτε και την τιμή του ορίου (αν αυτό υπάρχει).

Παραδείγματα 4.4.8. (α) $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \neq 0 \\ 2, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$. Το $\lim_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0, ενώ $f(0) = 2$.

(γ) Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$. Τότε, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$. Αν θεωρήσουμε την $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x}$, τότε το όριο $\lim_{x \to 0} g(x)$ δεν υπάρχει.

Μπορείτε να αποδείξετε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς με βάση τον ορισμό (άσκηση). Μπορείτε επίσης να χρησιμοποιήσετε την αρχή της μεταφοράς, την οποία θα συζητήσουμε παρακάτω, ώστε να αναχθείτε στα αντίστοιχα όρια ακολουθιών.

(δ) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν x άρρητος ή $x=0$, και $f(x)=\frac{1}{q}$ αν $x=\frac{p}{q}$ με $p,q\in\mathbb{N}$ και ΜΚΔ$(p,q)=1$. Τότε, για κάθε $x_0\in[0,1]$ το όριο $\lim_{x\to x_0}f(x)$ υπάρχει και ισούται με 0.

Πράγματι, έστω $x_0\in[0,1]$ και έστω $\varepsilon>0$. Θέτουμε $M=M(\varepsilon)=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ και $A(\varepsilon)=\{y\in[0,1]: y\neq x_0 \text{ και } f(y)\geqslant\varepsilon\}$. Αν ο y ανήκει στο $A(\varepsilon)$ τότε είναι ρητός ο οποίος γράφεται στη μορφή $y=\frac{p}{q}$ όπου $p,q\in\mathbb{N}$, $p\leqslant q$ και $f(y)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$. Το πλήθος αυτών των αριθμών είναι το πολύ ίσο με το πλήθος των ζευγαριών (p,q) φυσικών αριθμών όπου $q\leqslant M$ και $p\leqslant q$. Επομένως, δεν ξεπερνάει τον $M(M+1)/2$. Δηλαδή, το $A(\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο σύνολο. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $A(\varepsilon)=\{y_1,\ldots,y_m\}$ όπου $m=m(\varepsilon)\in\mathbb{N}$.

Ο αριθμός $\delta=\min\{|x_0-y_1|,\ldots,|x_0-y_m|\}$ είναι γνήσια θετικός. Έστω $x\in[0,1]$ με $0<|x-x_0|<\delta$. Τότε, $x\notin A(\varepsilon)$, άρα $0\leqslant f(x)<\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$.

Ορισμός 4.4.9 (πλευρικά όρια)**.** Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του A ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν στοιχεία του A στο $(x_0-\delta,x_0)$ (ένα τέτοιο x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του A από αριστερά). Λέμε ότι:

> (i) $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (ο ℓ είναι το πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 από αριστερά) αν: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x\in A$ και $x_0-\delta<x<x_0$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Τελείως ανάλογα, έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του A ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχουν στοιχεία του A στο $(x_0,x_0+\delta)$ (ένα τέτοιο x_0 λέγεται σημείο συσσώρευσης του A από δεξιά). Λέμε ότι:

> (ii) $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ (ο ℓ είναι το πλευρικό όριο της f καθώς το x τείνει στο x_0 από δεξιά) αν: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε αν $x\in A$ και $x_0<x<x_0+\delta$ τότε $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη να δώσει αυστηρούς ορισμούς για τα ακόλουθα:

- $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=+\infty$,
- $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=-\infty$,
- $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$,
- $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=-\infty$.

Από τον ορισμό των πλευρικών ορίων έπεται άμεσα η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.4.10. *Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_0\in\mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A από αριστερά και από δεξιά. Τότε το $\lim_{x\to x_0}f(x)$ υπάρχει αν και μόνον αν τα δύο πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^-}f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+}f(x)$ υπάρχουν και είναι ίσα.* □

Ορισμός 4.4.11. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Λέμε ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $M > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in A$ ώστε $x > M$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to +\infty$.

Αντίστοιχα, λέμε ότι το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε $M > 0$ μπορούμε να βρούμε $x \in A$ ώστε $x < -M$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A με $x_n \to -\infty$.

Ορισμός 4.4.12. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω ότι το $+\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A.
(α) Λέμε ότι το όριο της f καθώς το x τείνει στο $+\infty$ υπάρχει και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$ αν:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $x > M$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Αν ένας τέτοιος αριθμός ℓ υπάρχει, τότε είναι μοναδικός (μπορείτε να το αποδείξετε) και γράφουμε $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.
(β) Λέμε ότι η f τείνει στο $+\infty$ καθώς το $x \to +\infty$ αν:

Για κάθε $M_1 > 0$ υπάρχει $M_2 > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $x > M_2$ τότε $f(x) > M_1$.

Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
(γ) Λέμε ότι η f τείνει στο $-\infty$ καθώς το $x \to +\infty$ αν:

Για κάθε $M_1 > 0$ υπάρχει $M_2 > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $x > M_2$ τότε $f(x) < -M_1$.

Σε αυτήν την περίπτωση, γράφουμε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Τελείως ανάλογα, αν $f : A \to \mathbb{R}$ και αν το $-\infty$ είναι σημείο συσσώρευσης του A, μπορούμε να ορίσουμε καθεμία από τις προτάσεις $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4.4.3 Αρχή της μεταφοράς για το όριο

Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του A. Η *αρχή της μεταφοράς* δίνει έναν χαρακτηρισμό της ύπαρξης του ορίου της f καθώς το x τείνει στο x_0 μέσω ακολουθιών.

Θεώρημα 4.4.13 (αρχή της μεταφοράς για το όριο). *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν: για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο ℓ.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$. Έστω $x_n \in A$ με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \to \ell$: Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Έχουμε υποθέσει ότι $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$. Άρα, γι' αυτό το $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $0 < |x_n - x_0| < \delta$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε: αν $n \geqslant n_0$, τότε $0 < |x_n - x_0| < \delta$ άρα

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $f(x_n) \to \ell$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα δουλέψουμε με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$, η ακολουθία $(f(x_n))$ συγκλίνει στο ℓ. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν ισχύει η $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Αφού δεν ισχύει η $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, υπάρχει κάποιο $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

> $(*)$ Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ το οποίο ικανοποιεί την $0 < |x - x_0| < \delta$ αλλά $|f(x) - \ell| \geqslant \varepsilon$.

Χρησιμοποιούμε την $(*)$ διαδοχικά με $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $1/n > 0$ και από την $(*)$ βρίσκουμε $x_n \in A$ με $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$. Έχουμε $x_n \neq x_0$ και από το κριτήριο παρεμβολής είναι φανερό ότι $x_n \to x_0$. Από την υπόθεση που κάναμε πρέπει η ακολουθία $(f(x_n))$ να συγκλίνει στο ℓ. Αυτό όμως είναι αδύνατο αφού $|f(x_n) - \ell| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Παρατηρήσεις 4.4.14. (α) Η αρχή της μεταφοράς μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους.

(i) για να δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αρκεί να δείξουμε ότι «$x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0 \implies f(x_n) \to \ell$».

(ii) για να δείξουμε ότι δεν ισχύει η $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ αρκεί να βρούμε μια ακολουθία $x_n \to x_0$ (στο A), με $x_n \neq x_0$, ώστε $\lim_n f(x_n) \neq \ell$. Πολύ συχνά, εξασφαλίζουμε κάτι ισχυρότερο, ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, βρίσκοντας δύο ακολουθίες $x_n \to x_0$ και $y_n \to x_0$ (στο A), με $x_n, y_n \neq x_0$, ώστε $\lim_n f(x_n) \neq \lim_n f(y_n)$. Αν υπήρχε το $\lim_{x\to x_0} f(x)$, θα έπρεπε τα δύο όρια να είναι μεταξύ τους ίσα.

(β) Μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε αντίστοιχες μορφές της αρχής της μεταφοράς για τους υπόλοιπους τύπους ορίων ή πλευρικών ορίων που συζητήσαμε.

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τη σχέση του ορίου με τις συνήθεις αλγεβρικές πράξεις ανάμεσα σε συναρτήσεις. Η απόδειξή του είναι άμεση, αν χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς σε συνδυασμό με τις αντίστοιχες ιδιότητες για τα όρια ακολουθιών.

Θεώρημα 4.4.15. *Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του A. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$. Τότε,*

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \ell + m$ *και* $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell \cdot m$.

(ii) *Αν επιπλέον $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$ και $\lim_{x\to x_0} g(x) = m \neq 0$, τότε η $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο A και* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη όλων των ισχυρισμών, με απλή χρήση της αρχής της μεταφοράς, αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

Πρόταση 4.4.16. *Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ σημείο συσσώρευσης του A και $f : X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με ℓ. Έστω $g : B \to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$ και $\ell \in B$. Αν η g είναι συνεχής στο ℓ, τότε το όριο $\lim_{x\to x_o}(g \circ f)(x)$ υπάρχει και ισούται με $g(\ell)$.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$. Αφού $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι $f(x_n) \to \ell$. Αφού η g είναι συνεχής στο $\ell \in B$, για κάθε ακολουθία (y_n) σημείων του B με $y_n \to \ell$ έχουμε $g(y_n) \to g(\ell)$.

Όμως, $f(x_n) \in B$ και $f(x_n) \to \ell$. Συνεπώς,

$$g(f(x_n)) \to g(\ell).$$

Για κάθε ακολουθία (x_n) σημείων του A με $x_n \neq x_0$ και $x_n \to x_0$ δείξαμε ότι

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(\ell).$$

Από την αρχή της μεταφοράς, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to x_o}(g \circ f)(x) = g(\ell)$. □

4.4.4 Δύο βασικά παραδείγματα

Πρόταση 4.4.17 (βασικό όριο).

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ είναι άρτια στο $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Από την Πρόταση 4.1.15 έχουμε $\sin x < x < \tan x$ στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Αφού η cos είναι συνεχής, έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos x = \cos 0 = 1$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.4.18. *Τα όρια* $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ *και* $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ *δεν υπάρχουν.*

Απόδειξη. Από την αρχή της μεταφοράς, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ (με $x_n, y_n \neq 0$) ώστε $\lim \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim \sin\frac{1}{y_n}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = \frac{1}{\pi n}$ και $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\lim_n x_n = 0 = \lim_n y_n$. Όμως,

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin(\pi n) = 0 \to 0$$

και

$$\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1.$$

Τελείως ανάλογα, μπορείτε να δείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. □

4.4.5 Σχέση ορίου και συνέχειας

Σε αυτήν την παράγραφο θα συνδέσουμε την έννοια του ορίου με την έννοια της συνέχειας. Παρατηρήστε ότι η συνέχεια ελέγχεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης, έχει λοιπόν νόημα να εξετάσουμε πρώτα τη συνέχεια στα μεμονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού. Όπως δείχνει η επόμενη πρόταση, κάθε συνάρτηση είναι συνεχής σε όλα αυτά τα σημεία.

Πρόταση 4.4.19. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω x_0 ένα μεμονωμένο σημείο του A. Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Αφού το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x_0\}$. Δηλαδή, αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $x = x_0$. Θα δείξουμε ότι «αυτό το δ δουλεύει για όλα τα ε».

Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $x = x_0$, και συνεπώς,

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon.$$

Βρήκαμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Με βάση τον ορισμό της συνέχειας, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Αν το $x_0 \in A$ είναι και σημείο συσσώρευσης του A, τότε η σχέση ορίου και συνέχειας δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.4.20. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in A$ σημείο συσσώρευσης του A. Τότε, η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ειδικότερα, αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Άρα, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in A$ και $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι, για $x = x_0$, έχουμε ούτως ή άλλως $|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Άρα, για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x_0. □

Παρατήρηση 4.4.21 (είδη ασυνέχειας)**.** Ας εξετάσουμε πιο προσεκτικά τι σημαίνει η φράση: «η f δεν είναι συνεχής στο x_0», όπου x_0 είναι σημείο στο πεδίο ορισμού της $f : A \to \mathbb{R}$. Αναγκαστικά, το x_0 θα είναι σημείο συσσώρευσης του A και υποθέτουμε ότι είναι σημείο συσσώρευσης του A τόσο από αριστερά όσο και από δεξιά (διερευνήστε τι μπορεί να συμβεί στις υπόλοιπες περιπτώσεις). Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

(i) Τα πλευρικά ορια της f καθώς $x \to x_0$ υπάρχουν και $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, όμως η τιμή της f στο x_0 δεν είναι ο ℓ: δηλαδή, $f(x_0) \neq \ell$. Τότε λέμε ότι στο x_0 παρουσιάζεται άρσιμη ασυνέχεια (ή «επουσιώδης» ασυνέχεια). Η f συμπεριφέρεται άριστα γύρω από το x_0, αλλά η τιμή της στο x_0 είναι «λανθασμένη».

(ii) Τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ υπάρχουν αλλά είναι διαφορετικά:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Τότε λέμε ότι στο x_0 παρουσιάζεται «ασυνέχεια α΄ είδους» (ή άλμα). Η διαφορά

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) - \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

είναι το «άλμα» της f στο x_0.

(iii) Το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει (για παράδειγμα, κάποιο από τα πλευρικά όρια της f καθώς $x \to x_0$ δεν υπάρχει). Τότε, λέμε ότι στο x_0 παρουσιάζεται ασυνέχεια β′ είδους (ή «ουσιώδης ασυνέχεια».)

Παρατήρηση 4.4.22 (ασυνέχειες μονότονων συναρτήσεων)**.** Έστω I ένα διάστημα και έστω $f : I \to \mathbb{R}$ μια μονότονη συνάρτηση. Τότε τα πλευρικά όρια της f υπάρχουν σε κάθε $x_0 \in I$. Συνεπώς, αν η f είναι ασυνεχής σε κάποιο $x_0 \in I$, τότε θα παρουσιάζει άλμα στο x_0.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και ότι x_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του I. Ορίζουμε

$$A^-(x_0) = \{f(x) : x \in I,\, x < x_0\}.$$

Το $A^-(x_0)$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο από το $f(x_0)$. Συνεπώς, ορίζεται ο $\ell^- = \sup A^-(x_0)$. Από τον ορισμό του supremum έχουμε $\ell^- \leqslant f(x_0)$. Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^-$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού ο $\ell^- - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου $A^-(x_0)$, υπάρχει $x < x_0$ στο I με $f(x) > \ell^- - \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = x_0 - x$. Τότε, για κάθε $y \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε $y \in I$ (διότι το I είναι διάστημα) και

$$\ell^- - \varepsilon < f(x_0 - \delta) \leqslant f(y) \leqslant \ell^- < \ell^- + \varepsilon,$$

διότι η f είναι αύξουσα. Δηλαδή, αν $y \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε

$$|f(y) - \ell^-| < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^- \leqslant f(x_0)$, και με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell^+ \geqslant f(x_0)$, όπου

$$\ell^+ = \inf\big(\{f(x) : x \in I,\, x > x_0\}\big).$$

Αν τα δύο πλευρικά όρια διαφέρουν, τότε έχουμε ασυνέχεια α′ είδους (άλμα), ενώ αν είναι ίσα, τότε $f(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$, οπότε η f είναι συνεχής στο x_0.

4.5 Συνέχεια αντίστροφης συνάρτησης

Έστω I ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ξεκινάμε από την παρατήρηση ότι μια 1-1 συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ δεν είναι υποχρεωτικά μονότονη. Πάρτε για παράδειγμα την $f : (0,2) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x) = \begin{cases} 4-x, & 0<x<1 \\ 2, & x=1 \\ x-1, & 1<x<2 \end{cases}$. Η f είναι 1-1, όμως είναι φθίνουσα στο $(0,1)$ και αύξουσα στο $(1,2)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι αν μια *συνεχής* συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι ένα προς ένα, τότε είναι γνησίως μονότονη.

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Τότε, η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο I.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη σε τρία βήματα.

Βήμα 1. Αν $a, b, c \in I$ με $a < b < c$, τότε: ή $f(a) < f(b) < f(c)$ ή $f(a) > f(b) > f(c)$.

Απόδειξη. Αφού η f είναι 1-1, οι $f(a), f(b)$ και $f(c)$ είναι διαφορετικοί ανά δύο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$ (αλλιώς, θεωρούμε την $-f$). Θα δείξουμε ότι $f(a) < f(b) < f(c)$, αποκλείοντας τις περιπτώσεις $f(c) < f(a)$ και $f(a) < f(c) < f(b)$.

(i) Αν $f(c) < f(a) < f(b)$ τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in (b, c)$ με $f(x) = f(a)$, το οποίο είναι άτοπο, αφού $a < x$ και η f είναι 1-1.

(ii) Αν $f(a) < f(c) < f(b)$ τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $y \in (a, b)$ με $f(y) = f(c)$, το οποίο είναι επίσης άτοπο, αφού $y < c$ και η f είναι 1-1.

Βήμα 2. Αν $a, b, c, d \in I$ με $a < b < c < d$, τότε: ή $f(a) < f(b) < f(c) < f(d)$ ή $f(a) > f(b) > f(c) > f(d)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Εφαρμόζοντας το Βήμα 1 για την τριάδα a, b, c βλέπουμε ότι $f(a) < f(b) < f(c)$. Εφαρμόζοντας ξανά το Βήμα 1 για την τριάδα b, c, d βλέπουμε ότι $f(b) < f(c) < f(d)$. Δηλαδή,

$$f(a) < f(b) < f(c) < f(d).$$

Ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $f(a) > f(b)$, δείχνουμε με τον ίδιο τρόπο ότι

$$f(a) > f(b) > f(c) > f(d).$$

Βήμα 3. Σταθεροποιούμε δύο σημεία $a < b$ στο I. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα, δείχνοντας ότι αν $x, y \in I$ και $x < y$, τότε $f(x) < f(y)$.

Αν $x = a$ και $y = b$, τότε $f(x) = f(a) < f(b) = f(y)$. Αλλιώς, ανάλογα με τη διάταξη των x, y στην τετράδα a, b, x, y, το Βήμα 2 (ή το Βήμα 1 αν $x = a$ ή $y = b$) δείχνει ότι η ίδια διάταξη θα ισχύει για τις εικόνες $f(x), f(y)$ στην τετράδα $f(a), f(b), f(x), f(y)$. Για παράδειγμα, αν $x < a < b < y$ τότε $f(x) < f(a) < f(b) < f(y)$, άρα $f(x) < f(y)$. Αν $a < x = b < y$ τότε $f(a) < f(x) = f(b) < f(y)$, άρα $f(x) < f(y)$. □

Δεν είναι δύσκολο να περιγράψει κανείς την εικόνα $f(I)$ μιας συνεχούς και 1-1 συνάρτησης $f : I \to \mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι το I είναι ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (από το Θεώρημα 4.5.1 η f είναι γνησίως μονότονη). Τότε, η εικόνα της f είναι το κλειστό διάστημα $[f(a), f(b)]$. Αν το I είναι διάστημα ανοικτό σε κάποιο ή και στα δύο από τα άκρα του (ή διάστημα με άκρο κάποιο από τα $\pm\infty$), τότε, όπως είδαμε, η εικόνα $f(I)$ της f είναι κάποιο διάστημα. Ορίζουμε την *αντίστροφη* συνάρτηση $f^{-1} : f(I) \to I$ ως εξής: αν $y \in f(I)$, υπάρχει μοναδικό $x \in I$ ώστε $f(x) = y$. Θέτουμε $f^{-1}(y) = x$. Δηλαδή,

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Παρατηρήστε ότι η f^{-1} έχει την ίδια μονοτονία με την f. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_1, y_2 \in f(I)$ με $y_1 < y_2$. Αν ήταν $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, τότε θα είχαμε

$$f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2)), \quad \text{δηλαδή} \quad y_1 \geqslant y_2.$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Θα δείξουμε ότι η αντίστροφη συνεχούς και 1-1 συνάρτησης είναι επίσης συνεχής.

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση. Τότε, η $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Έστω $y_0 \in f(I)$. Υποθέτουμε ότι το y_0 δεν είναι άκρο του $f(I)$ (οι άλλες περιπτώσεις ελέγχονται όμοια). Τότε, $y_0 = f(x_0)$ για κάποιο εσωτερικό σημείο του I.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \in I$ (ούτως ή άλλως, για να ελέγξουμε τη συνέχεια μας ενδιαφέρουν τα μικρά $\varepsilon > 0$). Θέλουμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε

$$|y - y_0| < \delta \ \text{ και } \ y \in f(I) \Longrightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

Για την επιλογή του δ δουλεύουμε ως εξής: αφού $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 = f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$, υπάρχουν $\delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε $f(x_0 - \varepsilon) = y_0 - \delta_1$ και $f(x_0 + \varepsilon) = y_0 + \delta_2$. Επιλέγουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$.

Αν $|y - y_0| < \delta$, τότε $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x \in I$ ώστε $f(x) = y$. Το x είναι μοναδικό γιατί η f είναι 1-1, και

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$$

γιατί η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. Άρα, $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$. Δηλαδή, η f^{-1} είναι συνεχής στο y_0. $\square$

4.5.1 Λογαριθμική συνάρτηση

Έστω $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Έχουμε ορίσει την εκθετική συνάρτηση $f_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $f_a(x) = a^x$ και δείξαμε ότι είναι γνησίως αύξουσα αν $a > 1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0 < a < 1$.

Παρατηρήστε ότι η f_a είναι επί του $(0, +\infty)$. Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση $a > 1$: έστω $y > 0$. Γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $a^n \to +\infty$ και η ακολουθία $a^{-n} \to 0$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$a^{-n_0} < y < a^{n_0}.$$

Η f_a είναι συνεχής, οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στο $[-n_0, n_0]$ βρίσκουμε $x \in (-n_0, n_0)$ ώστε $f_a(x) = a^x = y$.

Ορίζεται λοιπόν η αντίστροφη συνάρτηση $f_a^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και το Θεώρημα 4.5.2 δείχνει ότι η f_a^{-1} είναι συνεχής. Θα συμβολίζουμε την f_a^{-1} με $\log_a$ (*λογαριθμική συνάρτηση* με βάση a).

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται ότι: αν $0 < a < 1$ τότε η f_a είναι επί του $(0, +\infty)$. Ορίζεται λοιπόν και πάλι η $\log_a = f_a^{-1}$ στο $(0, +\infty)$.

Συμβολισμός. Συμφωνούμε να γράφουμε exp για την f_e (την εκθετική συνάρτηση με βάση τον e) και ln για την $\log_e$ (την λογαριθμική συνάρτηση με βάση τον e). Παρατηρήστε ότι: για κάθε $a > 0$,

(i) $a^x = \exp(x \log a) = e^{x \log a}$.

(ii) $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$, αν $a \neq 1$.

Χρησιμοποιώντας την βασική ιδιότητα $a^{x+y} = a^x a^y$ της εκθετικής συνάρτησης, ελέγξτε ότι: αν $a \neq 1$ και $x, y > 0$, τότε

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y).$$

Η μονοτονία και η συμπεριφορά των συναρτήσεων $x \mapsto a^x$ και $x \mapsto \log_a(x)$ στα «άκρα» του πεδίου ορισμού τους περιγράφονται από την επόμενη πρόταση (η απόδειξή της είναι μια απλή άσκηση).

Πρόταση 4.5.3 (μονοτονία και συμπεριφορά στα άκρα).

(i) *Αν* $0 < a < 1$, *τότε η* a^x *είναι γνησίως φθίνουσα και*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

(ii) *Αν* $a > 1$, *τότε η* a^x *είναι γνησίως αύξουσα και*

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

(iii) *Αν* $0 < a < 1$, *τότε η* $\log_a(x)$ *είναι γνησίως φθίνουσα και*

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = +\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

(iv) *Αν* $a > 1$, *τότε η* $\log_a(x)$ *είναι γνησίως αύξουσα και*

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty \qquad \textit{και} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

4.6 Ομοιόμορφη συνέχεια

Πριν δώσουμε τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, θα εξετάσουμε πιο προσεκτικά δύο απλά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, κάτι που εύκολα επιβεβαιώνουμε αυστηρά χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέχειας:
Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $\delta > 0$ ώστε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \ \ \text{δηλαδή} \ \ |x - x_0| < \varepsilon.$$

Η επιλογή του δ είναι προφανής: αρκεί να πάρουμε $\delta = \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι το δ που βρήκαμε εξαρτάται μόνο από το ε που δόθηκε και όχι από το συγκεκριμένο σημείο x_0. Η συνάρτηση f μεταβάλλεται με τον «ίδιο ρυθμό» σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x - y| < \varepsilon$, τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι πάλι γνωστό ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (αφού $g = f \cdot f$). Αν θελήσουμε να το επιβεβαιώσουμε με τον εψιλοντικό ορισμό, θεωρούμε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$, και ζητάμε $\delta > 0$ με την ιδιότητα

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$

Ένας τρόπος για να επιλέξουμε κατάλληλο δ είναι ο εξής. Συμφωνούμε από την αρχή ότι θα πάρουμε $0 < \delta \leqslant 1$, οπότε

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| &= |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leqslant (|x| + |x_0|) \cdot |x - x_0| \\ &\leqslant (2|x_0| + 1)|x - x_0|. \end{aligned}$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right\},$$

τότε

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |x^2 - x_0^2| < (2|x_0| + 1)\delta \leqslant \varepsilon.$$

Άρα, η g είναι συνεχής στο x_0. Παρατηρήστε όμως ότι το δ που επιλέξαμε δεν εξαρτάται μόνο από το ε που μας δόθηκε, αλλά και από το σημείο x_0 στο οποίο ελέγχουμε την συνέχεια της g. Η επιλογή που κάναμε δείχνει ότι όσο πιο μακριά βρίσκεται το x_0 από το 0, τόσο πιο μικρό πρέπει να επιλέξουμε το δ.

Θα μπορούσε βέβαια να πει κανείς ότι ίσως υπάρχει καλύτερος τρόπος επιλογής του δ, ακόμα και ανεξάρτητος από το σημείο x_0. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|y - x| < \delta$ τότε $|y^2 - x^2| < \varepsilon$. Αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\left|x + \frac{\delta}{2} - x\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$, πρέπει, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η

$$\left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon.$$

Ειδικότερα, για κάθε $x > 0$ πρέπει να ισχύει η

$$\delta x < \delta x + \frac{\delta^2}{4} = \left|\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2\right| < \varepsilon.$$

Όμως τότε, για κάθε $x > 0$ θα είχαμε

$$x < \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Αυτό είναι άτοπο: το $\mathbb{R}$ θα ήταν άνω φραγμένο.

Τα παραδείγματα που δώσαμε δείχνουν μια «παράλειψή» μας στον ορισμό της συνέχειας. Ένας πιο προσεκτικός ορισμός θα ήταν ο εξής:

> Η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ ώστε:
> αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ο συμβολισμός $\delta(\varepsilon, x_0)$ θα έδειχνε ότι το δ εξαρτάται τόσο από το ε όσο και από το σημείο x_0. Οι συναρτήσεις (όπως η $f(x) = x$) που μας επιτρέπουν να επιλέγουμε το δ ανεξάρτητα από το x_0 λέγονται *ομοιόμορφα συνεχείς*:

Ορισμός 4.6.1. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *ομοιόμορφα συνεχής* στο A αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ώστε

$$\text{αν} \quad x, y \in A \quad \text{και} \quad |x - y| < \delta \quad \text{τότε } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Παραδείγματα

(α) Η $f(x) = x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(β) Η $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ του (β), περιορισμένη όμως στο κλειστό διάστημα $[-M, M]$, όπου $M > 0$. Τότε, για κάθε $x, y \in [-M, M]$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| = |y^2 - x^2| = |x + y| \cdot |y - x| \leqslant 2M \cdot |y - x|.$$

Δίνεται $\varepsilon > 0$. Αν επιλέξουμε $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2M}$ τότε για κάθε $x, y \in [-M, M]$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|g(y) - g(x)| \leqslant 2M \cdot |y - x| < 2M\delta = \varepsilon.$$

Δηλαδή, η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-M, M]$.

Το παράδειγμα (γ) οδηγεί στον εξής ορισμό.

Ορισμός 4.6.2. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *Lipschitz συνεχής* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|.$$

Πρόταση 4.6.3. *Κάθε Lipschitz συνεχής συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και $M > 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$ για κάθε $x, y \in A$. Αν μας δώσουν $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Τότε, για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| < M\delta = \varepsilon.$$

Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Από τη συζήτηση που προηγήθηκε του ορισμού της ομοιόμορφης συνέχειας, είναι λογικό να περιμένουμε ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις είναι συνεχείς. Αυτό αποδεικνύεται με απλή σύγκριση των δύο ορισμών:

Πρόταση 4.6.4. *Αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Πράγματι: έστω $x_0 \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in A$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Επιλέγουμε αυτό το δ. Αν $x \in A$ και $|x - x_0| < \delta$, τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (πάρτε $y = x_0$). Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι συνεχής στο x_0. □

4.6.1 Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μέσω ακολουθιών

Θυμηθείτε τον χαρακτηρισμό της συνέχειας μέσω ακολουθιών: αν $f : A \to \mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ο αντίστοιχος χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας έχει ως εξής:

Θεώρημα 4.6.5. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών (x_n), (y_n) στο A με $x_n - y_n \to 0$ ισχύει*

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω (x_n), (y_n) δύο ακολουθίες στο A με $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$:

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό της ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\text{αν } x, y \in A \text{ και } |x - y| < \delta \quad \text{τότε} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Αφού $x_n - y_n \to 0$, υπάρχει $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geqslant n_0$ τότε $|x_n - y_n| < \delta$. Έστω $n \geqslant n_0$. Τότε, $|x_n - y_n| < \delta$ και $x_n, y_n \in A$, οπότε

$$|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα: ας υποθέσουμε ότι

$$\text{αν } x_n, y_n \in A \text{ και } x_n - y_n \to 0 \quad \text{τότε} \quad f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. Έστω ότι δεν είναι. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x_\delta, y_\delta \in A$ με $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ αλλά $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geqslant \varepsilon$.

Επιλέγοντας διαδοχικά $\delta = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε ζευγάρια $x_n, y_n \in A$ ώστε

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{αλλά} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες (x_n), (y_n). Από την κατασκευή έχουμε $x_n - y_n \to 0$, αλλά από την $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βλέπουμε ότι δεν μπορεί να ισχύει η $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A. □

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$. Η f είναι συνεχής αλλά *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για να το δούμε, αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $(0,1]$ που να ικανοποιούν την $x_n - y_n \to 0$ αλλά να μην ικανοποιούν την $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \to 0$.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$ και $y_n = \frac{1}{2n}$. Τότε, $x_n, y_n \in (0,1]$ και

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$$

αλλά

$$f(x_n) - f(y_n) = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} = n - 2n = -n \to -\infty.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $x_n = n + \frac{1}{n}$ και $y_n = n$. Τότε,

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$$

αλλά

$$g(x_n) - g(y_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

Άρα, η g δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(γ) Ορίζουμε $f(x) = \cos(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leqslant 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, η f είναι επιπλέον φραγμένη. Όμως η f *δεν* είναι ομοιόμορφα συνεχής: για να το δείτε, θεωρήστε τις ακολουθίες

$$x_n = \sqrt{(n+1)\pi} \quad \text{και} \quad y_n = \sqrt{n\pi}.$$

Τότε,

$$x_n - y_n = \sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi} = \frac{(n+1)\pi - n\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}} \to 0,$$

αλλά

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |\cos((n+1)\pi) - \cos(n\pi)| = 2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το Θεώρημα 4.6.5 έπεται το συμπέρασμα. Υπάρχουν λοιπόν φραγμένες συνεχείς συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα συνεχείς (σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της $\cos(x^2)$ για να δείτε το λόγο: για μεγάλα x, η f ανεβαίνει από την τιμή -1 στην τιμή 1 και κατεβαίνει από την τιμή 1 στην τιμή -1 όλο και πιο γρήγορα - ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται πολύ μεγάλος).

4.6.2 Συνεχείς συναρτήσεις σε κλειστά διαστήματα

Είδαμε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $I = \mathbb{R}$ αλλά είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $I = [-M, M]$, $M > 0$ (οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι το M). Αυτό που ισχύει γενικά είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής:

Θεώρημα 4.6.6. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ και δύο ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[a, b]$ με $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού $a \leqslant x_n, y_n \leqslant b$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι (x_n) και (y_n) είναι φραγμένες ακολουθίες. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \leqslant x_{k_n} \leqslant b$ για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $a \leqslant x \leqslant b$. Δηλαδή,

$$x_{k_n} \to x \in [a, b].$$

Παρατηρήστε ότι $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα

$$y_{k_n} = x_{k_n} - (x_{k_n} - y_{k_n}) \to x - 0 = x.$$

Από τη συνέχεια της f στο x έπεται ότι

$$f(x_{k_n}) \to f(x) \quad \text{και} \quad f(y_{k_n}) \to f(x).$$

Δηλαδή,

$$f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to x - x = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο, αφού $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, b]$. □

Παρατήρηση 4.6.7. Το γεγονός ότι η f ήταν ορισμένη στο *κλειστό διάστημα* $[a, b]$ χρησιμοποιήθηκε με δύο τρόπους. Πρώτον, μπορέσαμε να βρούμε συγκλίνουσες υπακολουθίες των (x_n), (y_n) (θεώρημα Bolzano-Weierstrass). Δεύτερον, μπορούσαμε να πούμε ότι το κοινό όριο x αυτών των υπακολουθιών εξακολουθεί να βρίσκεται στο πεδίο ορισμού $[a,b]$ της f. Χρησιμοποιήσαμε δηλαδή το εξής:

$$\text{αν } a \leqslant z_n \leqslant b \text{ και } z_n \to z, \text{ τότε } a \leqslant z \leqslant b.$$

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι οι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις έχουν την εξής «καλή ιδιότητα»: απεικονίζουν βασικές ακολουθίες σε βασικές ακολουθίες. Αυτό δεν ισχύει για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις: θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x}$ στο $(0,1]$. Η $x_n = \frac{1}{n}$ είναι βασική ακολουθία στο $(0,1]$, όμως η $f(x_n) = n$ δεν είναι βασική ακολουθία.

Θεώρημα 4.6.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση και έστω (x_n) βασική ακολουθία στο A. Τότε, η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in A$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία, άρα υπάρχει $n_0(\delta)$ ώστε

$$\text{αν } m, n \geqslant n_0(\delta), \quad \text{τότε} \quad |x_n - x_m| < \delta.$$

Όμως τότε,

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Βρήκαμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα

$$\text{αν } m, n \geqslant n_0(\delta) \quad \text{τότε} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία. □

Είδαμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f ορισμένη σε κλειστό διάστημα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα εξετάσουμε το εξής ερώτημα: Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Πώς μπορούμε να ελέγξουμε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b);

Θεώρημα 4.6.9. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) αν και μόνο αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x)$. Ορίζουμε μια «επέκταση» g της f στο $[a,b]$, θέτοντας: $g(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $g(b) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$ και $g(x) = f(x)$ αν $x \in (a,b)$.

Η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ (εξηγήστε γιατί), άρα ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι κι αυτή ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b). Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Θεωρούμε $x, y \in (a,b)$ με $|x-y| < \delta$. Τότε, από τον ορισμό της g έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = |g(x) - g(y)| < \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο (a,b) και δείχνουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \to a^+} f(x)$ (η ύπαρξη του άλλου πλευρικού ορίου αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο).

Θα δείξουμε ότι αν (x_n) είναι ακολουθία στο (a,b) με $x_n \to a$, τότε η $(f(x_n))$ συγκλίνει. Αυτό είναι άμεσο από το Θεώρημα 4.6.8: η (x_n) συγκλίνει, άρα η (x_n) είναι βασική ακολουθία, άρα η $(f(x_n))$ είναι βασική ακολουθία, άρα η $(f(x_n))$ συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό ℓ.

Επίσης, το όριο της $(f(x_n))$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (x_n): έστω (y_n) μια άλλη ακολουθία στο (a,b) με $y_n \to a$. Τότε, $x_n - y_n \to 0$. Από το Θεώρημα 4.6.5,

$$f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

Ξέρουμε ήδη ότι $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \ell$, άρα

$$f(y_n) = f(x_n) - (f(x_n) - f(y_n)) \to \ell + 0 = \ell.$$

Από την αρχή της μεταφοράς (για το όριο συνάρτησης) έπεται ότι $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$. □

4.7 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0)=1$, τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{4}{5}$.

(β) Η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

(γ) Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x)=0$ αν $x\in\mathbb{N}$ και $f(x)=1$ αν $x\notin\mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0\notin\mathbb{N}$.

(δ) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ε) Υπάρχει $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(στ) Υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ζ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x, τότε είναι συνεχής σε κάθε x.

(η) Αν η f είναι συνεχής στο (a,b) και $f(q)=0$ για κάθε ρητό $q\in(a,b)$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in(a,b)$.

(ϑ) Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

(ι) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0)=-f(1)$ τότε υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

(ια) Αν η $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a,b).

(ιβ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$.

(ιγ) Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x)\sin\frac{1}{x} = 0$.

2. Έστω $n\in\mathbb{N}$.
(α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \left[x+\frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leqslant x < 1/n$.

(γ) Αποδείξτε την ταυτότητα

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$, για κάθε $x \in X$ και $y \in X$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε $f(a) = a$.

6. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) \leqslant g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x - \lambda} + \frac{\beta}{x - \mu} + \frac{\gamma}{x - \nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

9. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.

$$(\alpha) \quad \lim_{x\to 2} \tfrac{x^3-8}{x-2}, \qquad (\beta) \quad \lim_{x\to x_0} [x], \qquad (\gamma) \quad \lim_{x\to x_0} (x - [x]).$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

11. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(β) $f_k : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$

(γ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

12. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $\lim_{x\to x_0} g(x)$.

(α) Αποδείξτε ότι αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$.

13. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ και ότι $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

14. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$.

15. Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί το $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

16. Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x + 1) = f(x)$.

17. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \big[0, 1 - \frac{1}{n}\big]$ ώστε $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$.

18. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ υπάρχει $y_t \in [a, b]$ ώστε

$$f(y_t) = tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

19. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Β′ Ομάδα

20. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1, 0, 1$.

21. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

22. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a, b]$.

23. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

24. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geqslant \xi$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a, b]$ με το διάστημα $(a, b]$;

25. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

27. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

28. Έστω $f, g : [a, b] \to [c, d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

29. Αποδείξτε ότι αν $a, b > 0$ τότε

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Τι γίνεται όταν $x \to 0^-$;

30. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

31. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

32. Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

33. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

34. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geqslant f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

35. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ αποδείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

36. Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Αποδείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

38. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

39. Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$f((\alpha, \beta)) = (\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)).$$

40. Έστω $a \in [0, \pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1 = a$ και $a_{n+1} = \sin(a_n)$. Αποδείξτε ότι $a_n \to 0$.

41. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n \in [0, 1]$ ώστε $f(x_n) \to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

42. Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι

(α) η $f + g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f \cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f, g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f \cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

43. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $M = M(\varepsilon) > 0$ ώστε αν $|x| \geqslant M$ τότε $|f(x)| < \varepsilon$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

44. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

45. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

46. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

47. (α) Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

(β) Αποδείξτε ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, +\infty)$.

48. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x + 1$.

(β) $f : [2, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$.

(γ) $f : (0, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} \sin^2 x$.

(δ) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

(ε) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

(στ) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

(ζ) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^3)}{x}$.

(η) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$.

(ϑ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

(ι) $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(ια) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x \sin x$.

(ιβ) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Γ′ Ομάδα

49. Αποδείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια *συνεχής* συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) $f(n) = n\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$.

(γ) $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p, q) = 1. \end{cases}$$

51. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

52. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

54. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, αποδείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

55. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

56. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0, +\infty)$ με $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $c \in (a, b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0, +\infty)$ με $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) \to c$.

57. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε *μονότονη* ακολουθία (x_n) σημείων του (a, b) με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

58. (α) Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f(a + t_n) = L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) = L$ τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

59. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a, b])$.

60. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι επί.

61. Έστω $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g \circ f = f \circ g$. Αποδείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y \in [0, 1]$ ώστε $f(y) = y$ και $g(y) = y$. [*Υπόδειξη:* Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0, 1]$ με $g(x_1) = x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1) = x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, αποδείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).]

62. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0 \in [a, b]$ υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Παράγωγος

5.1 Ορισμός της παραγώγου

Ορισμός 5.1.1. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$. Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* στο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Το όριο $f'(x_0)$ (αν υπάρχει) λέγεται *παράγωγος* της f στο x_0. Θέτοντας $h = x - x_0$ βλέπουμε ότι, ισοδύναμα,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Σημείωση. Αν $f : I \to \mathbb{R}$ όπου I διάστημα και αν το $x_0 \in I$ είναι αριστερό ή δεξιό άκρο του I, τότε ορίζουμε την παράγωγο $f'(x_0)$ (αν υπάρχει) μέσω του πλευρικού ορίου $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ή $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ αντίστοιχα.

Παραδείγματα 5.1.2. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 0$. Πράγματι,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0 \to 0$$

καθώς το $h \to 0$.

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 1$. Πράγματι,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1 \to 1$$

καθώς το $h \to 0$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (και είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \neq 0$). Πράγματι,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1,$$

ενώ

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1.$$

Αφού τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ δεν υπάρχει.

(δ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = 2x_0$. Πράγματι,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h \to 2x_0$$

καθώς το $h \to 0$.

(ε) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) = \cos x_0$. Πράγματι,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \frac{1}{h} \cdot 2 \sin\frac{h}{2} \cos\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) \to \cos x_0$$

καθώς το $h \to 0$, αφού $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$ και $\lim_{h\to 0} \cos(x_0 + h/2) = \cos x_0$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \cos x$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ και $g'(x_0) = -\sin x_0$.

(στ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: παρατηρούμε ότι

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} h & \text{αν } h \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{αν } h \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Έπεται ότι $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$. Δηλαδή, $f'(0) = 0$. Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x_0 \neq 0$ (και είναι συνεχής στο 0).

(ζ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \geqslant 0 \\ x^2 & \text{αν } x < 0 \end{cases}$. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Για το σημείο 0, θεωρούμε το

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \begin{cases} h^2 & \text{αν } h > 0 \\ h & \text{αν } h < 0 \end{cases}$$

Έπεται ότι το όριο $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Δηλαδή, $f'(0) = 0$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $f'(x_0) = 3x_0^2$ αν $x_0 > 0$ και $f'(x_0) = 2x_0$ αν $x_0 < 0$.

Θεώρημα 5.1.3. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a,b)$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Για $x \neq x_0$ γράφουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Αφού

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, και συνεπώς, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι συνεχής στο x_0. □

Παρατήρηση 5.1.4. Το αντίστροφο δεν ισχύει: αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0. Για παράδειγμα, η $f(x) = |x|$ είναι συνεχής στο 0 αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

5.2 Κανόνες παραγώγισης

Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων, μπορούμε να αποδείξουμε τους βασικούς «κανόνες παραγώγισης» σε σχέση με τις άλγεβρικές πράξεις μεταξύ συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0 \in (a, b)$. Υποθέτουμε ότι οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0. Τότε:*

(α) *Η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*

(β) *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η $t \cdot f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(t \cdot f)'(x_0) = t \cdot f'(x_0)$.*

(γ) *Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.*

(δ) *Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$, τότε η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Απόδειξη. Ας δούμε για παράδειγμα την απόδειξη του (γ): γράφουμε

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x_0 + h) - (f \cdot g)(x_0)}{h} &= f(x_0 + h)\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \\ &\quad + g(x_0)\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \end{aligned}$$

για $h \neq 0$ (κοντά στο 0).

Έχουμε $\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = g'(x_0)$ και $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο x_0. Συνεπώς, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Αφήνοντας το $h \to 0$, και χρησιμοποιώντας τις βασικές ιδιότητες των ορίων, παίρνουμε το ζητούμενο.

Για το (δ) αρκεί να δείξουμε ότι η $1/g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και έχει παράγωγο ίση με $-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ (και να εφαρμόσουμε το (γ)). Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{g(x_0 + h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) &= \lim_{h \to 0} \left(\frac{g(x_0) - g(x_0 + h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x_0 + h)g(x_0)}\right) \\ &= -g'(x_0) \cdot \frac{1}{g(x_0)^2}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\lim_{h\to 0} g(x_0+h) = g(x_0)$, που ισχύει λογω της συνέχειας της g στο x_0. □

Άμεσες συνέπειες του προηγούμενου θεωρήματος είναι οι εξής:

(i) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα, αν $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, τότε

$$p'(x) = ma_m x^{m-1} + (m-1)a_{m-1}x^{m-2} + \cdots + a_1.$$

(ii) Κάθε ρητή συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

5.2.1 Κανόνας της αλυσίδας

Πρόταση 5.2.2 (παρατήρηση του Καραθεοδωρή). *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in(a,b)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο x_0 και ικανοποιεί την $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ για κάθε $x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$. Τότε, $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Ορίζουμε $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ ως εξής:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{αν } x\neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{αν } x = x_0 \end{cases}$$

Η φ είναι συνεχής στο x_0: πράγματι,

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) = \varphi(x_0).$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ όπως στην Πρόταση. Αφού η φ είναι συνεχής στο x_0, έχουμε $\lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Δηλαδή, υπάρχει το

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\varphi(x) = \varphi(x_0).$$

Από τον ορισμό της παραγώγου, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = \varphi(x_0)$. □

Θεώρημα 5.2.3 (κανόνας της αλυσίδας). *Έστω $f:(a,b)\to(c,d)$ και $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0)}{x-x_0}$$

υπάρχει και είναι ίσο με $g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$. Θέτουμε $y_0 = f(x_0)\in(c,d)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\psi:(c,d)\to\mathbb{R} \quad \text{όπου} \quad \psi(y) = \begin{cases} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{αν } y\neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{αν } y = y_0 \end{cases}$$

Η ψ είναι συνεχής στο y_0, διότι η g είναι παραγωγίσιμη στο y_0.

Έστω $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$. Αν $f(x) \neq f(x_0)$, τότε

$$\psi(f(x)) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)},$$

άρα έχουμε

$$(*) \qquad \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \psi(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Αν για το x ισχύει $f(x) = f(x_0)$ τότε η $(*)$ εξακολουθεί να ισχύει (τα δύο μέλη μηδενίζονται). Δηλαδή, η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in (a,b)\backslash\{x_0\}$.

Παρατηρούμε ότι το όριο $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ υπάρχει και ισούται με $f'(x_0)$. Επίσης, η f είναι συνεχής στο x_0 και η ψ είναι συνεχής στο $y_0 = f(x_0)$, άρα η σύνθεσή τους $\psi \circ f$ είναι συνεχής στο x_0. Συνεπώς, το όριο $\lim_{x\to x_0} \psi(f(x))$ υπάρχει και ισούται με $\psi(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0))$. Επιστρέφοντας στην $(*)$ και παίρνοντας το όριο καθώς το $x \to x_0$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \psi(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

5.2.2 Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ μια $1-1$ και συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ και ότι $f'(x_0) \neq 0$. Τότε, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Η $f'(x_0)$ υπάρχει, δηλαδή

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Επιπλέον έχουμε υποθέσει οτι $f'(x_0) \neq 0$, άρα

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (a,b)$ και αν $0 < |x - x_0| < \delta$ τότε

$$(*) \qquad \left| \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$y_1 = f\left(x_0 - \delta\right) \quad \text{και} \quad y_2 = f\left(x_0 + \delta\right).$$

Τότε, το (y_1, y_2) είναι ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το $f(x_0)$, άρα υπάρχει $\delta_1 > 0$ ώστε

$$(f(x_0) - \delta_1, f(x_0) + \delta_1) \subseteq (y_1, y_2) = (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)).$$

Έστω y που ικανοποιεί την $0 < |y - f(x_0)| < \delta_1$. Τότε, $y = f(x)$ για κάποιο $x \in (a, b)$ με $0 < |x - x_0| < \delta$. Άρα,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

οπότε η $(*)$ δίνει

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} - \frac{1}{f'(x_0)} \right| < \varepsilon.$$

Αφου το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται οτι

$$\lim_{y \to f(x_0)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Δηλαδή, η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$ και $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Παρατήρηση 5.2.5. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η $(f^{-1})'(y_0)$ δεν υπάρχει. Αλλιώς, από τον κανόνα της αλυσίδας η παράγωγος της σύνθεσης $f^{-1} \circ f$ στο x_0 θα υπήρχε, και θα είχαμε

$$(f^{-1} \circ f)'(x_0) = (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 0.$$

Όμως, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, άρα $(f^{-1} \circ f)'(x_0) = 1$, οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο.

5.2.3 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός 5.2.6. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a, b)$. Η *παράγωγος συνάρτηση* της f είναι η συνάρτηση $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f'(x)$. Αν η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε η παράγωγος συνάρτηση της f' ορίζεται στο (a, b), λέγεται *δεύτερη παράγωγος* της f, και συμβολίζεται με f''.

Επαγωγικά, αν έχει οριστεί η n-οστή παράγωγος $f^{(n)} : (a, b) \to \mathbb{R}$ της f και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (a, b), τότε η παράγωγος της $f^{(n)}$, ορίζεται στο (a, b), λέγεται *η $(n+1)$–τάξης παράγωγος* της f στο (a, b) και συμβολίζεται με $f^{(n+1)}$.

Μια συνάρτηση που έχει παράγωγο τάξης n λέγεται n φορές παραγωγίσιμη. Μια συνάρτηση $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ λέγεται *απεριόριστα παραγωγίσιμη* στο σημείο $x_0 \in (a, b)$ αν η $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 5.2.7. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$. Οι συντελεστές του πολυωνύμου p «υπολογίζονται» από τις

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m.$$

Η απόδειξη γίνεται με διαδοχικές παραγωγίσεις και υπολογισμό της $p^{(k)}(0)$. Αν $k > m$, τότε η $p^{(k)}$ είναι μηδενίζεται σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.3 Παράγωγος εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης

Σε αυτή τη σύντομη παράγραφο αποδεικνύουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $\exp(x) = e^x$ είναι παραγωγίσιμη. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το γενικό μας αποτέλεσμα για την παράγωγο αντίστροφης συνάρτησης, βρίσκουμε την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης ln. Οι τύποι για τις παραγώγους των υπόλοιπων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων προκύπτουν με απλή εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας.

Πρόταση 5.3.1. *Η εκθετική συνάρτηση* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ *με* $\exp(x) = e^x$ *είναι παραγωγίσιμη και*

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Ξεκινάμε από δύο ανισότητες που συναντήσαμε στις Ασκήσεις του Κεφαλαίου 1: αν $a \geqslant -1$ τότε $(1+a)^n \geqslant 1 + na$ (ανισότητα Bernoulli) και αν $0 \leqslant a < 1/n$ τότε $(1+a)^n < \frac{1}{1-na}$ (δείξτε την με επαγωγή ως προς n). Έστω s ρητός αριθμός στο $(0,1)$. Μπορούμε να γράψουμε $s = p/q$, όπου $p < q$ φυσικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε ότι $e > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$, οπότε χρησιμοποιώντας την πρώτη ανισότητα βλέπουμε ότι

$$e^s > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{qs} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geqslant 1 + \frac{p}{q} = 1 + s.$$

Επίσης, αφού $1/q < 1/p$, από την δεύτερη ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kp} < \frac{1}{1 - p/q} = \frac{1}{1-s}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$e^s = \left[\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kq}\right]^{p/q} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{kq}\right)^{kp} \leqslant \frac{1}{1-s}.$$

Με άλλα λόγια,

$$(*) \qquad 1 + s \leqslant e^s \leqslant \frac{1}{1-s}$$

για κάθε $s \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$. Έστω τώρα $t \in (0,1)$. Θεωρώντας ακολουθία (s_n) στο $(0,1)\cap\mathbb{Q}$ με $s_n \to t$, και χρησιμοποιώντας την αρχή της μεταφοράς για τις τρεις συναρτήσεις στην $(*)$, συμπεραίνουμε ότι

$$1 + t \leqslant e^t \leqslant \frac{1}{1-t}$$

για κάθε $t \in (0,1)$. Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$0 \leqslant \frac{e^t - 1}{t} - 1 \leqslant \frac{t}{1-t},$$

και αφήνοντας το $t \to 0^+$ παίρνουμε

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

Για το όριο καθώς $t \to 0^-$ θέτουμε $u = -t$ και έχουμε

$$\frac{e^t - 1}{t} = \frac{e^{-u} - 1}{-u} = e^{-u} \frac{e^u - 1}{u} \to 1 \cdot 1 = 1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το προηγούμενο όριο και τη συνέχεια της εκθετικής συνάρτησης στο 0.

Έστω τώρα $x \in \mathbb{R}$: έχουμε

$$\frac{e^{x+t} - e^x}{t} = \frac{e^x e^t - e^x}{t} = e^x \frac{e^t - 1}{t} \to e^x \cdot 1 = e^x$$

καθώς το $t \to 0^+$, άρα η exp είναι παραγωγίσιμη στο x και $(\exp)'(x) = \exp(x)$. □

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο είδαμε ότι η $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα και επί. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία συμβολίζεται με ln. Δηλαδή, $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και $\ln y = x$ αν και μόνο αν $e^x = y$.

Πρόταση 5.3.2. *Η λογαριθμική συνάρτηση* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *είναι παραγωγίσιμη και*

$$\ln'(y) = \frac{1}{y}$$

για κάθε $y > 0$.

Απόδειξη. Είδαμε ότι η exp είναι παραγωγίσιμη και $\exp'(x) = \exp(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η ln είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)},$$

όπου $\exp(x) = y$. Με άλλα λόγια, $\ln'(y) = \frac{1}{y}$ για κάθε $y \in (0, +\infty)$. □

5.4 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

(α) Τόξο ημιτόνου

Η συνάρτηση $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ είναι περιοδική, με ελάχιστη θετική περίοδο ίση με 2π. Ο περιορισμός της στο $[-\pi/2, \pi/2]$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $[-1, 1]$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται *τόξο ημιτόνου* και συμβολίζεται με arcsin.

Δηλαδή, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ και $\arcsin y = x$ αν και μόνο αν $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ και $\sin x = y$.

Παρατηρώντας ότι η sin είναι παραγωγίσιμη στο $[-\pi/2, \pi/2]$ και $\sin'(x) = \cos x \neq 0$ αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, συμπεραίνουμε ότι η arcsin είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x},$$

όπου $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $\sin x = y$. Χρησιμοποιώντας την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και το γεγονός ότι $\cos x > 0$, βλέπουμε ότι

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

δηλαδή

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad y \in (-1,1).$$

(β) Τόξο συνημιτόνου

Η συνάρτηση $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$ είναι περιοδική, με ελάχιστη θετική περίοδο ίση με 2π. Ο περιορισμός της στο $[0,\pi]$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με σύνολο τιμών το $[-1,1]$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται *τόξο συνημιτόνου* και συμβολίζεται με arccos.

Δηλαδή, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ και $\arccos y = x$ αν και μόνο αν $x \in [0,\pi]$ και $\cos x = y$.

Παρατηρώντας ότι η cos είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\pi]$ και $\cos'(x) = -\sin x \neq 0$ αν $x \in (0,\pi)$, συμπεραίνουμε ότι η arccos είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και

$$\arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin x},$$

όπου $x \in (0,\pi)$ και $\cos x = y$. Χρησιμοποιώντας την $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ και το γεγονός ότι $\sin x > 0$, βλέπουμε ότι

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-y^2},$$

δηλαδή

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \qquad y \in (-1,1).$$

(γ) Τόξο εφαπτομένης

Η συνάρτηση $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και επί. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την αντίστροφή της, η οποία λέγεται *τόξο εφαπτομένης* και συμβολίζεται με arctan.

Δηλαδή, $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ και $\arctan y = x$ αν και μόνο αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ και $\tan x = y$.

Παρατηρώντας ότι η tan είναι παραγωγίσιμη στο $(-\pi/2, \pi/2)$ και $\tan'(x) = 1/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x \neq 0$ αν $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, συμπεραίνουμε ότι η arctan είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x},$$

όπου $\tan x = y$. Έπεται ότι

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

5.5 Κρίσιμα σημεία

Σκοπός μας στις επόμενες Παραγράφους είναι να αποδείξουμε τα κύρια θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού και να δούμε πώς εφαρμόζονται στη μελέτη συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Θα ξεκινήσουμε με κάποια παραδείγματα που δείχνουν ότι η μονοτονία ή η ύπαρξη κάποιου τοπικού ακρότατου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δίνουν κάποιες πληροφορίες για την παράγωγο. Το μοναδικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ο ορισμός της παραγώγου.

Λήμμα 5.5.1. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι αύξουσα στο (a,b) τότε $f'(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in(a,b)$.*

Απόδειξη. Έστω $x\in(a,b)$. Υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x-\delta,x+\delta)\subset(a,b)$. Αν λοιπόν $|h|<\delta$ τότε η f ορίζεται στο $x+h$.

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x, έχουμε

$$f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Έστω $0<h<\delta$. Αφού η f είναι αύξουσα στο (a,b) έχουμε $f(x+h)\geqslant f(x)$. Συνεπώς,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0 \quad \text{άρα} \quad f'(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant 0.$$

Παρατηρήστε ότι δείξαμε το ζητούμενο χωρίς να κοιτάξουμε τι γίνεται για αρνητικές τιμές του h (ελέγξτε όμως ότι αν $-\delta<h<0$ τότε η κλίση $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ είναι πάλι μη αρνητική, οπότε οδηγούμαστε στο ίδιο συμπέρασμα). □

Παρατήρηση 5.5.2. Αν υποθέσουμε ότι η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι *γνησίως αύξουσα*, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η f' είναι *γνησίως θετική* στο (a,b). Για παράδειγμα, η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όμως $f'(x)=3x^2$, άρα *υπάρχει* σημείο στο οποίο η παράγωγος μηδενίζεται: $f'(0)=0$. Το Λήμμα 5.5.1 μας εξασφαλίζει φυσικά ότι $f'\geqslant 0$ παντού στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 5.5.3. Το αντίστροφο ερώτημα διατυπώνεται ως εξής: αν $f'(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in(a,b)$ τότε είναι σωστό ότι η f είναι αύξουσα στο (a,b); Η απάντηση είναι «ναι», αυτή είναι μία από τις βασικές συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής (βλέπε §5.6). Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό της παραγώγου, μπορούμε να δείξουμε κάτι πολύ ασθενέστερο:

Λήμμα 5.5.4. *Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(a,b)$ και $f'(x_0)>0$. Τότε, υπάρχει $\delta>0$ ώστε $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subseteq(a,b)$ και*

(α) *$f(x)>f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$.*

(β) *$f(x)<f(x_0)$ για κάθε $x\in(x_0-\delta,x_0)$.*

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0$. Εφαρμόζοντας τον $\varepsilon-\delta$ ορισμό του ορίου με $\varepsilon=\frac{f'(0)}{2}>0$, βρίσκουμε $\delta>0$ ώστε: αν $0<|x-x_0|<\delta$ τότε $x\in(a,b)$ και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>f'(x_0)-\varepsilon=\frac{f'(x_0)}{2}>0.$$

Έπεται ότι:

(α) Για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$ έχουμε

$$f(x)-f(x_0)>\frac{f'(x_0)}{2}(x-x_0)>0 \text{ άρα } f(x)>f(x_0).$$

(β) Για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) < \frac{f'(x_0)}{2}(x - x_0) < 0 \text{ άρα } f(x) < f(x_0). \qquad \square$$

Παρατηρήστε ότι τα (α) και (β) δεν δείχνουν ότι η f είναι αύξουσα στο $(x_0, x_0+\delta)$ ή στο $(x_0-\delta, x_0)$. $\square$

Ορισμός 5.5.5. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in I$. Λέμε ότι η f έχει *τοπικό μέγιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \geqslant f(x).$$

Ομοίως, λέμε ότι η f έχει *τοπικό ελάχιστο* στο x_0 αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε:

$$\text{αν } x \in I \text{ και } |x - x_0| < \delta \text{ τότε } f(x_0) \leqslant f(x).$$

Αν η f έχει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο στο x_0 τότε λέμε ότι η f έχει *τοπικό ακρότατο* στο σημείο x_0.

Αυτό που χρειαστήκαμε για την απόδειξη του Λήμματος 5.5.1 ήταν η ύπαρξη της $f'(x)$ (ο ορισμός της παραγώγου) και το γεγονός ότι (λόγω μονοτονίας) η ελάχιστη τιμή της f στο $[x, x+\delta)$ ήταν η $f(x)$. Επαναλαμβάνοντας λοιπόν το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα παίρνουμε την ακόλουθη Πρόταση (Fermat).

Θεώρημα 5.5.6 (Fermat). *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$ και ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ και $f(x_0 + h) \leqslant f(x_0)$ για κάθε $h \in (-\delta, \delta)$.

Αν $0 < h < \delta$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leqslant 0.$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \leqslant 0$.

Αν $-\delta < h < 0$ τότε

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0, \quad \text{άρα} \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geqslant 0.$$

Συνεπώς, $f'(x_0) \geqslant 0$.

Από τις δύο ανισότητες έπεται ότι $f'(x_0) = 0$. $\square$

Ορισμός 5.5.7. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο x_0 του I λέγεται *κρίσιμο σημείο για την f* αν $f'(x_0) = 0$.

Παράδειγμα 5.5.8. Τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης είναι πολύ χρήσιμα όταν θέλουμε να βρούμε τη μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή της. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή $\max(f)$ και ελάχιστη τιμή $\min(f)$ στο $[a, b]$. Αν $x_0 \in [a, b]$ και $f(x_0) = \max(f)$ ή $f(x_0) = \min(f)$, τότε αναγκαστικά συμβαίνει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ (άκρο του διαστήματος).

(ii) $x_0 \in (a, b)$ και $f'(x_0) = 0$ (κρίσιμο σημείο).

(iii) $x_0 \in (a, b)$ και η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δεδομένου ότι, στην πράξη, το πλήθος των σημείων που ανήκουν σε αυτές τις «τρεις ομάδες» είναι σχετικά μικρό, μπορούμε με απλό υπολογισμό και σύγκριση μερικών τιμών της συνάρτησης να απαντήσουμε στο ερώτημα.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ στο $[-1, 2]$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 1$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ και $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ τα οποία ανήκουν στο $(-1, 2)$. Άρα, τα σημεία στα οποία μπορεί να παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή η f είναι τα άκρα του διαστήματος και τα δύο κρίσιμα σημεία:

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_3 = 2.$$

Οι αντίστοιχες τιμές είναι:

$$f(-1) = 0, \quad f(-1/\sqrt{3}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad f(2) = 6.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις τέσσερις τιμές βλέπουμε ότι $\max(f) = f(2) = 6$ και $\min(f) = f(1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$. □

5.6 Θεώρημα Μέσης Τιμής

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε οτι η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b): δηλαδή, για κάθε $x \in (a, b)$ ορίζεται καλά η εφαπτομένη του γραφήματος της f στο $(x, f(x))$. Θεωρούμε την ευθεία (ℓ) που περνάει από τα σημεία $A = (a, f(a))$ και $B = (b, f(b))$. Αν τη μετακινήσουμε παράλληλα προς τον εαυτό της, κάποια από τις παράλληλες θα εφάπτεται στο γράφημα της f σε κάποιο σημείο $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Η κλίση της εφαπτομένης θα πρέπει να ισούται με την κλίση της ευθείας (ℓ). Δηλαδή,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Στο πρώτο μέρος αυτής της παραγράφου δίνουμε αυστηρή απόδειξη αυτού του ισχυρισμού (Θεώρημα Μέσης Τιμής). Αποδεικνύουμε πρώτα μια ειδική περίπτωση: το θεώρημα του Rolle.

Θεώρημα 5.6.1 (Rolle)**.** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(a) = f(b)$. Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = 0.$$

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που η f είναι σταθερή στο $[a, b]$, δηλαδή $f(x) = f(a) = f(b)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Τότε, $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$ και οποιοδήποτε από αυτά τα x μπορεί να παίξει το ρόλο του x_0.

Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι σταθερή στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $x_1 \in (a,b)$ ώστε $f(x_1) \neq f(a)$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x_1) > f(a)$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε

$$f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \geqslant f(x_1) > f(a).$$

Ειδικότερα, $x_0 \neq a, b$. Δηλαδή, το x_0 βρίσκεται στο ανοικτό διάστημα (a,b). Η f έχει (ολικό) μέγιστο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Από το Θεώρημα 5.5.6 (Fermat) συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0) = 0$. □

Το θεώρημα μέσης τιμής είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Rolle.

Θεώρημα 5.6.2 (θεώρημα μέσης τιμής)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b). Τότε, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Απόδειξη. Θα αναχθούμε στο Θεώρημα του Rolle ως εξής. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ που παίρνει τις ίδιες τιμές με την f στα σημεία a και b. Δηλαδή,

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = f(x) - h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Η g είναι συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b) και από τον τρόπο επιλογής της h έχουμε

$$g(a) = f(a) - h(a) = 0 \quad \text{και} \quad g(b) = f(b) - h(b) = 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $g'(x_0) = 0$. Όμως,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

στο (a,b). Άρα, το x_0 ικανοποιεί το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.6.3. Η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο *κλειστό διάστημα* $[a,b]$ χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη και είναι απαραίτητη. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $0 \leqslant x < 1$ και $f(1) = 0$. Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα, συνεχής) στο $(0,1)$ και έχουμε $f(0) = f(1) = 0$. Όμως δεν υπάρχει $x \in (0,1)$ που να ικανοποιεί την $f'(x) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0$, αφού $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in (0,1)$. Το πρόβλημα είναι στο σημείο 1: η f είναι ασυνεχής στο 1, δηλαδή δεν είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής είναι η εξής.

Θεώρημα 5.6.4. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(i) *Αν* $f'(x) \geqslant 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε η* f *είναι αύξουσα στο* (a,b).

(ii) *Αν* $f'(x) > 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε η* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* (a,b).

(iii) *Αν* $f'(x) \leqslant 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε η* f *είναι φθίνουσα στο* (a,b).

(iv) *Αν* $f'(x) < 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε η* f *είναι γνησίως φθίνουσα στο* (a,b).

(v) *Αν* $f'(x) = 0$ *για κάθε* $x \in (a,b)$, *τότε η* f *είναι σταθερή στο* (a,b).

Απόδειξη. Θα δείξουμε έναν από τους πρώτους τέσσερις ισχυρισμούς: υποθέτουμε ότι $f'(x) \geqslant 0$ στο (a,b), και θα δείξουμε ότι αν $a < x < y < b$ τότε $f(x) \leqslant f(y)$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $[x,y]$. Η f είναι συνεχής στο $[x,y]$ και παραγωγίσιμη στο (x,y), οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής βρίσκουμε $\xi \in (x,y)$ που ικανοποιεί την

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Αφού $f'(\xi) \geqslant 0$ και $y - x > 0$, έχουμε $f(y) - f(x) \geqslant 0$. Δηλαδή, $f(x) \leqslant f(y)$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρήστε ότι αν $f' = 0$ στο (a,b) τότε $f' \geqslant 0$ και $f' \leqslant 0$ στο (a,b). Άρα, η f είναι ταυτόχρονα αύξουσα και φθίνουσα: αν $x < y$ στο (a,b) τότε $f(x) \leqslant f(y)$ και $f(x) \geqslant f(y)$, δηλαδή $f(x) = f(y)$. Έπεται ότι η f είναι σταθερή. □

Μια παραλλαγή (και γενίκευση) του θεωρήματος Μέσης Τιμής είναι το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy:

Θεώρημα 5.6.5 (θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy)**.** *Έστω* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *συνεχείς στο* $[a,b]$ *και παραγωγίσιμες στο* (a,b). *Τότε, υπάρχει* $x_0 \in (a,b)$ *ώστε*

$$(*) \qquad [f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0).$$

Σημείωση: Παρατηρήστε πρώτα ότι το θεώρημα μέσης τιμής είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος που θέλουμε να δείξουμε: αν $g(x) = x$ τότε $g'(x) = 1$ και η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$[f(b) - f(a)] \cdot 1 = (b - a)\, f'(x).$$

Η ύπαρξη κάποιου $x_0 \in (a,b)$ το οποίο ικανοποιεί αυτήν την ισότητα είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του θεωρήματος μέσης τιμής.

Θυμηθείτε τώρα την ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος μέσης τιμής. Εφαρμόσαμε το θεώρημα του Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ισοδύναμα (πολλαπλασιάστε την προηγούμενη συνάρτηση με $b - a$) θα μπορούσαμε να έχουμε πάρει την

$$[f(x) - f(a)]\,(b - a) - [f(b) - f(a)]\,(x - a).$$

Θα θεωρήσουμε λοιπόν συνάρτηση αντίστοιχη με αυτήν, «αντικαθιστώντας την x με την $g(x)$».

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = [f(x) - f(a)]\,(g(b) - g(a)) - [f(b) - f(a)]\,(g(x) - g(a)).$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) (γιατί οι f και g έχουν τις ίδιες ιδιότητες). Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$h(a) = 0 = h(b).$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle: υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε $h'(x_0) = 0$. Αφού

$$h'(x_0) = f'(x_0)\,(g(b) - g(a)) - g'(x_0)\,(f(b) - f(a)),$$

παίρνουμε την $(*)$. □

Παρατήρηση 5.6.6. Το ενδιαφέρον σημείο στην $(*)$ είναι ότι οι παράγωγοι $f'(x_0)$ και $g'(x_0)$ «υπολογίζονται στο ίδιο σημείο» x_0.

Πολύ συχνά, το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy διατυπώνεται ως εξής.

Πόρισμα 5.6.7. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Υποθέτουμε επιπλέον ότι*

(α) *οι f' και g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (a, b).*

(β) *$g(b) - g(a) \neq 0$.*

Τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy, υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ ώστε

$$(f(b) - f(a))g'(x_0) = (g(b) - g(a))f'(x_0).$$

Παρατηρούμε ότι $g'(x_0) \neq 0$: αν είχαμε $g'(x_0) = 0$, τότε θα ήταν $(g(b) - g(a))f'(x_0) = 0$ και, αφού από την υπόθεσή μας $g(b) - g(a) \neq 0$, θα έπρεπε να έχουμε $f'(x_0) = 0$. Δηλαδή οι f' και g' θα είχαν κοινή ρίζα. Μπορούμε λοιπόν να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της ισότητας με $(g(b) - g(a))g'(x_0)$ και να πάρουμε το ζητούμενο. □

5.7 Απροσδιόριστες μορφές

Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy χρησιμοποιείται στην απόδειξη των «κανόνων του L' Hospital» για όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$. Τυπικά παραδείγματα της κατάστασης που θα συζητήσουμε σε αυτή την παράγραφο είναι τα εξής: θέλουμε να εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

όπου f, g είναι δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες δεξιά και αριστερά από το x_0, με $g(x) \neq 0$ αν x κοντά στο x_0 και $x \neq x_0$ και

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

ή

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty.$$

Τότε λέμε ότι έχουμε *απροσδιόριστη μορφή* $\frac{0}{0}$ (ή $\frac{\infty}{\infty}$ αντίστοιχα) στο x_0.

Οι κανόνες του l'Hospital μας επιτρέπουν συχνά να βρούμε τέτοια όρια (αν υπάρχουν) με τη βοήθεια των παραγώγων των f και g. Τυπικό θεώρημα αυτού του είδους είναι το εξής.

Θεώρημα 5.7.1. *Έστω $f, g : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *$g(x) \neq 0$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, b)$.*

(β) *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$.*

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τις f και g στο x_0 θέτοντας $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Αφού

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0,$$

οι f και g γίνονται τώρα συνεχείς στο (a, b). Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Έχουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

για κάθε $x \in (x_0, b)$. Οι f', g' δεν έχουν κοινή ρίζα στο (x_0, x) γιατί η g' δεν μηδενίζεται πουθενά. Επίσης $g(x) \neq 0$, δηλαδή $g(x) - g(x_0) \neq 0$. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy μπορούμε για κάθε $x \in (x_0, b)$ να βρούμε $\xi_x \in (x_0, x)$ ώστε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Έστω τώρα ότι $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ και έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $x_0 < y < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι αν $x_0 < x < x_0 + \delta$ τότε

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

(γιατί $x_0 < \xi_x < x < x_0 + \delta$). Άρα,

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$. □

Ο αντίστοιχος κανόνας όταν $x_0 = +\infty$ είναι ο εξής.

Θεώρημα 5.7.2. *Έστω $f, g : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ *και* $g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x > a$.

(β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$ *τότε υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ *και*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $f_1, g_1 : \left(0, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$ με

$$f_1(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{και} \quad g_1(x) = g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Οι f_1, g_1 είναι παραγωγίσιμες και

$$\frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \frac{-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2} g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to0^+} g_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (γιατί;). Επίσης, $g_1 \neq 0$ και $g_1' \neq 0$ στο $(0, 1/a)$. Τέλος,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{x}\right)}{g'\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Άρα, εφαρμόζεται το Θεώρημα 5.7.1 για τις f_1, g_1 και έχουμε

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f_1'(x)}{g_1'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Αφού

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0^+} \frac{f_1(x)}{g_1(x)},$$

έπεται το ζητούμενο. □

Υπάρχουν αρκετές ακόμα περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών για τις οποίες μπορούμε να διατυπώσουμε κατάλληλο «κανόνα του l'Hospital». Δεν θα δώσουμε άλλες αποδείξεις, ας δούμε όμως τη διατύπωση ενός κανόνα για απροσδιόριστη μορφή $\frac{\infty}{\infty}$.

Θεώρημα 5.7.3. *Έστω $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις με τις εξής ιδιότητες:*

(α) $g(x) \neq 0$ *και* $g'(x) \neq 0$ *για κάθε* $x \in (a, b)$.

(β) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$.

Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$, *τότε υπάρχει το* $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *και*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

5.8 Γεωμετρική σημασία της δεύτερης παραγώγου

Είδαμε ότι ο μηδενισμός της παραγώγου σε ένα σημείο x_0 δεν είναι ικανή συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ακρότατου στο x_0. Η συνάρτηση $f(x) = x^3$ δεν έχει ακρότατο στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x_0) = 0$. Κοιτάζοντας τη δεύτερη παράγωγο στα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου μπορούμε πολλές φορές να συμπεράνουμε αν ένα κρίσιμο σημείο είναι όντως σημείο ακρότατου.

Θεώρημα 5.8.1. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a,b)$ με $f'(x_0) = 0$.*

(α) *Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) > 0$, τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο στο x_0.*

(β) *Αν υπάρχει η $f''(x_0)$ και $f''(x_0) < 0$, τότε έχουμε τοπικό μέγιστο στο x_0.*

Σημείωση: Αν $f''(x_0) = 0$ ή αν δεν υπάρχει η $f''(x_0)$, τότε πρέπει να εξετάσουμε τι συμβαίνει με άλλο τρόπο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο το (α). Έχουμε

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

(i) Αν $x_0 < x < x_0 + \delta$, τότε $f'(x) > 0$.

(ii) Αν $x_0 - \delta < x < x_0$ τότε $f'(x) < 0$.

Έστω $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

(i) Αν $x_0 < y < x_0 + \delta$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, y]$ βρίσκουμε $x \in (x_0, y)$ ώστε
$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x_0) > 0.$$

(ii) Αν $x_0 - \delta < y < x_0$, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[y, x_0]$ βρίσκουμε $x \in (y, x_0)$ ώστε
$$f(y) - f(x) = f'(x)(y - x_0) > 0.$$

Δηλαδή, $f(y) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Άρα, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. □

5.8.1 Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in (a,b)$, η «εξίσωση της εφαπτομένης» του γραφήματος της f στο $(x_0, f(x_0))$ είναι η

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Λέμε ότι η f είναι *κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x_0 \in (a,b)$ έχουμε

$$(*) \qquad f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (a,b)$. Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη. Λέμε ότι η f είναι *γνησίως κυρτή* στο (a,b) αν για κάθε $x \neq x_0$ η ανισότητα στην $(*)$ είναι γνήσια.

Λέμε ότι η f είναι *κοίλη* στο (a,b) αν για κάθε $x_0 \in (a,b)$ έχουμε

$$(**) \qquad f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

για κάθε $x \in (a,b)$. Δηλαδή, αν το γράφημα $\{(x, f(x)) : a < x < b\}$ βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη. Λέμε ότι η f είναι *γνησίως κοίλη* στο (a,b) αν για κάθε $x \neq x_0$ η ανισότητα στην $(**)$ είναι γνήσια.

Τέλος, λέμε ότι η f έχει *σημείο καμπής* στο σημείο $x_0 \in (a,b)$ αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως κυρτή στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γνησίως κοίλη στο $(x_0, x_0 + \delta)$ ή γνησίως κοίλη στο $(x_0 - \delta, x_0)$ και γνησίως κυρτή στο $(x_0, x_0 + \delta)$.

Θεώρημα 5.8.2. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Αν η f' είναι (γνησίως) αύξουσα στο (a,b), τότε η f είναι (γνησίως) κυρτή στο (a,b).

(β) Αν η f' είναι (γνησίως) φθίνουσα στο (a,b), τότε η f είναι (γνησίως) κοίλη στο (a,b).

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in (a,b)$ και έστω $x \in (a,b)$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $x > x_0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_x \in (x_0, x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_x).$$

Αφού $x_0 < \xi_x$ έχουμε $f'(\xi_x) \geqslant f'(x_0)$, και αφού $x - x_0 > 0$ βλέπουμε ότι

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_x) \geqslant (x - x_0) f'(x_0).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x < x_0$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi_x \in (x, x_0)$ με την ιδιότητα

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_x).$$

Αφού $\xi_x < x_0$ έχουμε $f'(\xi_x) \leqslant f'(x_0)$, και αφού $x - x_0 < 0$ βλέπουμε ότι

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(\xi_x) \geqslant (x - x_0) f'(x_0).$$

Σε κάθε περίπτωση, ισχύει η $(*)$. Ελέγξτε ότι αν η f' υποτεθεί γνησίως αύξουσα στο (a,b) τότε παίρνουμε γνήσια ανισότητα στην $(*)$.

(β) Με τον ίδιο τρόπο. □

Η δεύτερη παράγωγος (αν υπάρχει) μπορεί να μας δώσει πληροφορία για το αν η f είναι κυρτή ή κοίλη.

Θεώρημα 5.8.3. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση.*

(α) Αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως κυρτή στο (a,b).

(β) Αν $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (a,b)$, τότε η f είναι γνησίως κοίλη στο (a,b).

Απόδειξη. (α) Αφου $f'' > 0$ στο (a, b), η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, b). Από το Θεώρημα 5.8.2 έπεται το ζητούμενο.

(β) Με τον ίδιο τρόπο. $\square$

Τέλος, δίνουμε μια αναγκαία συνθήκη για να είναι το x_0 σημείο καμπής της f.

Θεώρημα 5.8.4. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση και έστω $x_0 \in (a, b)$. Αν η f έχει σημείο καμπής στο x_0, τότε $f''(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Η g δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο x_0: έχουμε $g(x_0) = 0$ και $g > 0$ αριστερά του x_0, $g < 0$ δεξιά του x_0 – ή το αντίστροφο.

Επίσης, $g'(x_0) = 0$ και $g''(x_0) = f''(x_0)$. Αν ήταν $g''(x_0) > 0$ ή $g''(x_0) < 0$ τότε από το Θεώρημα 5.9.1 η g θα είχε ακρότατο στο x_0, άτοπο. Άρα, $f''(x_0) = 0$. $\square$

Σημείωση. Η συνθήκη του Θεωρήματος 5.8.4 δεν είναι ικανή. Η $f(x) = x^4$ δεν έχει σημείο καμπής στο $x_0 = 0$. Είναι γνησίως κυρτή στο $\mathbb{R}$. Όμως $f''(x) = 12x^2$, άρα $f''(0) = 0$.

Παράδειγμα. Μελετήστε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Παίρνει μέγιστη τιμή στο 0: $f(0) = 1$, και $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Η δεύτερη παράγωγος της f ορίζεται παντού και είναι ίση με

$$f''(x) = \frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Άρα, $f'' > 0$ στα $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, ενώ $f'' < 0$ στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Έπεται ότι η f έχει σημείο καμπής στα $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ και είναι: γνησίως κυρτή στα $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$, γνησίως κοίλη στο $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Αυτές οι πληροφορίες είναι αρκετές για να σχεδιάσουμε «αρκετά πιστά» τη γραφική παράσταση της f.

5.8.2 Ασύμπτωτες

1. Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$.

(α) Λέμε ότι η ευθεία $y = \beta$ είναι *οριζόντια ασύμπτωτη* της f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta.$$

Παράδειγμα: η $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 1$.

(β) Λέμε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ $(\alpha \neq 0)$ είναι *πλάγια ασύμπτωτη* της f στο $+\infty$ αν

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

Παρατηρήστε ότι η f έχει το πολύ μία πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και ότι αν $y = \alpha x + \beta$ είναι η ασύμπτωτη της f τότε η κλιση της α υπολογίζεται από την

$$\alpha = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

και η σταθερά β υπολογίζεται από την

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x).$$

Αντίστροφα, για να δούμε αν η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$, εξετάζουμε πρώτα αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Αν αυτό το όριο υπάρχει και αν είναι διαφορετικό από το 0, το συμβολίζουμε με α και εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - \alpha x)$. Αν και αυτό το όριο – ας το πούμε β – υπάρχει, τότε η $y = \alpha x + \beta$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$.

Παράδειγμα: η $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x-1}$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x+2$. Πράγματι,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-1}{x^2-x} = 1,$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1} = 2.$$

2. Με ανάλογο τρόπο ορίζουμε – και βρίσκουμε – την οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη μιας συνάρτησης $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$ στο $-\infty$ (αν υπάρχει).

3. Τέλος, λέμε ότι η $f : (a, x_0) \cup (x_0, b) \to \mathbb{R}$ έχει (αριστερή ή δεξιά) κατακόρυφη ασύμπτωτη στο x_0 αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ή} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η $f(x) = \frac{1}{x}$ έχει αριστερή και δεξιά ασύμπτωτη στο 0 την ευθεία $x = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x} = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty$.

5.9 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a, b), τότε η f είναι συνεχής στο (a, b).

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(i) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0, \infty)$.

(δ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.

(ε) Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a,b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.

(στ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta, \delta)$.

(ζ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο 0.

(α) $f(x) = x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

(β) $g(x) = 0$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $g(x) = x^2$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

(γ) $h(x) = \sin x$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $h(x) = x$ αν $x \in \mathbb{Q}$.

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$.

(β) $g(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $g(0) = 0$.

(γ) $h(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $h(0) = 0$.

4. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

5. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p,q) = 1 \end{cases}$$

6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία:

(α) είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

(β) είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

7. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στοx_0.

9. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.

(α) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ στο $[-2,2]$.

(β) $f(x)=x^5+x+1$ στο $[-1,1]$.

(γ) $f(x)=x^3-3x$ στο $[-1,2]$.

10. Αποδείξτε ότι η εξίσωση:

(α) $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.

(β) $6x^4-7x+1=0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) $x^3+9x^2+33x-8=0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

11. Έστω $a_1<\cdots<a_n$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f(x)=(x-a_1)\cdots(x-a_n)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς $n-1$ λύσεις.

12. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\qquad f(x)=x+\frac{3}{x^2},\qquad f(x)=\frac{x^2}{x^2-1},\qquad f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν.

13. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1<a_2<\cdots<a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)^2$.

14. Έστω $a>0$. Αποδείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{1+|x|}+\frac{1}{1+|x-a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

15. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$ και ότι $f(a)=g(a)$ και $f(b)=g(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a,b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x,f(x))$ και $(x,g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

16. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x)-f'(x)g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x)=0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x)=0$, και αντίστροφα.

Β′ Ομάδα

17. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής στο $[a,b]$, παραγωγίσιμη στο (a,b), με $f(a)=f(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1\neq x_2\in(a,b)$ ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

18. Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0.$$

19. Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{x}$ για κάθε $x>1$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x})-f(x)]=0$.

20. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ στο $(0, a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0, a)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$, αποδείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

21. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geqslant 1 + x$.

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \log x \leqslant x - 1.$$

22. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x \leqslant n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) \leqslant \sqrt[n]{x} \ln x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n \left(\sqrt[n]{x} - 1 \right) = \ln x$ για $x > 0$.

23. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) = x.$$

(β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x.$$

24. Μελετήστε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

στο $(0, +\infty)$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e;

25. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις ln και exp ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

Δηλαδή, η exp αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x, ενώ η ln αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x.

26. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Αποδείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

27. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

28. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $e^{-x}f(x)$.]

29. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

30. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

31. (α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Γ′ Ομάδα

32. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

33. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα $(-1, 1)$.

34. Να βρεθούν όλοι οι $a > 1$ για τους οποίους η ανισότητα $x^a \leqslant a^x$ ισχύει για κάθε $x > 1$.

35. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2f(x)$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0,1]$.

36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

37. Έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

38. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Αποδείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

39. Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.

40. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεώρημα Taylor

6.1 Θεώρημα Taylor

Ορισμός 6.1.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Το *πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0* είναι το πολυώνυμο $T_{n,f,x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$T_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

δηλαδή,

$$T_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Το *υπόλοιπο Taylor τάξης n της f στο x_0* είναι η συνάρτηση $R_{n,f,x_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$R_{n,f,x_0}(x) = f(x) - T_{n,f,x_0}(x).$$

Όταν $x_0 = 0$, συνηθίζουμε να ονομάζουμε τα $T_{n,f,0}$ και $R_{n,f,0}$ πολυώνυμο MacLaurin και υπόλοιπο MacLaurin της f αντίστοιχα.

Παρατήρηση 6.1.2. Παραγωγίζοντας το T_{n,f,x_0} βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}
T_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad \text{άρα} \quad T_{n,f,x_0}(x_0) = f(x_0), \\
T'_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, \quad \text{άρα} \quad T'_{n,f,x_0}(x_0) = f'(x_0), \\
T''_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=2}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}, \quad \text{άρα} \quad T''_{n,f,x_0}(x_0) = f''(x_0), \\
&\cdots\cdots \\
T^{(n)}_{n,f,x_0}(x) &= \sum_{k=n}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-n)!}(x-x_0)^{k-n}, \quad \text{άρα} \quad T^{(n)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(n)}(x_0).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 ικανοποιεί τις

$$T^{(k)}_{n,f,x_0}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0,1,\ldots,n$$

και είναι το μοναδικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n που έχει αυτή την ιδιότητα (εξηγήστε γιατί).

Παρατήρηση 6.1.3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Παρατηρήστε ότι

$$T'_{n,f,x_0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}$$

και

$$T_{n-1,f',x_0}(x) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{f^{(s+1)}(x_0)}{s!}(x-x_0)^{s}.$$

Θέτοντας $k=s+1$ σε αυτή την ισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$T'_{n,f,x_0} = T_{n-1,f',x_0}.$$

Έπεται ότι

$$R'_{n,f,x_0} = R_{n-1,f',x_0}.$$

Πρόταση 6.1.4. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω $x_0\in[a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για $n=1$ έχουμε

$$R_{1,f,x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0),$$

άρα

$$\frac{R_{1,f,x_0}(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0$$

όταν $x \to x_0$, από τον ορισμό της παραγώγου στο σημείο x_0.

Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = m$ και για κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, m φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $m+1$ φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} R_{m+1,f,x_0}(x) = \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{m+1} = 0$$

και

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R'_{m+1,f,x_0}(x)}{[(x-x_0)^{m+1}]'} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_{m,f',x_0}(x)}{(m+1)(x-x_0)^m} = 0$$

από την επαγωγική υπόθεση για την f'. Εφαρμόζοντας τον κανόνα l'Hospital ολοκληρώνουμε το επαγωγικό βήμα. □

Λήμμα 6.1.5. *Έστω p πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{6.1.1}$$

Τότε, $p \equiv 0$.

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Για το επαγωγικό βήμα παρατηρούμε πρώτα ότι

$$p(x_0) = \lim_{x\to x_0} p(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n}(x-x_0)^n = 0,$$

Συνεπώς, $p(x_0) = 0$. Άρα,

$$p(x) = (x-x_0)p_1(x),$$

όπου p_1 πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με $n-1$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p_1(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Αν υποθέσουμε ότι η Πρόταση ισχύει για τον $n-1$, τότε $p_1 \equiv 0$ άρα $p \equiv 0$. □.

Η Πρόταση 6.1.4 και το Λήμμα 6.1.5 αποδεικνύουν τον εξής χαρακτηρισμό του πολυωνύμου Taylor T_{n,f,x_0}:

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι $n-1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε, το πολυώνυμο Taylor τάξης n της f στο x_0 είναι το μοναδικό πολυώνυμο T βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{6.1.2}$$

Απόδειξη. Η Πρόταση 6.1.4 δείχνει ότι το T_{n,f,x_0} ικανοποιεί την (6.1.2). Για τη μοναδικότητα αρκεί να παρατηρήσετε ότι αν δύο πολυώνυμα T_1, T_2 βαθμού το πολύ ίσου με n ικανοποιούν την (6.1.2), τότε το πολυώνυμο $p := T_1 - T_2$ ικανοποιεί την (6.1.1). Από το Λήμμα 6.1.5 συμπεραίνουμε ότι $T_1 \equiv T_2$. □

Παρατήρηση 6.1.7. Το Θεώρημα 6.1.6 μας δίνει έναν έμμεσο τρόπο για να βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0. Αρκεί να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n το οποίο ικανοποιεί την (6.1.2).

(i) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \text{ για κάθε } |x| < 1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{n,f,0}(x) = T_n(x) := 1 + x + \cdots + x^n.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_n(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0,$$

και το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 6.1.6.

(ii) Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχουμε δει ότι

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \text{ για κάθε } |x| < 1.$$

Θα δείξουμε ότι, για κάθε n,

$$T_{2n,f,0}(x) = T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n}(x) := 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) - T_n(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2} = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Άρα,

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{2n}(x)}{x^{2n+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1}x}{1+x^2} = 0,$$

και (προφανώς)

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - T_{2n}(x)}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0} \frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2} = 0,$$

οπότε το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα 6.1.6.

Το Θεώρημα Taylor δίνει εύχρηστες εκφράσεις για το υπόλοιπο Taylor R_{n,f,x_0} τάξης n μιας συνάρτησης f σε κάποιο σημείο x_0.

Θεώρημα 6.1.8 (Θεώρημα Taylor). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και έστω $x_0 \in [a,b]$. Τότε, για κάθε $x \in [a,b]$,*

(i) *Μορφή Cauchy του υπολοίπου Taylor: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x - x_0).$$

(ii) *Μορφή Lagrange του υπολοίπου Taylor: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε*

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε το $x \in [a,b]$ και ορίζουμε $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(t) = R_{n,f,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

Παραγωγίζοντας ως προς t βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right)\\ &= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n,\end{aligned}$$

αφού το μεσαίο άθροισμα είναι τηλεσκοπικό. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\varphi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) \text{ και } \varphi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0.$$

(i) Για τη μορφή Cauchy του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την φ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$R_{n,f,x_0}(x) = \varphi(x_0) - \varphi(x) = \varphi'(\xi)(x_0 - x).$$

Από την

$$\varphi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0).$$

(ii) Για τη μορφή Lagrange του υπολοίπου εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy για την φ και για την $g(t) = (x-t)^{n+1}$ στο διάστημα με άκρα x και x_0: Υπάρχει ξ μεταξύ των x_0 και x ώστε

$$\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x)}{g(x_0) - g(x)} = \frac{\varphi'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Έπεται ότι

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n}(x-x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

□

Στην επόμενη Παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Taylor για να βρουμε το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά των βασικών υπερβατικών συναρτήσεων.

6.2 Δυναμοσειρές και αναπτύγματα Taylor

6.2.1 Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(k)}(0) = 1$ για κάθε $k \geqslant 0$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_n(x) := R_{n,f,0}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

- Αν $x > 0$ τότε
$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1} \leqslant \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}.$$
- Αν $x < 0$, τότε $\xi < 0$ και $e^\xi < 1$, άρα
$$|R_n(x)| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Έστω $x \neq 0$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{e^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{n+2} \to 0,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.2.2 Η συνάρτηση $f(x) = \cos x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ και $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Συνεπώς,

$$T_{2n}(x) := T_{2n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n}(x) := R_{2n,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+1)}(\xi)| \leqslant 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.2.3 Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$

Παρατηρούμε ότι $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ και $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f^{(2k)}(0) = 0$ και $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Συνεπώς,

$$T_{2n+1}(x) := T_{2n+1,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Έστω $x \neq 0$. Χρησιμοποιώντας την μορφή Lagrange του υπολοίπου παίρνουμε

$$R_{2n+1}(x) := R_{2n+1,f,0}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

για κάποιο ξ μεταξύ των 0 και x. Για να εκτιμήσουμε το υπόλοιπο παρατηρούμε ότι $|f^{(2n+2)}(\xi)| \leqslant 1$ (είναι κάποιο ημίτονο ή συνημίτονο), άρα

$$|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου για την ακολουθία $a_n := \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} |R_{2n+1}(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\sin x = \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

6.2.4 Η συνάρτηση $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$

Παρατηρούμε ότι $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ για κάθε $x > -1$ και $k = 1, 2, \ldots$. Ειδικότερα, $f(0) = 0$ και $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ για κάθε $k \geqslant 1$. Συνεπώς,

$$T_n(x) := T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor μπορούμε να ελέγξουμε ότι αν $-1 < x \leqslant 1$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0.$$

Συνεπώς,

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

για κάθε $x \in (-1, 1]$ (*σειρά Mercator*).

Ειδικότερα, για $x = 1$ παίρνουμε τον *τύπο του Leibniz*

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots.$$

6.3 Συναρτήσεις παραστάσιμες σε δυναμοσειρά

Ορισμός 6.3.1. Λέμε ότι μια συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 αν υπάρχει ακολουθία $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ πραγματικών αριθμών ώστε

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι αν μια συνάρτηση είναι παραστάσιμη σε δυναμοσειρά στο $(-R, R)$, τότε είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και οι παράγωγοί της υπολογίζονται με παραγώγιση των όρων της δυναμοσειράς. Ανάλογα, υπολογίζεται το ολοκλήρωμά της σε κάθε υποδιάστημα του $(-R, R)$.

Θεώρημα 6.3.2 (θεώρημα παραγώγισης δυναμοσειρών)**.** *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά που συγκλίνει στο $(-R, R)$ για κάποιον $R > 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Τότε, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη: για κάθε $k \geqslant 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Επίσης,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in (-R, R)$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{6.3.1}$$

Αφού $|x| < R$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|x| + \delta < R$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + \delta)^n < +\infty.$$

Έστω $0 < |t| < \delta$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} |(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t| &= \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k \right| = t^2 \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \right| \\ &\leqslant \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} t^{k-2} \delta^2 \leqslant \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \\ &\leqslant \frac{t^2}{\delta^2} (|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(x+t)^n - x^n - nx^{n-1}t}{t} \right| \\ &\leqslant \frac{|t|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(|x| + \delta)^n. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $t \to 0$, βλέπουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

το οποίο αποδεικνύει την (6.3.1).

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο ρίζας βλέπουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (εξηγήστε γιατί). Εφαρμόζοντας λοιπόν τον ίδιο συλλογισμό για την f' στη θέση της f, βλέπουμε ότι

$$f^{(2)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και ότι για κάθε $k \geqslant 0$ και για κάθε $|x| < R$ ισχύει

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k}. \tag{6.3.2}$$

Θέτοντας $x = 0$ στην (2) βλέπουμε ότι

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

για κάθε $k \geqslant 0$ (παρατηρήστε ότι: αν θέσουμε $x = 0$ στο δεξιό μέλος της (6.3.2), τότε όλοι οι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται, εκτός από εκείνον που αντιστοιχεί στην τιμή $n = k$ και ισούται με $k(k-1)\cdots 2\cdot 1\cdot a_k x^0 = k!a_k$). $\square$

Πόρισμα 6.3.3 (θεώρημα μοναδικότητας)**.** *Έστω (a_k), (b_k) ακολουθίες πραγματικών αριθμών με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $R > 0$ ώστε*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

για κάθε $x \in (-R, R)$. Τότε,

$$a_k = b_k \ \ \text{για κάθε}\ k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.3.2, για τη συνάρτηση $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

έχουμε

$$f^{(k)}(0) = k!a_k = k!b_k$$

για κάθε $k \geqslant 0$. Συνεπώς, $a_k = b_k$ για κάθε $k \geqslant 0$. $\square$

6.4 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Έστω $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ πολυώνυμο βαθμού n και έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ ώστε

$$p(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n \quad \text{για κάθε}\, x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι

$$b_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

2. Γράψτε καθένα από τα παρακάτω πολυώνυμα στη μορφή $b_0 + b_1(x-3) + \cdots + b_n(x-3)^n$:

$$p_1(x) = x^2 - 4x - 9, \quad p_2(x) = x^4 - 12x^3 + 44x^2 + 2x + 1, \qquad p_3(x) = x^5.$$

3. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις, να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,a}$ που υποδεικνύεται.

$$\begin{aligned}
(T_{3,f,0}) &\ :\ f(x) = \exp(\sin x).\\
(T_{2n+1,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x^2)^{-1}.\\
(T_{n,f,0}) &\ :\ f(x) = (1+x)^{-1}.\\
(T_{4,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{6,f,0}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.\\
(T_{5,f,1}) &\ :\ f(x) = x^5 + x^3 + x.
\end{aligned}$$

4. Έστω $n \geqslant 1$ και $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις n φορές παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

5. Έστω $n \geqslant 2$ και $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση n φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ και $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.

(β) Αν ο n είναι άρτιος και $f^{(n)}(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.

(γ) Αν ο n είναι περιττός, τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο στο x_0, αλλά το x_0 είναι σημείο καμπής για την f.

6. Αν $f(x) = \ln x$, $x > 0$, βρείτε την πλησιέστερη ευθεία και την πλησιέστερη παραβολή στο γράφημα της f στο σημείο $(e, 1)$.

7. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{n,f,0}$ για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής: $f(0) = 0$ και

$$f(x) = e^{-1/x^2}, \qquad x \neq 0.$$

8. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f''' = f$ και $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = 0$.

(α) Έστω $R > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $M = M(R) > 0$ ώστε: για κάθε $x \in [-R, R]$ και για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots,$

$$|f^{(k)}(x)| \leqslant M.$$

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $T_{3n,f,0}$ και, χρησιμοποιώντας το (α) και οποιονδήποτε τύπο υπολοίπου, αποδείξτε ότι

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{(3k)!}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Βρείτε προσεγγιστική τιμή, με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}, για καθέναν από τους αριθμούς

$$\sin 1, \quad \sin 2, \quad \sin \frac{1}{2}, \quad e, \quad e^2.$$

10. (α) Αποδείξτε ότι

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

(β) Αποδείξτε ότι $\pi = 3.14159\cdots$ (με άλλα λόγια, βρείτε προσεγγιστική τιμή για τον αριθμό π με σφάλμα μικρότερο του 10^{-6}).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ολοκλήρωμα Riemann

7.1 Ο ορισμός του Darboux

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann για *φραγμένες* συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα. Για μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με μη αρνητικές τιμές, θα θέλαμε το ολοκλήρωμα να δίνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης, τον οριζόντιο άξονα $y = 0$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$ και $x = b$.

Ορισμός 7.1.1. (α) Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. *Διαμέριση* του $[a,b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

του $[a,b]$ με $x_0 = a$ και $x_n = b$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι τα $x_k \in P$ είναι διατεταγμένα ως εξής:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b.$$

Θα γράφουμε

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη. Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό, κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία: το a και το b (τα άκρα του $[a,b]$).

(β) Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Ονομάζουμε *πλάτος* της διαμέρισης P το μεγαλύτερο από τα μήκη αυτών των υποδιαστημάτων. Δηλαδή, το πλάτος της διαμέρισης ισούται με

$$\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε να ισαπέχουν τα x_k (τα n υποδιαστήματα δεν έχουν απαραίτητα το ίδιο μήκος).

(γ) Η διαμέριση P_1 λέγεται *εκλέπτυνση* της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη κάποιων (πεπερασμένων το πλήθος) σημείων. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε επίσης ότι η P_1 είναι *λεπτότερη* από την P.

(δ) Έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Η *κοινή εκλέπτυνση* των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$. Εύκολα βλέπουμε ότι η P είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ότι αν P' είναι μια διαμέριση λεπτότερη τόσο από την P_1 όσο και από την P_2 τότε $P' \supseteq P$ (δηλαδή, η $P = P_1 \cup P_2$ είναι η μικρότερη δυνατή διαμέριση του $[a,b]$ που εκλεπτύνει ταυτόχρονα την P_1 και την P_2).

Θεωρούμε τώρα μια *φραγμένη* συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

του $[a,b]$. Η P διαμερίζει το $[a,b]$ στα υποδιαστήματα $[x_0, x_1], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$. Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.$$

Όλοι αυτοί οι αριθμοί ορίζονται καλά: η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, άρα είναι φραγμένη σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$. Για κάθε k, το σύνολο $\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$ είναι μη κενό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα έχει supremum και infimum.

Για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ορίζουμε τώρα το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P με τον εξής τρόπο:

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

είναι το *άνω άθροισμα της f ως προς P*, και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

είναι το *κάτω άθροισμα της f ως προς P*.

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις βλέπουμε ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f,P) \leqslant U(f,P)$$

αφού $m_k \leqslant M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Σε σχέση με το «εμβαδόν» που προσπαθούμε να ορίσουμε, πρέπει να σκεφτόμαστε το κάτω άθροισμα $L(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από κάτω* και το άνω άθροισμα $U(f,P)$ σαν μια *προσέγγιση από πάνω*.

Θα δείξουμε ότι ισχύει μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Πρόταση 7.1.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f, P_1) \leqslant U(f, P_2).$$

Η απόδειξη της Πρότασης 7.1.2 θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 7.1.3. *Έστω* $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ *και* $x_k < y < x_{k+1}$ *για κάποιο* $k = 0, 1, \ldots, n-1$. *Αν* $P_1 = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$, *τότε*

$$L(f, P) \leqslant L(f, P_1) \leqslant U(f, P_1) \leqslant U(f, P).$$

Δηλαδή, με την προσθήκη ενός σημείου y στην διαμέριση P, το άνω άθροισμα της f «μικραίνει» ενώ το κάτω άθροισμα της f «μεγαλώνει».

Απόδειξη του Λήμματος 7.1.3. Θέτουμε

$$m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant y\}$$

και

$$m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.$$

Τότε, $m_k \leqslant m_k^{(1)}$ και $m_k \leqslant m_k^{(2)}$ (άσκηση: αν $A \subseteq B$ τότε $\inf B \leqslant \inf A$). Γράφουμε

$$\begin{aligned} L(f, P_1) &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &\geqslant [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(y - x_k) + m_k(x_{k+1} - y) + \cdots \\ &\quad + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= [m_0(x_1 - x_0) + \cdots + m_k(x_{k+1} - x_k) + \cdots + m_{n-1}(x_n - x_{n-1})] \\ &= L(f, P). \end{aligned}$$

Όμοια δείχνουμε ότι $U(f, P_1) \leqslant U(f, P)$. □

Απόδειξη της Πρότασης 7.1.2. Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με διαδοχική προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.1.3 πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f, P_1) \leqslant L(f, P)$.

Όμοια βλέπουμε ότι $U(f, P) \leqslant U(f, P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f, P) \leqslant U(f, P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$L(f, P_1) \leqslant L(f, P) \leqslant U(f, P) \leqslant U(f, P_2). \qquad \square$$

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$

$$A(f) = \Big\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\Big\}$$

και

$$B(f) = \Big\{U(f, Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a, b]\Big\}.$$

Από την Πρόταση 7.1.2 έχουμε: για κάθε $a \in A(f)$ και κάθε $b \in B(f)$ ισχύει $a \leqslant b$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $\sup A(f) \leqslant \inf B(f)$ (άσκηση). Αν λοιπόν ορίσουμε σαν *κάτω ολοκλήρωμα* της f στο $[a, b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\Big\{L(f, P) : P \text{ διαμέριση του } [a, b]\Big\}$$

και σαν *άνω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \Big\{ U(f,Q) : Q \text{ διαμέριση του } [a,b] \Big\},$$

έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ορισμός 7.1.4. Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται *Riemann ολοκληρώσιμη* αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = I = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Ο αριθμός I (η κοινή τιμή του κάτω και του άνω ολοκληρώματος της f στο $[a,b]$) λέγεται *ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \qquad \text{ή} \qquad \int_a^b f.$$

7.2 Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann

Ο ορισμός του ολοκληρώματος που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι δύσχρηστος: δεν είναι εύκολο να τον χρησιμοποιήσει κανείς για να δει αν μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Συνήθως, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο κριτήριο ολοκληρωσιμότητας.

Θεώρημα 7.2.1 (κριτήριο του Riemann)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε*

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος ως supremum του $A(f)$ και από τον ε-χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει διαμέριση $P_1 = P_1(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ομοίως, από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση $P_2 = P_2(\varepsilon)$ του $[a,b]$ ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$. Τότε, από την Πρόταση 7.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} &\leqslant U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx \\ &< L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f,P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$0 \leqslant U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx,$$

και αφού η αντίστροφη ανισότητα ισχύει πάντα, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Το κριτήριο του Riemann διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής (εξηγήστε γιατί).

Θεώρημα 7.2.2 (κριτήριο του Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} \big(U(f,P_n) - L(f,P_n)\big) = 0.$$

Παραδείγματα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Riemann για να εξετάσουμε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι Riemann ολοκληρώσιμες:

(α) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$:

$$P_n = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \right\}.$$

Η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= f(0)\frac{1}{n} + f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(0 + \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 - 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} U(f,P_n) &= f\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} + f\left(\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n} + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το Θεώρημα 7.2.2 συμπεραίνουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Μπορούμε μάλιστα να βρούμε την τιμή του ολοκληρώματος. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} &= L(f,P_n) \\ &\leqslant \underline{\int_0^1} x^2 dx = \int_0^1 x^2 dx = \overline{\int_0^1} x^2 dx \\ &\leqslant U(f,P_n) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \to \frac{1}{3},$$

έπεται ότι

$$\frac{1}{3} \leqslant \int_0^1 x^2 dx \leqslant \frac{1}{3}.$$

Δηλαδή,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

(β) Η συνάρτηση $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $u(x) = \sqrt{x}$. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακολουθία διαμερίσεων του προηγούμενου παραδείγματος για να δείξετε ότι ικανοποιείται το κριτήριο του Riemann.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική ακολουθία διαμερίσεων. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση

$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{n^2} < \cdots < \frac{(n-1)^2}{n^2} < \frac{n^2}{n^2} = 1\right\}.$$

Η u είναι αύξουσα στο $[0,1]$, επομένως

$$L(u,P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2} - \frac{k^2}{n^2}\right)$$

και
$$U(u,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{n}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right).$$

Έπεται ότι
$$\begin{aligned}U(u,P_n)-L(u,P_n)&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{(k+1)^2}{n^2}-\frac{k^2}{n^2}\right)\\&=\frac{1}{n}\to 0.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 7.2.2 συμπεραίνουμε ότι η u είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Αφήνουμε σαν άσκηση να δείξετε ότι
$$\lim_{n\to\infty}L(u,P_n)=\lim_{n\to\infty}U(u,P_n)=\frac{2}{3}.$$
Η συγκεκριμένη επιλογή διαμερίσεων που κάναμε έχει το πλεονέκτημα ότι μπορείτε εύκολα να γράψετε τα $L(u,P_n)$ και $U(u,P_n)$ σε κλειστή μορφή. Από την τελευταία ισότητα έπεται ότι
$$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}.(4.2.18)$$

(γ) Η συνάρτηση του Dirichlet $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ με
$$g(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Υπολογίζουμε το κάτω και το άνω άθροισμα της g ως προς την P. Για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$ υπάρχουν ρητός q_k και άρρητος α_k στο (x_k,x_{k+1}). Αφού $g(q_k)=1$, $g(\alpha_k)=0$ και $0\leqslant g(x)\leqslant 1$ στο $[x_k,x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k=0$ και $M_k=1$. Συνεπώς,
$$L(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}0\cdot(x_{k+1}-x_k)=0$$
και
$$U(g,P)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}1\cdot(x_{k+1}-x_k)=1.$$
Αφού η P ήταν τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$, παίρνουμε
$$\underline{\int_0^1}g(x)dx=0\qquad\text{και}\qquad\overline{\int_0^1}g(x)dx=1.$$

Άρα, η g δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Η συνάρτηση $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ 0 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Έστω $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = 1\}$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ υπάρχει άρρητος α_k στο (x_k, x_{k+1}). Αφού $h(\alpha_k) = 0$ και $0 \leqslant h(x) \leqslant 1$ στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $m_k = 0$. Συνεπώς,

$$L(h, P) = 0.$$

Επίσης, υπάρχει ρητός $q_k > (x_k + x_{k+1})/2$ στο (x_k, x_{k+1}), άρα $M_k \geqslant h(q_k) > (x_k + x_{k+1})/2$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(h, P) &> \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_k + x_{k+1}}{2}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2 - x_k^2) \\ &= \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Αφού

$$U(h, P) - L(h, P) > \frac{1}{2}$$

για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$, το κριτήριο του Riemann δεν ικανοποιείται (πάρτε $\varepsilon = 1/3$). Άρα, η h δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Η συνάρτηση $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p, q) = 1 \end{cases}$$

είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Εύκολα ελέγχουμε ότι $L(w, P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : w(x) \geqslant \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $w(x) \geqslant \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $w(x) = 1/q \geqslant \varepsilon$ δηλαδή $q \leqslant 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leqslant b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leqslant 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε πρέπει να επιλέξουμε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leqslant 1\},$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
U(w,P_\varepsilon) &\leqslant \varepsilon\cdot(a_1-0)+1\cdot(b_1-a_1)+\varepsilon\cdot(a_2-b_1)+\cdots+1\cdot(b_{N-1}-a_{N-1})\\
&+\varepsilon\cdot(a_N-b_{N-1})+1\cdot(b_N-a_N)+\varepsilon\cdot(1-b_N)\\
&\leqslant \varepsilon\cdot\Big(a_1+(a_2-b_1)+\cdots+(a_N-b_{N-1})+(1-b_N)\Big)\\
&+\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Για το τυχόν $\varepsilon>0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(w,P_\varepsilon)-L(w,P_\varepsilon)<2\varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 7.2.1, η w είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

7.3 Δύο κλάσεις Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann θα δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς συναρτήσεις $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 7.3.1. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη: για κάθε $x\in[a,b]$ έχουμε

$$f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b).$$

Άρα, έχει νόημα να εξετάσουμε την ύπαρξη ολοκληρώματος για την f.

Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε για τη διαμέριση

$$P_n=\left\{a,a+\frac{b-a}{n},a+\frac{2(b-a)}{n},\ldots,a+\frac{n(b-a)}{n}=b\right\}$$

του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα να ισχύει

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon.$$

Θέτουμε

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n},\qquad k=0,1,\ldots,n.$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$
\begin{aligned}
U(f,P_n)&=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}\\
&=\frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right),
\end{aligned}
$$

ενώ

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n}\cdot (f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})). \end{aligned}$$

Άρα,

$$U(f,P_n)-L(f,P_n) = \frac{[f(x_n)-f(x_0)](b-a)}{n} = \frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{n},$$

το οποίο γίνεται μικρότερο από το $\varepsilon > 0$ που μας δόθηκε, αρκεί το n να είναι αρκετά μεγάλο. Από το Θεώρημα 7.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 7.3.2. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x,y \in [a,b]$ και $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση

$$P_n = \left\{ a, a+\frac{b-a}{n}, a+\frac{2(b-a)}{n}, \dots, a+\frac{n(b-a)}{n} = b \right\}.$$

Ορίζουμε

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0,1,\dots,n.$$

Έστω $k = 0,1,\dots,n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$M_k = f(y_k') \qquad \text{και} \qquad m_k = f(y_k'').$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} U(f,P_n)-L(f,P_n) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k) \\ &< \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1}-x_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 7.2.1, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

7.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε αυστηρά μερικές από τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann. Οι αποδείξεις των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση που θα σας βοηθήσει να εξοικειωθείτε με τις διαμερίσεις, τα άνω και κάτω αθροίσματα κλπ.

Θεώρημα 7.4.1. *Αν $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a, b]$, τότε*

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a).$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ έχουμε $m_k = M_k = c$. Άρα,

$$L(f, P) = U(f, P) = \sum_{k=0}^{n-1} c(x_{k+1} - x_k) = c(b-a).$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = c(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Άρα,

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a). \qquad \square$$

Θεώρημα 7.4.2. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε

$$\begin{aligned}
m_k &= \inf\{(f+g)(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \\
M_k &= \sup\{(f+g)(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \\
m'_k &= \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \\
M'_k &= \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \\
m''_k &= \inf\{g(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \\
M''_k &= \sup\{g(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.
\end{aligned}$$

Για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $m'_k + m''_k \leqslant f(x) + g(x)$. Άρα,

$$m'_k + m''_k \leqslant m_k.$$

Ομοίως, για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $M'_k + M''_k \geqslant f(x) + g(x)$. Άρα,

$$M'_k + M''_k \geqslant M_k.$$

Έπεται ότι

$$L(f,P)+L(g,P)\leqslant L(f+g,P)\leqslant U(f+g,P)\leqslant U(f,P)+U(g,P).$$

Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1,P_2 του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P_1)-\frac{\varepsilon}{2}<\int_a^b f(x)dx<L(f,P_1)+\frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$U(g,P_2)-\frac{\varepsilon}{2}<\int_a^b g(x)dx<L(g,P_2)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν θεωρήσουμε την κοινή τους εκλέπτυνση $P=P_1\cup P_2$ έχουμε

$$\begin{aligned}U(f,P)+U(g,P)-\varepsilon &\leqslant U(f,P_1)+U(g,P_2)-\varepsilon\\ &<\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\\ &<L(f,P_1)+L(g,P_2)+\varepsilon\\ &\leqslant L(f,P)+L(g,P)+\varepsilon.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με τις προηγούμενες ανισότητες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx-\varepsilon\leqslant U(f+g,P)-\varepsilon &\leqslant \int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\\ &\leqslant L(f+g,P)+\varepsilon\leqslant \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx+\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx\leqslant\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx\leqslant\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx.$$

Όμως,

$$\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx\leqslant\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx.$$

Άρα,

$$\overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx.$$

Έπεται το Θεώρημα. □

Θεώρημα 7.4.3. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και έστω $t\in\mathbb{R}$. Τότε, η tf είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf)(x)dx=t\int_a^b f(x)dx.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $t > 0$. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a, b]$. Αν για $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίσουμε

$$m_k = \inf\{(tf)(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\},\ M_k = \sup\{(tf)(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$$

και

$$m_k' = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\},\ M_k' = \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\},$$

είναι φανερό ότι

$$m_k = tm_k' \ \text{ και } \ M_k = tM_k'.$$

Άρα,

$$L(tf, P) = tL(f, P) \ \text{ και } \ U(tf, P) = tU(f, P).$$

Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\underline{\int_a^b} f(x)dx \ \text{ και } \ \overline{\int_a^b}(tf)(x)dx = t\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έπεται ότι η tf είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και

$$\int_a^b (tf)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx.$$

Αν $t < 0$, η μόνη αλλαγή στο προηγούμενο επιχείρημα είναι ότι τώρα $m_k = tM_k'$ και $M_k = tm_k'$. Συμπληρώστε την απόδειξη μόνοι σας.

Τέλος, αν $t = 0$ έχουμε $tf \equiv 0$. Άρα,

$$\int_a^b tf = 0 = 0 \cdot \int_a^b f. \qquad \square$$

Από τα Θεωρήματα 7.4.2 και 7.4.3 προκύπτει άμεσα η «γραμμικότητα του ολοκληρώματος».

Θεώρημα 7.4.4 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος). *Αν $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t\int_a^b f(x)dx + s\int_a^b g(x)dx. \qquad \square$$

Θεώρημα 7.4.5. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και έστω $c \in (a, b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a, c]$ και $[c, b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν διαμερίσεις P_1 του $[a,c]$ και P_2 του $[c,b]$ ώστε

$$L(f,P_1) \leqslant \int_a^c f(x)dx \leqslant U(f,P_1) \;\text{ και }\; U(f,P_1) - L(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$L(f,P_2) \leqslant \int_c^b f(x)dx \leqslant U(f,P_2) \;\text{ και }\; U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Το σύνολο $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ και ισχύουν οι

$$L(f,P_\varepsilon) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \text{ και } U(f,P_\varepsilon) = U(f,P_1) + U(f,P_2).$$

Από τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= (U(f,P_1) - L(f,P_1)) + (U(f,P_2) - L(f,P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ (κριτήριο του Riemann). Επιπλέον, για την P_ε έχουμε

$$L(f,P_\varepsilon) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant U(f,P_\varepsilon)$$

και, από τις προηγούμενες σχέσεις,

$$L(f,P_\varepsilon) \leqslant \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \leqslant U(f,P_\varepsilon).$$

Επομένως,

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \left(\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) \right| \leqslant U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Αν $c \notin P$ θέτουμε $P' = P \cup \{c\}$, οπότε πάλι έχουμε

$$U(f,P') - L(f,P') \leqslant U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $c \in P$. Ορίζουμε $P_1 = P \cap [a,c]$ και $P_2 = P \cap [c,b]$. Οι P_1, P_2 είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, και

$$L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2)\ ,\ U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2).$$

Αφού
$$(U(f,P_1)-L(f,P_1))+(U(f,P_2)-L(f,P_2))=U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon,$$
έπεται ότι
$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon \text{ και } U(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, το κριτήριο του Riemann δείχνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τώρα, από το πρώτο μέρος της απόδειξης παίρνουμε την ισότητα
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \quad \square$$

Θεώρημα 7.4.6. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m\leqslant f(x)\leqslant M$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε,*
$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$
είναι η *μέση τιμή* της f στο $[a,b]$.

Απόδειξη. Αρκεί να διαπιστώσετε ότι για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ ισχύει
$$m(b-a)\leqslant L(f,P)\leqslant U(f,P)\leqslant M(b-a)$$
(το οποίο είναι πολύ εύκολο). $\square$

Πόρισμα 7.4.7. (α) *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε,*
$$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0.$$
(β) *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x)\geqslant g(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Τότε,*
$$\int_a^b f(x)dx\geqslant\int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.4.6: μπορούμε να πάρουμε $m=0$.

(β) Η $f-g$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(f-g)(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Εφαρμόζουμε το (α) για την $f-g$ και χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. $\square$

Θεώρημα 7.4.8. *Έστω $f:[a,b]\to[m,M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $\varphi:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\varphi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ με την ιδιότητα $U(\varphi\circ f,P)-L(\varphi\circ f,P)<\varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η φ είναι συνεχής στο $[m,M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A>0$ ώστε $|\varphi(\xi)|\leqslant A$ για κάθε $\xi\in[m,M]$. Επίσης, η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1=\varepsilon/(2A+b-a)>0$, υπάρχει $0<\delta<\varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi,\eta\in[m,M]$ με $|\xi-\eta|<\delta$ ισχύει $|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|<\varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2.$$

Ορίζουμε

$$I = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$
$$J = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : M_k(f) - m_k(f) \geqslant \delta\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leqslant M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m, M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(x')| = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f) \leqslant \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leqslant (b-a)\varepsilon_1.$$

(ii) Για το J έχουμε

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

Επίσης,

$$|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(x')| \leqslant |(\varphi \circ f)(x)| + |(\varphi \circ f)(x')| \leqslant 2A$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f) \leqslant 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k \in J} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant 2A \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\varphi \circ f, P) - L(\varphi \circ f, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &= \sum_{k \in I} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &\quad + \sum_{k \in J} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1 + 2A\varepsilon_1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.4.8 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από την σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 7.4.9. *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(α) *η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx.(4.4.49)$$

(β) *η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*

(γ) *η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 7.4.8. Για το (γ) γράψτε

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}$$

και χρησιμοποιήστε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f + g$, $f - g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a < b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a, b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a \geqslant b$ ως εξής:

(α) αν $a = b$, θέτουμε $\int_a^a f = 0$ (για κάθε f).

(β) αν $a > b$ και η $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

7.5 Ο ορισμός του Riemann

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός 7.5.1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* στο $[a, b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στο συμβολισμό $\sum(f, P, \Xi)$ αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Η βασική ιδέα πίσω από τον ορισμό είναι ότι

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum(f, P, \Xi)$$

όταν το πλάτος της P τείνει στο μηδέν και τα ξ_k επιλέγονται αυθαίρετα στα υποδιαστήματα που ορίζει η P. Επειδή δεν έχουμε συναντήσει τέτοιου είδους «όρια» ως τώρα, καταφεύγουμε στον «εψιλοντικό ορισμό».

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι η απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών ολοκληρωσιμότητας:

Θεώρημα 7.5.2. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα,

$$L(f, P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$U(f, P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f).$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f).$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0.$$

Έστω P' διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, *η οποία είναι και εκλέπτυνση της* P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} &< L(f, P) \leqslant L(f, P') \leqslant \sum(f, P', \Xi)\\ &\leqslant U(f, P') \leqslant U(f, P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f, P', \Xi) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για *τυχούσα* διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1 = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a, b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n - 1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l < y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2 = P_1 \cup \{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m-1}\}$ με $\xi_l \in [y_l, y_{l+1}]$, $l = 0, 1, \dots, m - 1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l' \in [y_l, x_k]$ και $\xi_l'' \in [x_k, y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{l-1}, \xi_l', \xi_l'', \dots, \xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f, P_1, \Xi^{(1)}) - \sum(f, P_2, \Xi^{(2)})\right| &= |f(\xi_l)(y_{l+1} - y_l) - f(\xi_l')(x_k - y_l)\\ &\quad - f(\xi_l'')(y_{l+1} - x_k)|\\ &\leqslant 3M \max_l |y_{l+1} - y_l| < 3M\delta\\ &= \frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1, \Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k, \Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|<n\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $<\delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\int_a^b f(x)dx\right| &< \left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|\\ &\quad+\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|\\ &<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

7.6 Το θεώρημα μέσης του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Στο προηγούμενο Κεφάλαιο ορίσαμε τη *μέση τιμή*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

της f στο $[a,b]$. Αν η f υποτεθεί συνεχής, τότε υπάρχει $\xi\in[a,b]$ με την ιδιότητα

$$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια του εξής γενικότερου θεωρήματος.

Θεώρημα 7.6.1 (θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού)**.** *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Απόδειξη. Οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, άρα η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Έστω

$$m=\min\{f(x):\,a\leqslant x\leqslant b\}\quad\text{και}\quad M=\max\{f(x):\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

Αφού η g παίρνει μη αρνητικές τιμές, έχουμε

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπώς,

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx.$$

Αφού $g \geqslant 0$ στο $[a,b]$, έχουμε $\int_a^b g(x)dx \geqslant 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $\int_a^b g(x)dx = 0$, τότε από την $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Άρα, η ζητούμενη σχέση ισχύει *για κάθε* $\xi \in [a,b]$.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_a^b g(x)dx > 0$. Τότε,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M.$$

Αφού η f είναι συνεχής, το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής δείχνει ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}.$$

Έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 7.6.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.6.1, αν θεωρήσουμε την $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 1$ για κάθε $x \in [a,b]$. □

Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε (ξανά) το Πόρισμα 7.6.2, αυτή τη φορά σαν άμεση συνέπεια του πρώτου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

7.7 Τα θεμελιώδη θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Ορισμός 7.7.1 (αόριστο ολοκλήρωμα)**.** Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Είδαμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x]$ για κάθε $x \in [a,b]$. Το *αόριστο ολοκλήρωμα της f* είναι η συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι φραγμένη, θα δείξουμε ότι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι πάντοτε συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 7.7.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a,b]$.*

Απόδειξη. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι εξ ορισμού φραγμένη. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Έστω $x < y$ στο $[a, b]$. Τότε,

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \right| = \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leqslant \int_x^y |f(t)|dt \leqslant M|x - y|. \end{aligned}$$

Άρα, η F είναι Lipschitz συνεχής (με σταθερά M). □

Μπορούμε να δείξουμε κάτι ισχυρότερο: στα σημεία συνέχειας της f, η F είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 7.7.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in [a, b]$, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a < x_0 < b$ (οι δύο περιπτώσεις $x_0 = a$ ή $x_0 = b$ ελέγχονται όμοια, με τη σύμβαση που κάναμε στην αρχή του Κεφαλαίου). Θέτουμε $\delta_1 = \min\{x_0 - a, b - x_0\}$. Αν $|h| < \delta_1$, τότε

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \left(\int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $0 < \delta < \delta_1$ ώστε αν $|x - x_0| < \delta$ τότε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Έστω $0 < |h| < \delta$.

(α) Αν $0 < h < \delta$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt = \frac{1}{h} \cdot h\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

(β) Αν $-\delta < h < 0$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x)}{h} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} [f(t) - f(x_0)]dt \right| \\ &\leqslant \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} |f(t) - f(x_0)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|h|} \int_{x_0+h}^{x_0} \varepsilon dt = \frac{1}{|h|} \cdot (-h)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0),$$

δηλαδή $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Άμεση συνέπεια είναι το *πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού*.

Θεώρημα 7.7.4 (πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**.** *Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα F της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και*

$$F'(x)=f(x)$$

για κάθε $x\in[a,b]$. □

Πόρισμα 7.7.5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού για τη συνάρτηση $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ στο $[a,b]$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ λέγεται *παράγουσα* της f (ή *αντιπαράγωγος* της f) αν $G'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.7.4, η συνάρτηση

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

είναι παράγουσα της f. Αν G είναι μια άλλη παράγουσα της f, τότε $G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$, άρα η $G-F$ είναι σταθερή στο $[a,b]$ (απλή συνέπεια του θεωρήματος μέσης τιμής). Δηλαδή, υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ ώστε

$$G(x)-F(x)=c$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Αφού $F(a)=0$, παίρνουμε $c=G(a)$. Δηλαδή,

$$\int_a^x f(t)dt=G(x)-G(a)$$

ή αλλιώς

$$G(x)=G(a)+\int_a^x f(t)dt$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Έχουμε λοιπόν δείξει το εξής:

Θεώρημα 7.7.6. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ το αόριστο ολοκλήρωμα της f. Αν $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μια παράγουσα της f, τότε*

$$G(x)=F(x)+G(a)=\int_a^x f(t)dt+G(a)$$

για κάθε $x\in[a,b]$. Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a). \qquad \square$$

Σημείωση: Δεν είναι σωστό ότι για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει η ισότητα

$$G(b) - G(a) = \int_a^b G'(x)dx.$$

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $G(0) = 0$ και $G(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ αν $0 < x \leqslant 1$, τότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ αλλά η G' δεν είναι φραγμένη συνάρτηση (ελέγξτε το) οπότε δεν μπορούμε να μιλάμε για το ολοκλήρωμα $\int_a^b G'$.

Αν όμως η $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, τότε η ισότητα ισχύει. Αυτό είναι το *δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.*

Θεώρημα 7.7.7 (δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**.** *Έστω $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ τότε*

$$\int_a^b G'(x)dx = G(b) - G(a).$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ μια διαμέριση του $[a, b]$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, βρίσκουμε $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ με την ιδιότητα

$$G(x_{k+1}) - G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Αν, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n-1$, ορίσουμε

$$m_k = \inf\{G'(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\} \quad \text{και} \quad M_k = \sup\{G'(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\},$$

τότε

$$m_k \leqslant G'(\xi_k) \leqslant M_k,$$

άρα

$$L(G', P) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) \leqslant U(G', P).$$

Δηλαδή,

$$L(G', P) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = G(b) - G(a) \leqslant U(G', P).$$

Αφού η P ήταν τυχούσα και η G' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, παίρνοντας supremum ως προς P στην αριστερή ανισότητα και infimum ως προς P στο δεξιό μέλος της προηγούμενης ανισότητας, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_a^b G'(x)dx \leqslant G(b) - G(a) \leqslant \int_a^b G'(x)dx,$$

που είναι το ζητούμενο. □

7.8 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

Τα θεωρήματα αυτής της παραγράφου «περιγράφουν» δύο χρήσιμες μεθόδους ολοκλήρωσης: την ολοκλήρωση κατά μέρη και την ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

Συμβολισμός. Αν $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, τότε συμφωνούμε να γράφουμε

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Θεώρημα 7.8.1 (ολοκλήρωση κατά μέρη). *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\int_a^x fg' = (fg)(x) - (fg)(a) - \int_a^x f'g.$$

Ειδικότερα,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Απόδειξη. Η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

στο $[a,b]$. Από την υπόθεση, οι συναρτήσεις fg', $f'g$ είναι ολοκληρώσιμες, άρα και η $(f \cdot g)'$ είναι ολοκληρώσιμη. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\int_a^x fg' + \int_a^x f'g = \int_a^x (fg)' = (fg)(x) - (fg)(a).$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει αν θέσουμε $x = b$. □

Μια εφαρμογή είναι το «δεύτερο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού».

Πόρισμα 7.8.2. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η g είναι μονότονη και συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ της f στο $[a,b]$. Τότε, το ζητούμενο παίρνει την εξής μορφή: υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F'(x)g(x)dx = g(a)F(\xi) + g(b)(F(b) - F(\xi)).$$

Η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη στο αριστερό μέλος. Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_a^b F'(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx\\ &= F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx,\end{aligned}$$

αφού $F(a)=0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού: η g είναι μονότονη, άρα η g' διατηρεί πρόσημο στο $[a,b]$. Η F είναι συνεχής και η g' ολοκληρώσιμη, άρα υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b)-g(a)).$$

Αντικαθιστώντας στην (5.3.8) παίρνουμε

$$\int_a^b F'(x)g(x) = F(b)g(b)-F(\xi)(g(b)-g(a)) = g(a)F(\xi)+g(b)(F(b)-F(\xi)),$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.8.3 (πρώτο θεώρημα αντικατάστασης)**.** *Έστω $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η φ' είναι ολοκληρώσιμη. Αν $I=\varphi([a,b])$ και $f:I\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(s)\,ds.$$

Απόδειξη. Η φ είναι συνεχής, άρα το $I=\varphi([a,b])$ είναι κλειστό διάστημα. Η f είναι συνεχής στο I, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο I. Ορίζουμε $F:I\to\mathbb{R}$ με

$$F(x)=\int_{\varphi(a)}^{x} f(s)\,ds$$

(παρατηρήστε ότι το $\varphi(a)$ δεν είναι απαραίτητα άκρο του I, δηλαδή η F δεν είναι απαραίτητα το αόριστο ολοκλήρωμα της f στο I). Αφού η f είναι συνεχής στο I, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο I και $F'=f$. Έπεται ότι

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^b F'(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(F'\circ\varphi)\cdot\varphi' = (F\circ\varphi)'.$$

Η $(F'\circ\varphi)\cdot\varphi'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, άρα η $(F\circ\varphi)'$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_a^b (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_a^b (F'\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_a^b (F\circ\varphi)' = (F\circ\varphi)(b)-(F\circ\varphi)(a).$$

Αφού

$$(F\circ\varphi)(b)-(F\circ\varphi)(a) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f - \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} f = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f,$$

παίρνουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 7.8.4 (δεύτερο θεώρημα αντικατάστασης)**.** *Έστω $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $\psi'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αν $I=\psi([a,b])$ και $f:I\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\int_a^b f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)(\psi^{-1})'(s)\,ds.$$

Απόδειξη. Η ψ' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $[a,b]$, άρα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική στο $[a,b]$. Συνεπώς, η ψ είναι γνησίως μονότονη στο $[a,b]$. Αν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέσουμε ότι η ψ είναι γνησίως αύξουσα τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $\psi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ της ψ στο $I = \psi([a,b]) = [\psi(a), \psi(b)]$. Εφαρμόζουμε το πρώτο θεώρημα αντικατάστασης για την $f \cdot (\psi^{-1})'$ (παρατηρήστε ότι η $(\psi^{-1})'$ είναι συνεχής στο I). Έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f \cdot (\psi^{-1})' &= \int_a^b [(f \cdot (\psi^{-1})') \circ \psi]\psi' \\ &= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot [(\psi^{-1})' \circ \psi]\psi' \\ &= \int_a^b (f \circ \psi) \cdot (\psi^{-1} \circ \psi)' \\ &= \int_a^b f \circ \psi.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

7.9 Γενικευμένα ολοκληρώματα

Σε αυτήν την παράγραφο επεκτείνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος για συναρτήσεις που δεν είναι φραγμένες ή είναι ορισμένες σε διαστήματα που δεν είναι κλειστά και φραγμένα. Θα αρκεστούμε σε κάποιες βασικές και χρήσιμες περιπτώσεις.

1. Υποθέτουμε ότι $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$ και $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε διάστημα της μορφής $[a,x]$, όπου $a < x < b$. Αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ και ορίζουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Αν το «όριο» είναι $\pm\infty$ τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t)\,dt$ αποκλίνει στο $\pm\infty$. Εντελώς ανάλογα ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ (όπου $a \in \mathbb{R}$ ή $a = -\infty$) που είναι ολοκληρώσιμη στο $[x,b]$ για κάθε $a < x < b$, να είναι το

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt,$$

αν το τελευταίο όριο υπάρχει.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\,\Big|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$. Για κάθε $x>1$ έχουμε

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\,|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$$

Συνεπώς,

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln x = +\infty.$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\ln x$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_x^1 \ln t\,dt = t\ln t - t\,|_x^1 = -1 - x\ln x + x.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 0^+}(-1 - x\ln x + x) = -1.$$

(δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι φραγμένη: $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x}} = +\infty$. Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2\sqrt{1-t}\,|_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x f(t)\,dt = \lim_{x\to 1^-}(2-2\sqrt{1-x}) = 2.$$

(ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin x$. Για κάθε $x>0$ έχουμε

$$\int_0^x \sin t\,dt = -\cos t\,|_0^x = \cos x - 1.$$

Αφού το όριο $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos x - 1)$ δεν υπάρχει, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \sin t\,dt$ δεν παίρνει κάποια τιμή.

2. Υποθέτουμε ότι $b\in\mathbb{R}$ ή $b=+\infty$ και $a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$. Έστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε κλειστό διάστημα $[x,y]$, όπου $a<x<y<b$. Θεωρούμε τυχόν $c\in(a,b)$ και εξετάζουμε αν υπάρχουν τα γενικευμένα ολοκληρώματα

$$\int_a^c f(t)\,dt \quad\text{και}\quad \int_c^b f(t)\,dt.$$

Αν υπάρχουν και τα δύο, τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t)\,dt$ υπάρχει και είναι ίσο με

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, η τιμή του αθροίσματος στο δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από την επιλογή του c στο (a,b) (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα ορίζεται καλά με αυτόν τον τρόπο. Αν κάποιο από τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα $\int_a^c f(t)\,dt$ και $\int_c^b f(t)\,dt$ δεν έχει τιμή, τότε λέμε ότι το $\int_a^b f(t)\,dt$ δεν ορίζεται (δεν έχει τιμή). Στις περιπτώσεις που κάποιο από τα δύο ή και τα δύο γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνουν στο $\pm\infty$ ισχύουν τα συνήθη για τις μορφές $a \pm \infty$.

Παραδείγματα

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{2} = +\infty.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = -\infty.$$

Συνεπώς, το $\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt$ δεν ορίζεται: έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty) + (-\infty)$.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Έχουμε

$$\int_0^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \pi/2.$$

Όμοια,

$$\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = \pi/2.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

7.9.1 Το κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}^+$ μη αρνητική συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[a,x]$, όπου $x > a$. Σε αυτήν την περίπτωση, η συνάρτηση

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι αύξουσα στο $(a,+\infty)$. Συνεπώς, το

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

υπάρχει αν και μόνο αν η F είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, $\int_a^\infty f(t)\,dt = +\infty$.

Αντίστοιχο αποτέλεσμα είχαμε δεί για την σύγκλιση σειρών $\sum_{k=1}^\infty a_k$ με μη-αρνητικούς όρους. Μια τέτοια σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της είναι άνω φραγμένη. Διαφορετικά, αποκλίνει στο $+\infty$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει ένα κριτήριο σύγκλισης για σειρές της μορφής $\sum_{k=1}^\infty f(k)$, όπου $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια φθίνουσα μη-αρνητική συνάρτηση.

Θεώρημα 7.9.1. *Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ φθίνουσα συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Θεωρούμε την ακολουθία (a_k) με $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, η σειρά μη αρνητικών όρων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι η f είναι φθίνουσα προκύπτει άμεσα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[k, k+1]$ και

$$a_{k+1} = f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k) = a_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε για κάθε $x > 1$ έχουμε

$$\int_1^x f(t)\,dt \leqslant \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{[x]} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Έπεται ότι το

$$\int_1^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)\,dt$$

υπάρχει. Αντίστροφα, αν το $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ υπάρχει, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) &\leqslant f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \\ &= f(1) + \int_1^n f(t)\,dt \leqslant f(1) + \int_1^{\infty} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Αφού η ακολουθία (s_n) των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι άνω φραγμένη, η σειρά συγκλίνει. $\square$.

Παραδείγματα

(α) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ αποκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t\ln t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t\ln t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y} = \lim_{x\to\infty} (\ln(\ln x) - \ln(\ln 2)) = +\infty.$$

(β) Η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει διότι

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{dy}{y^2} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

7.10 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

(στ) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

(ζ) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(η) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leqslant 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b, 1]$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a, b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

5. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

(α) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

(β) $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

6. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0, 2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

7. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

8. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

10. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

11. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

12. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

13. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

14. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

15. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a, b);

16. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

17. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει $s \in [0, 1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{f(s)}{3}.$$

18. Υποθέτουμε ότι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

19. Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Αποδείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

20. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Αποδείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

21. Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Αποδείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

22. Έστω $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right) dt.$$

Βρείτε την F'.

Β′ Ομάδα

23. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n = \int_0^1 f(x^n)dx$. Αποδείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

24. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

25. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

27. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Αποδείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα αποδείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

30. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

31. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

32. Έστω $a,b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

33. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = xf(x).$$

34. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

35. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t)dt$$

για κάθε $x \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geqslant 0$.

36. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

37. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx)dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)|dx.$$

38. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.

Γ΄ Ομάδα

39. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

40. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\, dt \leqslant \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

41. Έστω $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\, dt.$$

Αποδείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1} dt.$$

42. Έστω $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\, dx$ είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

43. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=f(b)=0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2dx=1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες αποδείξτε ότι

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx=-\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2[f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2dx\right)\geqslant\frac{1}{4}.$$

44. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\right]dx$$
$$=(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποδείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\leqslant(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

45. Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$,

$$f(k)=\int_k^{k+1}f(x)\,dx-\int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)\,dx.$$

46. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx=0.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx=f(1).$$

47. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}\,dx=f(0).$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx=f(0).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Τεχνικές ολοκλήρωσης

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφουμε, χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα, τις βασικές μεθόδους υπολογισμού ολοκληρωμάτων. Δίνεται μια συνάρτηση f και θέλουμε να βρούμε μια αντιπαράγωγο της f, δηλαδή μια συνάρτηση F με την ιδιότητα $F' = f$. Τότε,

$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

8.1 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

8.1.1 Πίνακας στοιχειωδών ολοκληρωμάτων

Κάθε τύπος παραγώγισης $F'(x) = f(x)$ μας δίνει έναν τύπο ολοκλήρωσης: η F είναι αντιπαράγωγος της f. Μπορούμε έτσι να δημιουργήσουμε έναν πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων, αντιστρέφοντας τους τύπους παραγώγισης των πιο βασικών συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}, \qquad a \neq -1, &\qquad \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \\
\int e^x dx = e^x + c, &\qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c \\
\int \cos x\, dx = \sin x + c, &\qquad \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \tan x + c \\
\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\cot x + c, &\qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c \\
\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan x + c. &
\end{aligned}$$

8.1.2 Υπολογισμός του $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx$

Η αντικατάσταση $u = \varphi(x)$, $du = \varphi'(x)\, dx$ μας δίνει

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx = \int f(u)\, du, \qquad u = \varphi(x).$$

Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου u την $\varphi(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$$

θέτουμε $u = \arctan x$. Τότε, $du = \frac{dx}{1+x^2}$ και αναγόμαστε στο

$$\int u\,du = \frac{u^2}{2} + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + c.$$

(β) Για τον υπολογισμό του

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

θέτουμε $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x\,dx$ και αναγόμαστε στο

$$-\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c.$$

(γ) Για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

θέτουμε $u = \sqrt{x}$. Τότε, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ και αναγόμαστε στο

$$\int 2\cos u\,du = 2\sin u + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sin(\sqrt{x}) + c.$$

8.1.3 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα που περιέχουν δυνάμεις ή γινόμενα τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούν να αναχθούν σε απλούστερα αν χρησιμοποιήσουμε τις βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & 1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}\\
1 + \cot^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, & \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}\\
\sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2}, & \sin 2x &= 2\sin x\,\cos x\\
\sin ax \sin bx &= \frac{\cos(a-b)x - \cos(a+b)x}{2}, & \sin ax \cos bx &= \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2}\\
\cos ax \cos bx &= \frac{\cos(a+b)x + \cos(a-b)x}{2}.
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του

$$\int \cos^2 x \, dx$$

χρησιμοποιούμε την $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$: έχουμε

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c.$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπλογίσουμε το $\int \cos^4 x \, dx$, χρησιμοποιώντας την

$$\cos^4 x = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}.$$

(β) Για τον υπολογισμό του

$$\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \, \sin x \, dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \, dx$$

είναι προτιμότερη η αντικατάσταση $u = \cos x$. Τότε, $du = -\sin x \, dx$ και αναγόμαστε στο

$$-\int (1-u^2)^2 \, du = -u + \frac{2u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + c.$$

Έπεται ότι

$$\int \sin^5 x \, dx = -\cos x + \frac{2\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c.$$

Την ίδια μέθοδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για οποιοδήποτε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx$$

αν ένας από τους εκθέτες m, n είναι περιττός και ο άλλος άρτιος. Για παράδειγμα, αν $m = 3$ και $n = 4$, γράφουμε

$$\int \cos^3 x \sin^4 x \, dx = \int (1-\sin^2 x) \sin^4 x \cos x \, dx$$

και, με την αντικατάσταση $u = \sin x$, αναγόμαστε στο απλό ολοκλήρωμα

$$\int (1-u^2) u^4 du.$$

(γ) Δύο χρήσιμα ολοκληρώματα είναι τα

$$\int \tan^2 x \, dx \;\; \text{και} \int \cot^2 x \, dx.$$

Για το πρώτο γράφουμε

$$\int \tan^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int [(\tan x)' - 1] \, dx = \tan x - x + c,$$

και, όμοια, για το δεύτερο γράφουμε

$$\int \cot^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int [(-\cot x)' - 1] \, dx = -\cot x - x + c.$$

8.1.4 Υπολογισμός του $\int f(x)\,dx$ με την αντικατάσταση $x = \varphi(t)$

Η αντικατάσταση $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\,dt$ – όπου φ αντιστρέψιμη συνάρτηση – μας δίνει

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Αν το ολοκλήρωμα δεξιά υπολογίζεται ευκολότερα, θέτοντας όπου t την $\varphi^{-1}(x)$ υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αριστερά.

Παραδείγματα: τριγωνομετρικές αντικαταστάσεις

(α) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{a^2 - x^2}$ θέτουμε $x = a\sin t$. Τότε,

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \;\text{ και }\; dx = a\cos t\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}},$$

αν θέσουμε $x = 3\sin t$, τότε $dx = 3\cos t\,dt$ και $\sqrt{9 - x^2} = 3\cos t$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{3\cos t\,dt}{9\sin^2 t(3\cos t)} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{9}\cot t + c.$$

Τότε, από την

$$\cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x},$$

παίρνουμε

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{9x} + c.$$

(β) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2 - a^2}$ θέτουμε $x = a/\cos t$. Τότε,

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t \;\text{ και }\; dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx,$$

αν θέσουμε $x = \frac{2}{\cos t}$, τότε $dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \frac{2\tan t}{\cos t}\,dt$ και $\sqrt{x^2 - 4} = 2\tan t$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{2\tan t}{2/\cos t}\,\frac{2\tan t}{\cos t}\,dt = 2\int \tan^2 t\,dt = 2\tan t - 2t + c.$$

Αφού $t = \arctan\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$, παίρνουμε

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - 4} - 2\arctan\frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2} + c.$$

(γ) Σε ολοκληρώματα που περιέχουν την $\sqrt{x^2+a^2}$ θέτουμε $x = a\tan t$. Τότε,

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t} \;\text{ και }\; dx = \frac{a}{\cos^2 t}\,dt.$$

Για παράδειγμα, για τον υπολογισμό του

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx,$$

αν θέσουμε $x = \tan t$, τότε $dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt$ και $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\cos t}$, και αναγόμαστε στο

$$\int \frac{1}{\cos t}\frac{1}{\tan^4 t}\frac{1}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{\sin^4 t}\,dt = -\frac{2}{3\sin^3 t} + c.$$

Αφού $t = \arctan x$, βλέπουμε ότι $\sin t = \tan t \cos t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ και τελικά παίρνουμε

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\,dx = -\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3x^3} + c.$$

8.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

Ο τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη είναι:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx,$$

και προκύπτει άμεσα από την $(fg)' = fg' + f'g$, αν ολοκληρώσουμε τα δύο μέλη της. Συχνά, είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του $\int x\log x\,dx$ γράφουμε

$$\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(β) Για τον υπολογισμό του $\int x\cos x\,dx$ γράφουμε

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(γ) Για τον υπολογισμό του $\int e^x \sin x\,dx$ γράφουμε

$$\begin{aligned} I = \int e^x\sin x\,dx &= \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \\ &= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c.$$

(δ) Για τον υπολογισμό του $\int x\sin^2 x\,dx$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ γράφουμε

$$\int x\sin^2 x\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \int x\frac{\cos(2x)}{2}\,dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (β).

(ε) Για τον υπολογισμό του $\int \log(x+\sqrt{x})\,dx$ γράφουμε

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\log(x+\sqrt{x})\,dx = x\log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

8.3 Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε μια μέθοδο με την οποία μπορεί κανείς να υπολογίσει το αόριστο ολοκλήρωμα οποιασδήποτε ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0}.$$

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $n < m$. Αν ο βαθμός n του αριθμητή $p(x)$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον βαθμό m του παρονομαστή $q(x)$, τότε διαιρούμε το $p(x)$ με το $q(x)$: υπάρχουν πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ ώστε ο βαθμός του $\upsilon(x)$ να είναι μικρότερος από m και

$$p(x) = \pi(x)q(x) + \upsilon(x).$$

Τότε,

$$f(x) = \frac{\pi(x)q(x)+\upsilon(x)}{q(x)} = \pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{q(x)}.$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό του $\int f(x)\,dx$ μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε χωριστά το $\int \pi(x)\,dx$ (απλό ολοκλήρωμα πολυωνυμικής συνάρτησης) και το $\int \frac{\upsilon(x)}{q(x)}\,dx$ (ρητή συνάρτηση με την πρόσθετη ιδιότητα ότι $\deg(\upsilon) < \deg(q)$).

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι $f = p/q$ και $\deg(p) < \deg(q)$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $a_n = b_m = 1$. Χρησιμοποιούμε τώρα το γεγονός ότι κάθε πολυώνυμο αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων όρων. Το $q(x) = x^m + \cdots + b_1x + b_0$ γράφεται στη μορφή

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}.$$

Οι $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ είναι οι πραγματικές ρίζες του $q(x)$ (και r_j είναι η πολλαπλότητα της ρίζας α_j) ενώ οι όροι $x^2+\beta_ix+\gamma_i$ είναι τα γινόμενα $(x-z_i)(x-\overline{z_i})$ όπου z_i οι μιγαδικές ρίζες του $q(x)$ (και s_i είναι η πολλαπλότητα της ρίζας z_i). Παρατηρήστε ότι κάθε όρος της μορφής $x^2+\beta_ix+\gamma_i$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Επίσης, οι $k, s \geqslant 0$ και $r_1 + \cdots + r_k + 2s_1 + \cdots + 2s_l = m$ (ο βαθμός του $q(x)$).

Γράφουμε την $f(x)$ στη μορφή

$$f(x) = \frac{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{s_1}\cdots(x^2+\beta_lx+\gamma_l)^{s_l}},$$

και την «αναλύουμε σε απλά κλάσματα»: υπάρχουν συντελεστές A_{jt}, B_{it}, Γ_{it} ώστε

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{A_{k1}}{x-\alpha_k} + \frac{A_{k2}}{(x-\alpha_k)^2} + \cdots + \frac{A_{kr_1}}{(x-\alpha_k)^{r_k}} \\ &+ \frac{B_{11}x+\Gamma_{11}}{x^2+\beta_1 x+\gamma_1} + \frac{B_{12}x+\Gamma_{12}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^2} + \cdots + \frac{B_{1s_1}x+\Gamma_{1s_1}}{(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{s_1}} \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{B_{l1}x+\Gamma_{l1}}{x^2+\beta_l x+\gamma_l} + \frac{B_{l2}x+\Gamma_{l2}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^2} + \cdots + \frac{B_{ls_1}x+\Gamma_{ls_l}}{(x^2+\beta_l x+\gamma_l)^{s_l}}. \end{aligned}$$

Η εύρεση των συντελεστών γίνεται ως εξής: πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της ισότητας με το $q(x)$ (παρατηρήστε ότι ισούται με το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών του δεξιού μέλους). Προκύπτει τότε μια ισότητα πολυωνύμων. Εξισώνοντας τους συντελεστές τους, παίρνουμε ένα σύστημα m εξισώσεων με m αγνώστους: τους $A_{j1}, \ldots, A_{jr_j}$, $B_{i1}, \ldots, B_{is_i}$, $\Gamma_{i1}, \ldots, \Gamma_{is_i}$, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, l$.

Μετά από αυτό το βήμα, χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος, αναγόμαστε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων των εξής δύο μορφών:

(α) Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{1}{(x-\alpha)^k} dx$. Αυτά υπολογίζονται άμεσα: αν $k \geqslant 2$ τότε

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k}\, dx = -\frac{1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} + c,$$

και αν $k = 1$ τότε

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\, dx = \ln|x-\alpha| + c.$$

(β) Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{Bx+\Gamma}{(x^2+bx+\gamma)^k} dx$, όπου το $x^2+bx+\gamma$ έχει αρνητική διακρίνουσα. Γράφοντας $Bx+\Gamma = \frac{B}{2}(2x+b) + \left(\Gamma - \frac{Bb}{2}\right)$, αναγόμαστε στα ολοκληρώματα

$$\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+\gamma)^k} dx \quad \text{και} \quad \int \frac{1}{(x^2+bx+\gamma)^k}\, dx. (6.3.8)$$

Το πρώτο υπολογίζεται με την αντικατάσταση $y = x^2+bx+\gamma$ (εξηγήστε γιατί). Για το δεύτερο, γράφουμε πρώτα $x^2+bx+\gamma = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-b^2}{4}$ και με την αντικατάσταση $x+\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{4\gamma-b^2}}{2}y$ αναγόμαστε (εξηγήστε γιατί) στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$I_k = \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\, dy.$$

Ο υπολογισμός του I_k βασίζεται στην αναδρομική σχέση

$$I_{k+1} = \frac{1}{2k}\frac{y}{(y^2+1)^k} + \frac{2k-1}{2k} I_k.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I_k = \int \frac{dx}{(y^2+1)^k} &= \int (y)' \frac{1}{(y^2+1)^k}\, dy = \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k \int \frac{y^2}{(y^2+1)^{k+1}}\, dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k \int \frac{y^2+1-1}{(y^2+1)^{k+1}}\, dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2k \int \frac{1}{(y^2+1)^k}\, dy - 2k \int \frac{1}{(y^2+1)^{k+1}}\, dy \\
&= \frac{y}{(y^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}.
\end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο. Γνωρίζουμε ότι

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y + c,$$

άρα, χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση, μπορούμε διαδοχικά να βρούμε τα $I_2, I_3, \ldots$.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{3x^2+6}{x^3+x^2-2x}\, dx = \int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\, dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)} &= \frac{a(x-1)(x+2) + bx(x+2) + cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^2 + (a+2b-c)x - 2a}{x(x-1)(x+2)},
\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b+c = 3, \qquad a+2b-c = 0, \qquad -2a = 6.$$

Η λύση είναι: $a = -3$, $b = 3$ και $c = 3$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x^2+6}{x(x-1)(x+2)}\, dx &= -3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} \\
&= -3\ln|x| + 3\ln|x-1| + 3\ln|x+2| + c.
\end{aligned}$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}\, dx = \int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\, dx,$$

ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} &= \frac{a(x+2)^2 + b(x-1)(x+2) + c(x-1)}{(x-1)(x+2)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (4a+b+c)x + (4a-2b-c)}{(x-1)(x+2)^2},\end{aligned}$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=5, \qquad 4a+b+c=12, \qquad 4a-2b-c=1.$$

Η λύση είναι: $a=2$, $b=3$ και $c=1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2}\,dx &= 2\int \frac{dx}{x-1} + 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= 2\ln|x-1| + 3\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + c.\end{aligned}$$

(γ) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x+1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}\,dx = \int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx,$$

ζητάμε $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx+c}{x^2+1} + \frac{dx+e}{(x^2+1)^2}.$$

Καταλήγουμε στην

$$x+1 = a(x^2+1)^2 + (bx+c)(x-1)(x^2+1) + (dx+e)(x-1)$$

και λύνουμε το σύστημα

$$a+b=0, \quad -b+c=0, \quad 2a+b-c+d=0, \quad -b+c-d+e=1, \quad a-c-e=1.$$

Η λύση είναι: $a=1/2$, $b=-1/2$, $c=-1/2$, $d=-1$ και $e=0$. Συνεπώς,

$$\int \frac{x+1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}\,dx$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c.\end{aligned}$$

8.4 Κάποιες χρήσιμες αντικαταστάσεις

8.4.1 Ρητές συναρτήσεις των $\cos x$ και $\sin x$

Για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx$$

όπου $R(u, v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v, συχνά χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$$u = \tan\frac{x}{2}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

και

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Επίσης, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{2}$, δηλαδή

$$dx = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Έτσι, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \frac{2u}{1 + u^2}\right)\frac{2}{1 + u^2}\, du.$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση $F(u) = R\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}$ είναι ρητή συνάρτηση του u, το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με τη μέθοδο που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Παραδείγματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2}du$, $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{(1 + u)^2}{u^2(1 + u^2)}\, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{x}{1 + \sin x}\, dx$$

θέτουμε $u = \tan\frac{x}{2}$. Αφού $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ και $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}\int 2\arctan u \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\, du &= 4\int \arctan u \frac{1}{(1+u)^2}\, du \\ &= 4\int \arctan u \left(-\frac{1}{1+u}\right)' du \\ &= -4\frac{\arctan u}{1+u} + 4\int \frac{1}{(1+u^2)(1+u)}\, du.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

8.4.2 Ολοκληρώματα αλγεβρικών συναρτήσεων ειδικής μορφής

Περιγράφουμε εδώ κάποιες αντικαταστάσεις που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx, \qquad \int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx,$$

όπου $R(u, v)$ είναι πηλίκο πολυωνύμων με μεταβλητές u και v.

(α) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{1-x^2})\, dx$, κάνουμε πρώτα την αλλαγή μεταβλητής $x = \sin t$. Αφού $\sqrt{1-x^2} = \cos t$ και $dx = \cos t\, dt$, αναγόμαστε στο ολοκλήρωμα

$$\int R(\sin t, \cos t) \cos t\, dt,$$

το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{x^2-1})\, dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{1}{\cos t}$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{\sin t}{\cos t}$ και $dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{1}{\sin t}, \frac{\sin t}{\cos t}\right) \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\, dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u, v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2-1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\, du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2+1}{2u}, \frac{u^2-1}{2u}\right) \frac{u^2-1}{2u^2}\, du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Για το ολοκλήρωμα $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx$, μια ιδέα είναι να χρησιμοποιήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = -\cot t$. Τότε, $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{\sin t}$ και $dx = \frac{1}{\sin^2 t}\, dt$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int R\left(-\frac{\cos t}{\sin t}, \frac{1}{\sin t}\right) \frac{1}{\sin^2 t}\, dt = \int R_1(\cos t, \sin t)\, dt$$

για κάποια ρητή συνάρτηση $R_1(u,v)$, το οποίο υπολογίζεται με την αντικατάσταση της προηγούμενης υποπαραγράφου (ρητή συνάρτηση των $\cos t$ και $\sin t$).

Είναι όμως προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την εξής αλλαγή μεταβλητής:

$$u = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\, du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ρητό ολοκλήρωμα

$$\int R\left(\frac{u^2-1}{2u}, \frac{u^2+1}{2u}\right) \frac{u^2+1}{2u^2}\, du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Παραδείγματα

(α) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \sqrt{x^2-1}\, dx$$

θέτουμε $x^2-1 = (x-u)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{u^2+1}{2u}$. Τότε, $dx = \frac{u^2-1}{2u^2}\, du$ και $x - u = \frac{1-u^2}{2u}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(u^2-1)^2}{4u^3}\, du.$$

(β) Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

θέτουμε $u = x + \sqrt{x^2+1}$. Τότε,

$$x = \frac{u^2-1}{2u}, \qquad \sqrt{x^2-1} = \frac{u^2+1}{2u}, \qquad dx = \frac{u^2+1}{2u^2}\, du.$$

Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{2}{u^2-1}\, du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

8.5 Ασκήσεις

Α΄ Ομάδα

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x\, dx\ , \quad \int \cos^2 x \sin^3 x\, dx\ , \quad \int \tan^2 x\, dx\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ , \quad \int \sqrt{\tan x}\, dx\ .$$

4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\, dx\ , \qquad \int x\log x\, dx$$

$$\int x\cos x\, dx\ , \qquad \int e^x \sin x\, dx\ , \qquad \int x\sin^2 x\, dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\, dx\ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\, dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\, dx\ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\, dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\ .$$

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x)\, dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\, dx.$$

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\, dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\, dx.$$

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx\ , \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\, dx.$$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

10. Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και από τον x-άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\cos x$ και $g(x)=\sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$.

Β′ Ομάδα

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\ , \quad \int \frac{1}{\sin x}\,dx\ , \quad \int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \quad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \quad \int x\arctan x\,dx\ , \quad \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\ , \quad \int \sqrt{x^2-1}\,dx.$$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$

15. Αποδείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p\,dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p\in\mathbb{R}$.

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx\ , \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ , \quad \int_0^1 \log x\,dx\ .$$

17. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^n\,dx = n!$$

18. Βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt\ , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t\sin t\,dt.$$