# Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

---

## Κεφάλαιο 2: Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

---

### Α΄ Ομάδα

**1.** Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.

(γ) Αν $(a_n)$ είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η $(a_n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.

(δ) Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

(ε) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

(στ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

(ζ) Αν $(a_n)$ είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \to 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

(η) Έστω $(a_n)$ αύξουσα ακολουθία. Αν η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ϑ) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η $(a_n)$ συγκλίνει.

(ι) Αν $a_n > 0$ και η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$.

(ια) Αν η $(a_n)$ συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $(a_n)$ είναι σταθερή.

*Υπόδειξη.* (α) *Λάθος.* Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

(β) *Σωστό.* Υποθέτουμε ότι $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geqslant n_0, \text{ τότε } |a_n| \leqslant |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και ελέγχουμε ότι $|a_n| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leqslant n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η $(a_n)$ είναι φραγμένη.

(γ) *Σωστό.* Υποθέτουμε ότι η $(a_n)$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό $a$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Τότε, αν $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_{n_0}| = |(a_n - a) + (a - a_{n_0})| \leqslant |a_n - a| + |a - a_{n_0}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Όμως, οι $a_n$ και $a_{n_0}$ είναι ακέραιοι, άρα $a_n = a_{n_0}$. Δηλαδή, η $(a_n)$ είναι τελικά σταθερή: για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $a_n = a_{n_0}$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι απλή: γενικότερα, αν για μια ακολουθία $(a_n)$ στο $\mathbb{R}$ (όχι αναγκαστικά στο $\mathbb{Z}$) υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ισχύει $a_n = a$, τότε $a_n \to a$ (εξηγήστε, με βάση τον ορισμό του ορίου).

(δ) *Λάθος*. Ας υποθέσουμε ότι $(a_n)$ είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Από την αρχή της καλής διάταξης, έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_m \leqslant a_n$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $a_{m+1} \in A$ και $a_{m+1} < a_m$.

(ε) *Λάθος*. Η ακολουθία $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ είναι ακολουθία άρρητων αριθμών, όμως $a_n \to 0$ (και ο 0 είναι ρητός).

(στ) *Σωστό*. Διακρίνετε περιπτώσεις. Αν ο $x$ είναι άρρητος, μπορείτε να θεωρήσετε τη σταθερή ακολουθία $a_n = x$. Αν ο $x$ είναι ρητός, μπορείτε να θεωρήσετε την ακολουθία $a_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$.

(ζ) *Σωστό*. Υποθέτουμε πρώτα ότι $a_n \to 0$. Έστω $M > 0$. Αφού $a_n \to 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $0 < a_n < \frac{1}{M}$. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $\frac{1}{a_n} > M$. Έπεται ότι $\frac{1}{a_n} \to +\infty$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

(η) *Σωστό*. Έστω $M > 0$. Αφού η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η $(a_n)$ είναι αύξουσα, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n \geqslant a_{n_0} > M$. Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to +\infty$.

(ϑ) *Λάθος*. Η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, όμως η $|a_n| = 1$ συγκλίνει.

(ι) *Λάθος*. Θεωρήστε την ακολουθία $(a_n)$ με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $a_n > 0$ και η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη, όμως $a_n \not\to +\infty$ (αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της $(a_n)$ να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της είναι ίσοι με 1).

(ια) *Σωστό*. Αν $a_n \to a$ τότε οι ακολουθίες $(a_{2k})$ και $(a_{2k-1})$ συγκλίνουν στον $a$ (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση ότι $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι οι $(a_{2k})$ και $(a_{2k-1})$ είναι σταθερές ακολουθίες: υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots \quad \text{και} \quad y = a_2 = a_4 = a_6 = \cdots .$$

Από τις $a_{2k-1} \to x$ και $a_{2k} \to y$ έπεται ότι $x = y = a$. Άρα, η $(a_n)$ είναι σταθερή.

**2.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \to a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \to 0$;

*Υπόδειξη*. Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Τότε,

$$\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3a/2}.$$

Όμως, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, από το (α). Τότε, το κριτήριο παρεμβολής μας εξασφαλίζει ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Αν $a_n \to 0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο: θεωρήστε τα παραδείγματα $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{3^n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n^n}$. Τι παρατηρείτε για τις $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}$;

**3.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\} \\ A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\} \\ A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\} \\ A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant 2\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, 5$ εξετάστε αν (α) το $A_j$ είναι πεπερασμένο, (β) το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.

*Υπόδειξη.* (α) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.001 > 0$ βρίσκουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_1$ ισχύει $1.999 < a_n < 2.001$. Άρα, κάθε $n \geqslant n_1$ ανήκει στο $A_1$. Το $\mathbb{N} \setminus A_1$ είναι πεπερασμένο (και το $A_1$ άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(γ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.02 > 0$ βρίσκουμε $n_3 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_3$ ισχύει $1.98 < a_n < 2.02$. Άρα, κάθε $n \geqslant n_3$ ανήκει στο $\mathbb{N} \setminus A_3$. Το $A_3$ είναι πεπερασμένο (και το $\mathbb{N} \setminus A_3$ άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(δ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.00003 > 0$ βρίσκουμε $n_4 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_4$ ισχύει $1.99997 < a_n < 2.00003 < 2.0001$. Άρα, κάθε $n \geqslant n_4$ ανήκει στο $A_4$. Το $\mathbb{N} \setminus A_4$ είναι πεπερασμένο (και το $A_4$ άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του $\mathbb{N}$).

(ε) Το $A_5$ μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, εξαρτάται από την $(a_n)$. Πάρτε σαν παραδείγματα τις ακολουθίες

$$a_n = 2, \qquad a_n = 2 + \frac{1}{n}, \qquad a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Όλες ικανοποιούν την $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $A_5 = \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \emptyset$. Στην δεύτερη, $A_5 = \emptyset$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \mathbb{N}$. Στην τρίτη, τόσο το $A_5$ όσο και το $\mathbb{N} \setminus A_5$ είναι άπειρα σύνολα (το σύνολο των περιττών και το σύνολο των άρτιων φυσικών, αντίστοιχα).

**4.** Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n} \to 1.$$

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2 - n}{n^2 + n} - 1 \right| = \left| \frac{-2n}{n^2 + n} \right| = \frac{2n}{n^2 + n} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρείτε $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - 1| < \frac{2}{n} \leqslant \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

**5.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, αποδείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.

*Υπόδειξη.* Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Άρα, $a_n > a/2 > 0$ τελικά (από τον $n_0$-οστό όρο και πέρα).

**6.** Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι

$$\left| \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right| = \frac{|1 - x^2|}{1 + x^2} \leqslant \frac{1 + x^2}{1 + x^2} = 1.$$

Επίσης, αν $x \neq 0$ τότε $\frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1$ (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\left| \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \right| < 1.$$

Από το (α), αν $x \neq 0$ τότε η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \to 0$. Τέλος, αν $x = 0$ έχουμε $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n = 1 \to 1$.

Δηλαδή, η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ συγκλίνει, όποιο κι αν είναι το $x$.

**7.** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{3^n}{n!}, \qquad \beta_n = \frac{2n-1}{3n+2}, \qquad \gamma_n = n - \sqrt{n^2-n}, \qquad \delta_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

$$\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10}-1)^n, \qquad \zeta_n = \frac{n^6}{6^n}, \qquad \eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right), \qquad \vartheta_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \nu_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad \rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n, \qquad \sigma_n = \frac{n^2}{3n^2+n+1}$$

$$\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \qquad \xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.$$

*Υπόδειξη.* (α) $\alpha_n = \frac{3^n}{n!}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{3}{n+1} \to 0 < 1$, άρα $\alpha_n \to 0$.

(β) $\beta_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2-1/n}{3+2/n} \to \frac{2}{3}$.

(γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2-n} = \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} \to \frac{1}{2}$.

(δ) $\delta_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leqslant e,$$

διότι η $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον $e$. Παίρνοντας $n$-οστές ρίζες βλέπουμε ότι

$$1+\frac{1}{n} \leqslant \delta_n \leqslant \sqrt[n]{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\delta_n \to 1$ (αφού $1+\frac{1}{n} \to 1$ και $\sqrt[n]{e} \to 1$).

(ε) $\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10}-1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\varepsilon_n} = \sqrt[n]{10}-1 \to 1-1 = 0 < 1$. Άρα, $\varepsilon_n \to 0$.

(ζ) $\zeta_n = \frac{n^6}{6^n}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \to \frac{1}{6} < 1$. Άρα, $\zeta_n \to 0$.

(η) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Χρησιμοποιώντας την $\sin t \leqslant t$ για $t > 0$, βλέπουμε ότι $0 < \eta_n \leqslant n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $\eta_n \to 0$.

(ϑ) $\vartheta_n = \frac{\sin n}{n}$: η $(\sin n)$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{n}\right)$ μηδενική. Άρα, $\vartheta_n \to 0$.

(κ) $\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} = \frac{2n^n}{(n+1)^n} = 2/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{2}{e} < 1.$$

Άρα, $\kappa_n \to 0$.

(ν) $\nu_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}$: παρατηρήστε ότι

$$\nu_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$$

(ρ) $\rho_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} \leqslant e,$$

διότι η $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον $e$. Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες βλέπουμε ότι

$$\sqrt{x_n} \leqslant \rho_n \leqslant \sqrt{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $\rho_n \to \sqrt{e}$.
(ς) $\sigma_n = \frac{n^2}{3n^2+n+1} \to \frac{1}{3}$.
(τ) $\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3/\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \to \frac{3}{e} > 1.$$

Άρα, $\tau_n \to +\infty$.
(ξ) $\xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$: η $(\sin(n^3))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Άρα, $\xi_n \to 0$.

**8.** (α) Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_k > 0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \to \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}.$$

*Υπόδειξη.* (α) Ορίζουμε $a = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a^n \leqslant a_1^n + \cdots + a_k^n \leqslant ka^n$. Άρα,

$$a \leqslant b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{ka^n} = a\sqrt[n]{k}.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $b_n \to a$. Για παράδειγμα,

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 7^n} \to 7.$$

(β) Το πλήθος των προσθετέων (στον ορισμό του $n$-οστού όρου) δεν είναι σταθερό. Δουλέψτε όμως όπως στο (α): παρατηρήστε ότι $n^n < 1^n + 2^n + \cdots + n^n < n \cdot n^n$ αν $n \geqslant 2$. Άρα,

$$1 < x_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n} < \sqrt[n]{n}$$

για κάθε $n \geqslant 2$. Αφού $\sqrt[n]{n} \to 1$, εφαρμόζεται το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, και $x_n \to 1$.

**9.** Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

*Υπόδειξη.* Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε $[n\alpha] \leqslant n\alpha < [n\alpha] + 1$, άρα

$$nx_n \leqslant n\alpha < nx_n + 1.$$

Έπεται ότι

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leqslant \alpha,$$

άρα $x_n \to \alpha$.

**10.** Έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.

*Υπόδειξη.* Η $(b_n)$ έχει θετικούς όρους. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)\alpha}{(1+n\alpha)(1+\alpha)} = \frac{1+(n+1)\alpha}{1+(n+1)\alpha+n\alpha^2} < 1$$

άρα η $(b_n)$ είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)\alpha}{(1+n\alpha)(1+\alpha)} = \frac{n+1}{n}\frac{\alpha+\frac{1}{n+1}}{\alpha+\frac{1}{n}}\frac{1}{1+\alpha} \to \frac{1}{1+\alpha} < 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, $b_n \to 0$.

**11.** Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$ και $b_n \to +\infty$.
(α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.
(β) Αποδείξτε ότι $a_n b_n \to +\infty$.

*Υπόδειξη.* (α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = a/2 > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Θέτοντας $\delta = a/2$ παίρνουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $M > 0$. Αφού $b_n \to +\infty$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $b_n > M/\delta$ για κάθε $n \geqslant n_1$. Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_2$ έχουμε $a_n b_n > \delta(M/\delta) = M$. Με βάση τον ορισμό, $a_n b_n \to +\infty$.

**12.** Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη*: Εξετάστε πρώτα αν η $(y_n)$ είναι μονότονη.

*Υπόδειξη.* Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

άρα η $(y_n)$ είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον $y_n$ έχει $n$ προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Άρα, η $(y_n)$ είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η $(y_n)$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

**13.** Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.
Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

*Υπόδειξη.* Αποδείξτε με επαγωγή ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 3. Άρα, $a_n \to x$ για κάποιον $x$ που ικανοποιεί την $x = \sqrt{6 + x}$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $-2$ και 3. Αφού η $(a_n)$ έχει θετικούς όρους, $a_n \to 3$.

**14.** Ορίζουμε μια ακολουθία $(a_n)$ με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν η $(a_n)$ συγκλίνει τότε το όριο της θα ικανοποιεί την $x = \frac{2x+1}{x+1}$ (εξηγήστε γιατί). Άρα $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $(a_n)$ ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $a_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η $(a_n)$ είναι αύξουσα (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι αν $a_m \leqslant a_{m+1}$ τότε

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1} - a_m}{(a_{m+1}+1)(a_m+1)} \geqslant 0.$$

(iii) Η $(a_n)$ είναι άνω φραγμένη (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$a_{m+1} = \frac{2a_m + 1}{a_m + 1} \leqslant \frac{2a_m + 2}{a_m + 1} = 2$$

για κάθε $m$. Θα μπορούσατε επίσης να δείξετε ότι $a_m \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για κάθε $m$ (αφού, από τα παραπάνω, αυτό είναι το «υποψήφιο όριο» της *αύξουσας* ακολουθίας $(a_n)$).

Αφού η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει (στον $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

**15.** Έστω $(a_n)$ μια ακολουθία. Αποδείξτε ότι $a_n \to a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες $(a_{2k})$ και $(a_{2k-1})$ συγκλίνουν στο $a$.

*Υπόδειξη.* Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες $(a_{2k})$ και $(a_{2k-1})$ συγκλίνουν στον $a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant n_1$ ισχύει $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geqslant n_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Πράγματι, παρατηρήστε ότι αν ο $n$ είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geqslant n_1$ ενώ αν ο $n$ είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geqslant n_2$.]

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \to a$.

Το αντίστροφο είναι απλό: έχουμε δει ότι αν μια ακολουθία $(a_n)$ συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία $(a_{k_n})$ της $(a_n)$ συγκλίνει στον $a$.

**16.** Έστω $(a_n)$ μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες $(a_{2k})$, $(a_{2k-1})$ και $(a_{3k})$ συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι:

(α) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k}$.

(β) Η $(a_n)$ συγκλίνει.

*Υπόδειξη.* Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \to x$, $a_{2k-1} \to y$ και $a_{3k} \to z$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Η $(a_{6k})$ είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της $(a_{2k})$ και υπακολουθία της $(a_{3k})$. Άρα, η $(a_{6k})$ συγκλίνει και $x = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{6k} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

(ii) Η $(a_{6k-3})$ είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της $(a_{2k-1})$ και υπακολουθία της $(a_{3k})$. Άρα, η $(a_{6k-3})$ συγκλίνει και $y = \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{6k-3} = \lim\limits_{k\to\infty} a_{3k} = z$.

Έπεται ότι $x = y = z$. Αφού οι $(a_{2k})$ και $(a_{2k-1})$ έχουν το ίδιο όριο, η Άσκηση 15 δείχνει ότι η $(a_n)$ συγκλίνει.

## Β′ Ομάδα

**17.** Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\alpha_n = \frac{5^n + n}{6^n - n}, \qquad \beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}, \qquad \gamma_n = \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

$$\delta_n = n^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}\right), \qquad \varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(n^2\right)$$

$$\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \mu_n = \frac{n^n}{n!}, \qquad \vartheta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}.$$

*Υπόδειξη.* (α) $\alpha_n = \frac{5^n+n}{6^n-n} = \frac{(5/6)^n+(n/6^n)}{1-(n/6^n)} \to \frac{0-0}{1-0} = 0$.

(β) $\beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leqslant \beta_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}\sqrt[n]{2}.$$

Αφού $\sqrt[n]{2} \to 1$, από το κριτήριο ισοσυγκλινουσών ακολουθιών βλέπουμε ότι $\beta_n \to 1/2$.

(γ) $\gamma_n = (\sqrt[n]{n}-1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n}-1 \to 1-1 = 0 < 1$. Άρα, $\gamma_n \to 0$.

(δ) $\delta_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n+1}}\right)$: γράφουμε

$$\begin{aligned}\delta_n &= n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} \\ &= \frac{n^2}{n(n+1)}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} \to \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(ε) $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(n^2\right)$: η $(\cos(n^2))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Άρα, $\varepsilon_n \to 0$.

(λ) $\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$: δεν συγκλίνει, αφού $\lambda_{2n} \to 1$ και $\lambda_{2n-1} \to -1$.

(μ) $\mu_n = \frac{n^n}{n!}$: παρατηρήστε ότι $\mu_n = \frac{n}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdots\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{1} \geqslant n$. Άρα, $\mu_n \to +\infty$.

(ϑ) $\vartheta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{2} < 1,$$

άρα $\vartheta_n \to 0$.

**18.** Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ b_n &= \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

*Υπόδειξη.* (α) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $a_n \to 1$.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$1+2^2+3^3+\cdots+n^n \leqslant 1+n^2+n^3+\cdots+n^n \leqslant 1+n+n^2+n^3+\cdots+n^n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x=n$, παίρνουμε

$$1+2^2+3^3+\cdots+n^n\leqslant 1+n+n^2+\cdots+n^n=\frac{n^{n+1}-1}{n-1}.$$

Συνεπώς,

$$b_n=\frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}\leqslant\frac{n^{n+1}-1}{n^n(n-1)}=\frac{n^{n+1}-1}{n^{n+1}-n^n}=\frac{1-\frac{1}{n^{n+1}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$b_n=\frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n}\geqslant\frac{n^n}{n^n}=1.$$

Δηλαδή,

$$1\leqslant b_n\leqslant\frac{1-\frac{1}{n^{n+1}}}{1-\frac{1}{n}}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $b_n\to 1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$0<\gamma_n=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}\leqslant\frac{n+1}{n!}.$$

Από το κριτήριο του λόγου προκύπτει εύκολα ότι $\frac{n+1}{n!}\to 0$. Άρα, $\gamma_n\to 0$.

(δ) Παρατηρήστε ότι

$$\delta_n=\frac{1}{n^{2/3}}+\frac{1}{(n+1)^{2/3}}+\cdots+\frac{1}{(2n)^{2/3}}\geqslant\frac{n+1}{(2n)^{2/3}}>\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{4}}\to+\infty.$$

Άρα, $\delta_n\to+\infty$.

**19.** Έστω $A$ μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν $a=\sup A$, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_n)$ στοιχείων του $A$ με $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του $A$, αποδείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι *γνησίως αύξουσα*.

*Υπόδειξη.* Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $x=x(\varepsilon)\in A$ ώστε $a-\varepsilon<x\leqslant a$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω για $\varepsilon=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots$, μπορείτε να βρείτε ακολουθία $(a_n)$ στοιχείων του $A$ με $a-\frac{1}{n}<a_n\leqslant a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $a_n\to a$.

Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι ο $a=\sup A$ δεν είναι στοιχείο του $A$. Υπάρχει $a_1\in A$ που ικανοποιεί την $a-1<a_1\leqslant a$. Όμως, $a_1\neq a$ (διότι $a\notin A$), άρα $a-1<a_1<a$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $a_1,\ldots,a_m\in A$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $a_1<a_2<\cdots<a_m<a$.

(ii) Για κάθε $k=1,\ldots,m$ ισχύει $a-\frac{1}{k}<a_k<a$.

Τότε, ο $s_m=\max\{a-\frac{1}{m+1},a_m\}$ είναι μικρότερος από τον $a$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $a_{m+1}\in A$ που ικανοποιεί την $s_m<a_{m+1}<a$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $a_m<a_{m+1}$ και $a-\frac{1}{m+1}<a_{m+1}<a$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία $(a_n)$ στοιχείων του $A$ που ικανοποιούν την $a-\frac{1}{n}<a_n<a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $a_n\to a$.

**20.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία με $a_n\to a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία $(b_n)$ θέτοντας

$$b_n=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

Αποδείξτε ότι $b_n\to a$.

*Υπόδειξη.* Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a=0$ και δείχνουμε ότι $b_n\to 0$. Θεωρούμε $\varepsilon>0$ και βρίσκουμε $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n\geqslant n_1$ ισχύει $|a_n|<\varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $n>n_1$ έχουμε

$$|b_n|\leqslant\frac{|a_1+\cdots+a_{n_1}|}{n}+\frac{n-n_1}{n}\frac{\varepsilon}{2}<\frac{|a_1+\cdots+a_{n_1}|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο αριθμός $A:=|a_1+\cdots+a_{n_1}|$ εξαρτάται από το $\varepsilon$ (αφού ο $n_1$ εξαρτάται από το $\varepsilon$) όχι όμως από το $n$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_2(A)=n_2(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n\geqslant n_2$ έχουμε

$$\frac{|a_1+\cdots+a_{n_1}|}{n}=\frac{A}{n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $n_0=\max\{n_1,n_2\}$ τότε, για κάθε $n\geqslant n_0$ ισχύει η

$$|b_n|\leqslant\frac{A}{n}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $b_n\to 0$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την ακολουθία $a_n':=a_n-a$. Τότε, $a_n'\to 0$. Άρα,

$$b_n-a=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a=\frac{(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}=\frac{a_1'+\cdots+a_n'}{n}\to 0.$$

Έπεται ότι $b_n\to a$.

**21.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία θετικών όρων με $a_n\to a>0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n:=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\to a\quad\text{και}\quad\gamma_n:=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\to a.$$

*Υπόδειξη.* Αφού $\frac{1}{a_n}\to\frac{1}{a}$, η Άσκηση 20 δείχνει ότι

$$\frac{1}{b_n}=\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\to\frac{1}{a}.$$

Αρα, $b_n\to a$. Για την $\gamma_n$, παρατηρήστε ότι $b_n\leqslant\gamma_n\leqslant\delta_n:=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ από την ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, και εφαρμόστε το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών σε συνδυασμό με την Άσκηση 20.

**22.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία με $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{n}\to a.$$

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{n}=\frac{(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1}{n}=\frac{b_{n-1}+\cdots+b_1}{n}+\frac{a_1}{n}$$

όπου $b_n:=a_{n+1}-a_n\to a$. Τώρα, χρησιμοποιήστε την Άσκηση 20.

**23.** Έστω $(a_n)$ αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n:=\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\to a.$$

Αποδείξτε ότι $a_n\to a$.

*Υπόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι η $(a_n)$ είναι άνω φραγμένη. Τότε, η $(a_n)$ συγκλίνει και, από την Άσκηση 20, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a_1 \geqslant 0$. Τότε, $a_n \geqslant a_1 \geqslant 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $(b_n)$ συγκλίνει, είναι φραγμένη: ειδικότερα, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_1 + \cdots + a_k = kb_k \leqslant kM$. Παίρνοντας $k = 2n$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα, γράφουμε

$$na_n \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{2n} \leqslant a_1 + \cdots + a_{2n} = 2nb_{2n} \leqslant 2nM.$$

Δηλαδή, η $(a_n)$ είναι άνω φραγμένη από τον $2M$. Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι οι όροι της $(a_n)$ είναι μη αρνητικοί;

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την (αύξουσα ακολουθία) $a_n' = a_n - a_1$ και την $b_n' := \frac{a_1' + \cdots + a_n'}{n}$. Από την υπόθεση έχουμε $b_n' \to a - a_1$ και, όπως ορίστηκε η $(a_n')$, έχουμε $a_1' = 0$. Άρα, η $(a_n')$ είναι άνω φραγμένη. Έπεται ότι η $(a_n)$ είναι άνω φραγμένη (εξηγήστε γιατί).

**24.** Αποδείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

*Υπόδειξη.* Γράφουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \cdots b_n},$$

όπου $b_1 = a_1$ και $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \ldots$. Από την υπόθεση έχουμε $b_n \to a$ και, από την Άσκηση 21, η ακολουθία των γεωμετρικών μέσων της $(b_n)$ συγκλίνει στον $a$. Δηλαδή, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

**25.** Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\alpha_n = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}$$

$$\beta_n = \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n}$$

$$\gamma_n = \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$$

*Υπόδειξη.* Για την $\alpha_n = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]^{1/n}$ θέτουμε $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \to 4.$$

Άρα, $\alpha_n \to 4$ από την Άσκηση 24.

Για την $\beta_n = \frac{1}{n}[(n+1)(n+2)\cdots(n+n)]^{1/n} = \left[\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}\right]^{1/n}$ θέτουμε $y_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}{n^n}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{4}{e}.$$

Άρα, $\beta_n \to \frac{4}{e}$ από την Άσκηση 24.

Για την $\gamma_n = \left[\frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n}$ θέτουμε $z_n = \frac{2}{1}\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \to e.$$

Άρα, $\gamma_n \to e$ από την Άσκηση 24.

**26.** Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

*Υπόδειξη.* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e$. Για παράδειγμα,

(α) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1} \to e$.

(β) $b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{n+2} x_{n+1} x_n \to e^2$.

(γ) $\frac{1}{c_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n-1} x_{n-1} \to e$, άρα $c_n \to \frac{1}{e}$.

(δ) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \cdot e = 1$.

(ε) $e_n^3 = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n} \to e^2$ (γιατί;), άρα $e_n \to \sqrt[3]{e^2}$.

**27.** Έστω $(a_n)$, $(b_n)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η $(b_n)$ είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

*Υπόδειξη.* (α) Γράφουμε $a_n - b_n = b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$. Από την υπόθεση, η $(b_n)$ είναι φραγμένη και η $\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$ είναι μηδενική. Συνεπώς, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Θεωρήστε τις $a_n = n + 1$ και $b_n = n$.

**28.** Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική ακολουθία. Συμπεράνατε ότι $a_n \to +\infty$.

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ είναι βασική ακολουθία. Τότε, παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $m, n \geqslant n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| < \frac{1}{4}$.

Πάρτε $n \geqslant n_0$ και $m = 2n > n \geqslant n_0$. Τότε, $|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{4}$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, διότι

$$\begin{aligned} |a_{2n} - a_n| &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Εξηγήστε τώρα τα εξής:

(α) Αφού η $(a_n)$ δεν είναι βασική ακολουθία, η $(a_n)$ δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αφού η $(a_n)$ είναι αύξουσα και δεν συγκλίνει, η $(a_n)$ δεν είναι άνω φραγμένη.

(γ) Αφού η $(a_n)$ είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, αναγκαστικά $a_n \to +\infty$.

**29.** Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία $(a_n)$ για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geqslant 2.$$

Αποδείξτε ότι η $(a_n)$ είναι βασική ακολουθία.

*Υπόδειξη.* Έστω $a = a_1$ και $b = a_2$. Από την $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \mu |a_n - a_{n-1}|$ έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \mu^{n-1} |a_2 - a_1| = |b - a| \cdot \mu^{n-1}.$$

Αν λοιπόν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leqslant |a_m - a_{m-1}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leqslant |b - a| \left(\mu^{n-1} + \cdots + \mu^{m-2}\right) \\ &= |b - a| \cdot \mu^{n-1} \cdot \frac{1 - \mu^{m-n}}{1 - \mu} \\ &\leqslant \frac{|b - a| \mu^{n-1}}{1 - \mu} \\ &= \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^n. \end{aligned}$$

Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και βρείτε $n_0 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την $\frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \mu^{n_0} < \varepsilon$. Τέτοιος $n_0$ υπάρχει γιατί $\mu^n \to 0$ όταν $n \to \infty$. Τότε, αν $m > n \geqslant n_0$,

$$|a_m - a_n| \leqslant \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^n \leqslant \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η $(a_n)$ είναι βασική ακολουθία.

**30.** Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geqslant 2$. Εξετάστε αν η $(a_n)$ είναι βασική ακολουθία.

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2},$$

δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|.$$

Από την Άσκηση 29, η $(a_n)$ είναι βασική ακολουθία.

## Γ΄ Ομάδα

**31.** Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

*Υπόδειξη.* Έστω $x \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $q_1 \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιεί την $x - 1 < q_1 < x$ (από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί ρητούς αριθμούς $q_1, \ldots, q_m$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $q_1 < q_2 < \cdots < q_m < x$.

(ii) Για κάθε $k = 1, \ldots, m$ ισχύει $x - \frac{1}{k} < q_k < x$.

Τότε, ο $s_m = \max\{x - \frac{1}{m+1}, q_m\}$ είναι μικρότερος από τον $x$. Λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να βρούμε $q_{m+1} \in \mathbb{Q}$ στο ανοικτό διάστημα $(s_m, x)$. Τότε, $q_m < q_{m+1}$ και $x - \frac{1}{m+1} < q_{m+1} < x$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία $(q_n)$ ρητών αριθμών που ικανοποιούν την $x - \frac{1}{n} < q_n < x$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, $q_n \to x$.

**32.** Αποδείξτε ότι αν $(a_n)$ είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to a > 0$, τότε

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

*Υπόδειξη.* Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a > 0$ και $a_n \to a$, θα υπάρχει $n_0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n > a/2$. Δηλαδή, τελικά όλοι οι όροι της $(a_n)$ ξεπερνούν τον θετικό αριθμό $a/2$.

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την $(a_n)$ με $\varepsilon = a/2 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$|a_n - a| < \varepsilon = a/2 \Longrightarrow a/2 < a_n < 3a/2.$$

Τότε, ο θετικός αριθμός $m := \min\{a_1, \dots, a_{n_0}, a/2\}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $\inf(A) \geqslant m > 0$.

**33.** Αποδείξτε ότι αν $(a_n)$ είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \to 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

*Υπόδειξη.* Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a_1 > 0$ και $a_n \to 0$, θα υπάρχει $n_0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $a_n < a_1$. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του $A$ μεγαλύτερο από «όλα» (εκτός από πεπερασμένα το πλήθος) τα στοιχεία του $A$.

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την $(a_n)$ με $\varepsilon = a_1 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon = a_1.$$

Τότε, ο μεγαλύτερος από τους $a_1, \dots, a_{n_0}$ είναι το μέγιστο στοιχείο του $A$: ανήκει στο $A$ και είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε $a_n$ (εξηγήστε γιατί).

**34.** Ορίζουμε μια ακολουθία $(\alpha_n)$ με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2}$, $\qquad n = 1, 2, 3, \dots$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η $(\alpha_n)$ είναι αύξουσα.

(β) $\alpha_n \to 1$.

*Υπόδειξη.* (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2} - \alpha_n = \frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n + 1}{2\alpha_n + 2} = \frac{(\alpha_n - 1)^2}{2\alpha_n + 2} \geqslant 0,$$

άρα η $(\alpha_n)$ είναι αύξουσα.

(β) Η $(\alpha_n)$ είναι άνω φραγμένη από τον 1. Αποδείξτε το επαγωγικά: αν $\alpha_n \leqslant 1$ τότε $3\alpha_n^2 + 1 = 2\alpha_n^2 + \alpha_n^2 + 1 \leqslant 2\alpha_n + 1 + 1 = 2\alpha_n + 2$, οπότε $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2+1}{2\alpha_n+2} \leqslant 1$.

Αφού η $(\alpha_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον $x > 0$ ο οποίος ικανοποιεί την $x = \frac{3x^2+1}{2x+2}$, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 = 0$. Άρα, $x = 1$.

**35.** Θεωρούμε την ακολουθία $(\alpha_n)$ που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n+3}{5}$, $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι η $(\alpha_n)$ συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

*Υπόδειξη.* Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \frac{9}{5} < 3 = \alpha_1$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η $(\alpha_n)$ είναι φθίνουσα. Αφού (απλό) η $(\alpha_n)$ είναι και κάτω φραγμένη από τον $3/5$, συγκλίνει στη λύση της εξίσωσης $x = \frac{2x+3}{5}$. Δηλαδή, $\alpha_n \to 1$.

**36.** Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Αποδείξτε ότι η $(x_n)$, τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $\sqrt{a}$. Βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

*Υπόδειξη.* Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $(x_n)$ ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n > 0$ για κάθε $n$.

(ii) Για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει $x_n \geqslant \sqrt{a}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Για κάθε $n \geqslant 2$ ισχύει $x_n \geqslant x_{n+1}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geqslant 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η $(x_n)_{n\geqslant 2}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει. Το όριο $x$ είναι θετικό (από τα προηγούμενα έχουμε $x \geqslant \sqrt{a}$) και πρέπει να ικανοποιεί την $x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$, δηλαδή $x^2 = a$. Άρα, $x = \sqrt{a}$.

**37.** Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η $(a_n)$ είναι αύξουσα και η $(b_n)$ φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι $(a_n)$, $(b_n)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

*Υπόδειξη.* Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n \leqslant b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι $a_n$ και $b_n$) έχετε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

(iii) Η $(a_n)$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqslant \sqrt{a_n^2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Η $(b_n)$ είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \leqslant \frac{2b_n}{2} = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η $(a_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον $b_1$, ενώ η $(b_n)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον $a_1$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Από την $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ έπεται ότι $b = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή $a = b$.

**38.** Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Αποδείξτε ότι η $(x_n)$ συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την $(y_n)$.]

*Υπόδειξη.* Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{3}.$$

Άρα, η ακολουθία $y_n = x_{n+1} - x_n$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} y_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (b-a).$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = a + y_1 + \cdots + y_{n-1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_n &= a + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right)(b-a) \\ &= a + \frac{1 - (-\frac{1}{3})^{n-1}}{1 - (-\frac{1}{3})}(b-a) \to a + \frac{3}{4}(b-a) = \frac{3b+a}{4}. \end{aligned}$$

**39.** Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leqslant k\}$ είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

*Υπόδειξη.* Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \varepsilon$. Το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leqslant k\}$ είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο στοιχείο. Θέτουμε $n_0 = \max(A_k) + 1$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $n \notin A_k$, άρα $|a_n| > k$ (ειδικότερα, $a_k \neq 0$). Έπεται ότι, για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

**40.** Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Αποδείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό $q$, ισχύει:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q .$$

*Υπόδειξη.* Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $x > 0$, η ακολουθία $t_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα. Ένας τρόπος για να το δούμε είναι εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου για τους αριθμούς $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 1 + \frac{x}{n}$ και $s_{n+1} = 1$. Έχουμε

$$s_1 \cdots s_n s_{n+1} \leqslant \left(\frac{s_1 + \cdots + s_n + s_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

δηλαδή

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leqslant \left(\frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Αφού $n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1=n+1+x$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Θεωρούμε θετικό ρητό $q=\frac{k}{m}$, όπου $k,m\in\mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left(1+\frac{k}{mn}\right)^n \to e^{k/m}.$$

Ισοδύναμα, ότι

$$b_n = \left(1+\frac{k}{mn}\right)^{mn} \to e^k.$$

Παρατηρήστε ότι η $(b_n)$ είναι αύξουσα: ζητάμε

$$b_{n+1} = t_{m(n+1)}(k) \geqslant t_{mn}(k) = b_n,$$

το οποίο ισχύει για κάθε $n$, αφού η $t_n(k)$ είναι αύξουσα και $m(n+1)>mn$. Επιπλέον,

$$b_{kn} = \left(1+\frac{k}{mkn}\right)^{mkn} = \left[\left(1+\frac{1}{mn}\right)^{mn}\right]^k \to e^k,$$

διότι $\left(1+\frac{1}{mn}\right)^{mn}\to e$. Τώρα, για τυχόν $\varepsilon>0$, βρίσκουμε $n_0$ ώστε: για κάθε $n\geqslant n_0$,

$$e^k-\varepsilon < b_{kn} < e^k+\varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n>kn_0$ έχουμε

$$e^k-\varepsilon < b_{kn_0} \leqslant b_n \leqslant b_{kn} < e^k+\varepsilon.$$

Συνεπώς, $b_n\to e^k$.

Για την περίπτωση $q<0$ δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο.

**41.** (Λήμμα του Stoltz) Έστω $(a_n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω $(b_n)$ γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda,$$

όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda=+\infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda.$$

*Υπόδειξη.* Υποθέτουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lambda$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ (η περίπτωση $\lambda=+\infty$ εξετάζεται ανάλογα). Έστω $\varepsilon>0$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $b_n\to+\infty$, βλέπουμε ότι υπάρχει $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n\geqslant n_1$ ισχύει $b_n>0$ και

$$\lambda-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < \lambda+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η $(b_n)$ είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $b_{n+1}-b_n>0$. Άρα, για κάθε $n\geqslant n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < \left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1}-b_n).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n>n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n-b_{n_1}) < a_n-a_{n_1} < \left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n-b_{n_1}).$$

Διαιρώντας με $b_n$ παίρνουμε

$$\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}\right]=\lambda-\frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}\right]=\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$$

γιατί $b_n\to+\infty$ όταν $n\to\infty$. Άρα (εξηγήστε γιατί) υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$, που εξαρτάται από το $n_1$ και από το $\varepsilon$, ώστε: για κάθε $n\geqslant n_2$ ισχύει

$$\lambda-\varepsilon<\left(\lambda-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}<\left(\lambda+\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(1-\frac{b_{n_1}}{b_n}\right)+\frac{a_{n_1}}{b_n}<\lambda+\varepsilon.$$

Συνεπώς, αν $n\geqslant n_0:=\max\{n_1,n_2\}$, έχουμε

$$\lambda-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}<\lambda+\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda.$$

**42.** Ορίζουμε ακολουθία $(a_n)$ με $0<a_1<1$ και $a_{n+1}=a_n(1-a_n)$, $n=1,2,\ldots$. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$.

*Υπόδειξη.* Επαγωγικά δείχνουμε ότι $0<a_n<1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ (για το επαγωγικό βήμα πρατηρήστε ότι αν $0<a_n<1$ τότε έχουμε και $0<1-a_n<1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας βλέπουμε ότι $0<a_n(1-a_n)<1$, δηλαδή $0<a_{n+1}<1$).

Από την αναδρομική σχέση έχουμε

$$a_{n+1}-a_n=-a_n^2<0,$$

άρα $a_n>a_{n+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς, η $(a_n)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού είναι και κάτω φραγμένη από το 0, η $(a_n)$ συγκλίνει σε κάποιον $x\geqslant 0$. Πάλι από την αναδρομική σχέση, ο $x$ ικανοποιεί την $x=x(1-x)=x-x^2$, δηλαδή $x^2=0$. Άρα, $a_n\to 0$.

Με βάση τα παραπάνω, η ακολουθία $b_n=\frac{1}{a_n}$ ορίζεται καλά, είναι γνησίως αύξουσα, και $\frac{1}{a_n}\to+\infty$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$na_n=\frac{n}{b_n}$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Stolz: έχουμε

$$\frac{(n+1)-n}{b_{n+1}-b_n}=\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\frac{1}{a_n(1-a_n)}-\frac{1}{a_n}}=1-a_n\to 1,$$

άρα

$$na_n=\frac{n}{b_n}\to 1$$

από την Άσκηση 41.