Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 3: Σειρές πραγματικών αριθμών

Α′ Ομάδα

1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(στ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(ζ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(η) Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(θ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

(ι) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ια) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. (α) *Λάθος.* Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{k} \to 0$, όμως η ακολουθία $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι φραγμένη (τείνει στο $+\infty$).

(β) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την ακολουθία $a_k = (-1)^{k-1}$, τότε έχουμε $s_n = 1$ αν ο n είναι περιττός και $s_n = 0$ αν ο n είναι άρτιος. Δηλαδή, η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}$ αποκλίνει, διότι $a_k \not\to 0$.

(γ) *Λάθος.* Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $|a_k| = \frac{1}{k} \to 0$ και η $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει στο $+\infty$, δηλαδή η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει απολύτως.

(δ) *Σωστό.* Αποδείξαμε (στη θεωρία) ότι αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει.

(ε) *Λάθος.* Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(στ) *Λάθος.* Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{(k+1)^2} = 1$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει.

(ζ) *Σωστό.* Αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$ για κάθε $k \geqslant N$. Αφού η (a_k) έχει θετικούς όρους, συμπεραίνουμε ότι $0 < a_N \leqslant a_{N+1} \leqslant \cdots \leqslant a_k \leqslant \cdots$, δηλαδή $a_k \not\to 0$. Συνεπώς, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(η) *Λάθος.* Αν θεωρήσουμε την $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$, τότε $a_k \to 0$. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(θ) *Λάθος.* Θεωρήστε την $a_k = \frac{1}{k^2}$. Τότε, $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

(ι) *Λάθος.* Από το κριτήριο του Dirichlet, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει.

Λάθος. Σύμφωνα με το κριτήριο Dirichlet, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ συγκλίνει. Όμως, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ αποκλίνει (συμπεριφέρεται σαν την αρμονική σειρά – εξηγήστε γιατί).

(ια) *Σωστό.* Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant m$, $0 \leqslant a_k \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m$ έχουμε $0 \leqslant a_k^2 \leqslant a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θέτουμε $a_k = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$. Τότε, $a_k > 0$ και

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)(2k+2)]k!}{[2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)](k+1)!} = \frac{2k+2}{k+1} = 2 \to 2 > 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ αποκλίνει.

Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι $a_k = 2^k$, άρα δεν ισχύει $a_k \to 0$.

3. Εξετάστε για ποιές τιμές του p συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k(1+k^2)^p}{k^{2p+1}} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^p = 1 > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{-(2p+1)}}$ συγκλίνει. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $-(2p+1) > 1$, δηλαδή αν και μόνο αν $p < -1$.

4. Δείξτε ότι

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $b_k = \frac{1}{2k-1}$. Παρατηρούμε ότι

$$b_k - b_{k+1} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Έχουμε $b_1 = 1$ και $b_k \to 0$. Άρα,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}(b_1 - b_{n+1}) \to \frac{1}{2}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι αν $0 < x < 1$, τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1/3}{1-(1/3)} + \frac{1/2}{1-(1/2)} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

(γ) Γράφουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - 0 = 1,$$

διότι

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1.$$

5. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(k+2)-k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ακολουθία $b_k = \frac{1}{2k(k+1)} \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} \to b_1 = \frac{1}{4}.$$

6. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

Υπόδειξη. Εξετάζουμε μερικές από αυτές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x \neq 0$, έχουμε

$$\frac{(k+1)^{k+1}|x|^{k+1}}{k^k|x|^k} = (k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k |x| \to +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά αποκλίνει. Η σειρά συγκλίνει μόνο αν $x=0$.

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγατε αν χρησιμοποιούσατε το κριτήριο της ρίζας: παρατηρήστε ότι $\sqrt[k]{k^k|x|^k}=k|x|\to+\infty$ αν $x\neq 0$.

(β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x\neq 0$, έχουμε

$$\frac{|x|^{k+1}/(k+1)!}{|x|^k/k!}=\frac{|x|}{k+1}\to 0<1.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^kx^k}{k^2}$: Με το κριτήριο του λόγου. Αν $x\neq 0$, έχουμε

$$\frac{2^{k+1}|x|^{k+1}/(k+1)^2}{2^k|x|^k/k^2}=2|x|\frac{k^2}{(k+1)^2}\to 2|x|.$$

Συνεπώς, η σειρά συγκλίνει απολύτως αν $|x|<1/2$ και αποκλίνει αν $|x|>1/2$. Εξετάζουμε τη σύγκλιση χωριστά στις περιπτώσεις $x=\pm 1/2$. Παρατηρώντας ότι οι σειρές $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνουν, συμπεραίνουμε τελικά ότι η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $|x|\leqslant 1/2$.

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$ (β) $a_k=\sqrt{1+k^2}-k$

(γ) $a_k=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k=(\sqrt[k]{k}-1)^k$.

Υπόδειξη. (α) Αν $a_k=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$, τότε $s_n=a_1+\cdots+a_n=\sqrt{n+1}-1\to+\infty$, άρα η σειρά αποκλίνει.

(β) Έχουμε $a_k=\sqrt{1+k^2}-k=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}+k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k}=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}+k}\to\frac{1}{2}>0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ αποκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(γ) Έχουμε $a_k=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}=\frac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{1/k^{3/2}}\to\frac{1}{2}>0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(δ) Χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας: έχουμε $\sqrt[k]{a_k}=\sqrt[k]{k}-1\to 0<1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1),\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^2},\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}.$$

Υπόδειξη. (α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$: παρατηρούμε ότι

$$\frac{a_k}{1/k^2}=\frac{k^3+k^2\sqrt{k}}{2k^3-1}\to\frac{1}{2}>0.$$

Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt[k]{k}-1)$: θέτουμε $\vartheta_k=\sqrt[k]{k}-1\geqslant 0$. Τότε, $k=(1+\vartheta_k)^k$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k\geqslant 3$,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e<3\leqslant k=(1+\vartheta_k)^k.$$

Άρα, $\vartheta_k>\frac{1}{k}$ για κάθε $k\geqslant 3$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}\vartheta_k$ αποκλίνει κι αυτή.

(γ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos^2 k}{k^2}$: παρατηρούμε ότι $|a_k|\leqslant\frac{1}{k^2}$. Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{k!(k+1)^{k+1}}=\frac{k^k}{(k+1)^k}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}\to\frac{1}{e}<1,$$

άρα η σειρά συγκλίνει.

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p,q,x\in\mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum_{k=1}^{\infty}p^kk^p$ $(0<p)$ (γ) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p-k^q}$ $(0<q<p)$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k-q^k}$ $(0<q<p)$ (στ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty}k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Υπόδειξη. (α) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Έχουμε $\sqrt[k]{a_k}=\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}\to\frac{1}{e}<1$, άρα η σειρά συγκλίνει.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty}p^kk^p$: χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}=p\frac{(k+1)^p}{k^p}\to p,$$

άρα η σειρά συγκλίνει αν $0<p<1$ και αποκλίνει αν $p>1$. Για $p=1$ παίρνουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}k$, η οποία αποκλίνει ($k\not\to 0$ όταν $k\to\infty$!).

(γ) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^p-k^q}$: θεωρούμε την $b_k=1/k^p$. Αφού $q<p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{1}{1-k^{-(p-q)}}\to 1>0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p>1$ (και $0<q<p$).

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$: θεωρούμε την $b_k=1/k$. Έχουμε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{k}{k\sqrt[k]{k}}=\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\to 1>0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει (διότι η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει).

(ε) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k-q^k}$: θεωρούμε την $b_k=1/p^k$. Αφού $0<q<p$, έχουμε $\frac{a_k}{b_k}=\frac{1}{1-(q/p)^k}\to 1>0$ (διότι $(p/q)^k\to 0$ αφού $0<p/q<1$). Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά μας συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k}$ συγκλίνει, δηλαδή αν και μόνο αν $p>1$ (και $0<q<p$).

(στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$: παρατηρούμε ότι $0 < a_k \leqslant \frac{3}{2^k}$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ συγκλίνει, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης.

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$: παρατηρούμε ότι

$$a_k = k^p \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{k^p}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}.$$

Θεωρούμε την $b_k = \frac{k^p}{k^{3/2}}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2} > 0$. Από το οριακό κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{(3/2)-p}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, αν $\frac{3}{2} - p > 1$, το οποίο ισχύει αν $p < \frac{1}{2}$.

Β΄ Ομάδα

10. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$, (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{k^2+1}$, (ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, (στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k}$, (η) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, (ϑ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$.

Υπόδειξη. (α) Κριτήριο λόγου.

(β) Κριτήριο λόγου.

(γ) Για $x > 0$ αρκετά μεγάλο, έχουμε $e^x > x^4$. Άρα, υπάρχει k_0 τέτοιος ώστε: για κάθε $k \geqslant k_0$,

$$e^{\sqrt{k}} \geqslant (\sqrt{k})^4 = k^2 \implies e^{-\sqrt{k}} < \frac{1}{k^2}.$$

Έπεται ότι η σειρά συγκλίνει, από το κριτήριο σύγκρισης.

(δ) Κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς: συμπεριφέρεται σαν την $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, δηλαδή αποκλίνει.

(ε) Κριτήριο Leibniz.

(στ) Συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης: παρατηρήστε ότι

$$\left|\frac{\cos(kx)}{k^2}\right| \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

(ζ) Συγκλίνει από το κριτήριο σύγκρισης: παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{2^k + k} \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

(η)-(ϑ) Κριτήριο λόγου.

11. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Υπόδειξη. Η σειρά έχει θετικούς όρους. Αρκεί να δείξετε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} s_{m^2} = \sum_{k=1}^{m^2} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_{k^2} + \sum_{\substack{k \leqslant m^2 \\ k \neq s^2}} a_k \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{m^2} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M < +\infty. \end{aligned}$$

Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε $s_n \leqslant s_{n^2} \leqslant M$. Δηλαδή, η (s_n) είναι άνω φραγμένη.

12. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leqslant (-1)^n (s - s_n) \leqslant a_{n+1}$.

Υπόδειξη. Γράφουμε $(-1)^n(s-s_n) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+k-1} a_k$. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_k = (a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+2m-1} - a_{n+2m}) \geqslant 0,$$

άρα

$$(-1)^n (s - s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m} (-1)^{n+k-1} a_n \geqslant 0.$$

Επίσης,

$$\sum_{k=n+1}^{n+2m+1} (-1)^{n+k-1} a_k = a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - \cdots - (a_{n+2m} - a_{n+2m+1}) \leqslant a_{n+1},$$

άρα

$$(-1)^n (s - s_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{n+2m+1} (-1)^{n+k-1} a_n \leqslant a_{n+1}.$$

13. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $ka_k \to 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η (s_n) είναι ακολουθία Cauchy. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geqslant n_0$ τότε

$$a_{m+1} + \cdots + a_n = |s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ειδικότερα, αν $n \geqslant 2n_0$, παίρνοντας $m = n_0$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι φθίνουσα, έχουμε

$$\frac{\varepsilon}{2} > a_{n_0+1} + \cdots + a_n \geqslant (n - n_0) a_n \geqslant \frac{n a_n}{2},$$

διότι $n - n_0 \geqslant \frac{n}{2}$. Δηλαδή, αν $n \geqslant 2n_0$ έχουμε $na_n < \varepsilon$. Έπεται ότι $\lim_{n\to\infty}(na_n) = 0$.

14. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

Υπόδειξη. (α) Αφού η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $a_k \to 0$. Άρα, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $k \geqslant m$, $0 \leqslant a_k \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m$ έχουμε $0 \leqslant a_k^2 \leqslant a_k$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(β) Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant \frac{a_k}{1+a_k} \leqslant a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει.

(γ) Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant \frac{a_k^2}{1+a_k^2} \leqslant a_k^2$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

15. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $0 \leqslant \sqrt{a_k a_{k+1}} \leqslant \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

Με την υπόθεση ότι η (a_k) είναι φθίνουσα, παρατηρήστε ότι $0 \leqslant a_{k+1} \leqslant \sqrt{a_k a_{k+1}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και εφαρμόστε το κριτήριο σύγκρισης.

16. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{a_k}}{k} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{M_1 M_2},$$

όπου

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty \quad \text{και} \quad M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

17. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα Cauchy-Schwarz όπως στην υπόδειξη για την προηγούμενη άσκηση. Εναλλακτικά, παρατηρήστε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $|a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{1}{2}b_k^2$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Από την υπόθεση, οι σειρές $\sum_{k=1}^\infty a_k^2$ και $\sum_{k=1}^\infty b_k^2$ συγκλίνουν, άρα έχουν φραγμένα μερικά αθροίσματα. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n b_k^2\leqslant M$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^\infty |a_kb_k|$ είναι κι αυτά φραγμένα από τον M, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^\infty |a_kb_k|$ συγκλίνει.

18. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^\infty a_k^2$ συγκλίνει και αν $p>1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει $\left|\frac{a_k}{k^p}\right|\leqslant \frac{1}{2}a_k^2+\frac{1}{2}\frac{1}{k^{2p}}$. Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n\left|\frac{a_k}{k^p}\right|\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{2p}}.$$

Από την υπόθεση, οι σειρές $\sum_{k=1}^\infty a_k^2$ και $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{2p}}$ συγκλίνουν (η δεύτερη διότι $2p>1$), άρα έχουν φραγμένα μερικά αθροίσματα. Δηλαδή, υπάρχει $M>0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^{2p}}\leqslant M$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε, τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{a_k}{k^p}\right|$ είναι κι αυτά φραγμένα από τον M, άρα η σειρά $\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{a_k}{k^p}\right|$ συγκλίνει.

19. Προσδιορίστε τις τιμές των a,b,c για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^\infty\frac{a^k}{k^b(\ln k)^c}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου για την $x_k=\frac{a^k}{k^b(\ln k)^c}$. Έχουμε

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=a\left(\frac{k}{k+1}\right)^b\left(\frac{\ln k}{\ln(k+1)}\right)^c\to a.$$

Άρα, η σειρά συγκλίνει για κάθε b,c αν $|a|<1$ και αποκλίνει για κάθε b,c αν $|a|>1$.

Εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $a=1$ και $a=-1$:

(i) Αν $a=1$ έχουμε τη σειρά

$$\sum_{k=2}^\infty\frac{1}{k^b(\ln k)^c}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο συμπύκνωσης δείξτε ότι: συγκλίνει για κάθε c αν $b>1$, αποκλίνει για κάθε c αν $b<1$, ενώ στην περίπτωση που $a=b=1$ η σειρά συγκλίνει αν $c>1$.

(i) Αν $a=-1$ έχουμε τη σειρά

$$\sum_{k=2}^\infty\frac{(-1)^k}{k^b(\ln k)^c}.$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Leibniz δείξτε ότι: συγκλίνει για κάθε c αν $b>0$ και αποκλίνει για κάθε c αν $b\leqslant 0$.

20. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right)\cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

Υπόδειξη. Θέτουμε

$$x_k = k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right)\cos\left(\frac{1}{k^c}\right)$$

και

$$y_k = k^a\,\frac{1}{k^b} = \frac{1}{k^{b-a}}.$$

Παρατηρούμε ότι $x_k, y_k > 0$ και

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{\sin\left(\frac{1}{k^b}\right)}{\frac{1}{k^b}}\cos\left(\frac{1}{k^c}\right) \to 1$$

παίρνοντας υπόψη μας τα βασικά όρια $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$ και $\lim\limits_{t\to 0^+} \cos t = 1$. Άρα, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right)\cos\left(\frac{1}{k^c}\right)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{b-a}}$ συγκλίνει. Δηλαδή, για όλες τις τριάδες (a, b, c) με $a, b, c > 0$ και $b - a > 1$.

21. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k\to\infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θεωρούμε $a \in \mathbb{R}$ τέτοιον ώστε $1 < a < s := \lim\limits_{k\to\infty} a_k$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου ακολουθίας με $\varepsilon = s - a > 0$, βρίσκουμε k_0 τέτοιον ώστε $a_k > a$ για κάθε $k \geqslant k_0$.

Συνεπώς, για κάθε $k \geqslant k_0$ έχουμε

$$0 < \frac{1}{k^{a_k}} \leqslant \frac{1}{k^a}.$$

Ο a είναι σταθερός (δεν εξαρτάται από το k) και μεγαλύτερος από 1, άρα η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει, άρα και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$ συγκλίνει.

22. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη. Θα δείξουμε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, η ακολουθία $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ των μερικών αθροισμάτων της συγκλίνει, άρα είναι βασική. Συνεπώς, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n > m \geqslant n_0$,

$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} = s_n - s_m < \varepsilon.$$

Τότε, από την υπόθεση, για κάθε $n > m \geqslant n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_m| = \left|\sum_{k=m}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\right| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (a_n) είναι βασική, άρα συγκλίνει.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (b_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, άρα συγκλίνει σε κάποιον $b \in \mathbb{R}$. Τότε, η $(b_k - b)$ είναι φθίνουσα με όριο το 0 και η $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη διότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, οπότε εφαρμόζεται το κριτήριο του Dirichlet και έχουμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b)$ συγκλίνει. Επίσης, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b$ συγκλίνει στον $b\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Άρα, η

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(b_k - b) + a_k b]$$

συγκλίνει κι αυτή, στον

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(b_k - b) + b\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

24. Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Μιμούμαστε την απόδειξη του κριτηρίου Dirichlet, δηλαδή θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του Cauchy και άθροιση κατά μέρη. Η $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ συγκλίνει, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|s_n| \leqslant M$ για κάθε n. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, βρίσκουμε $N_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geqslant N_1$,

$$\sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Έπεται ότι

$$|b_m - b_n| \leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

για κάθε $n > m \geqslant N_1$, άρα η (b_n) είναι βασική, άρα $b_n \to b \in \mathbb{R}$. Μπορούμε τότε να βρούμε N_2 τέτοιο ώστε $|b_k - b| < \frac{\varepsilon}{4M}$ για κάθε $k \geqslant N_2$. Τέλος, αφού η (s_n) συγκλίνει είναι βασική, άρα μπορούμε να βρούμε N_3 τέτοιο ώστε $|b||s_n - s_m| < \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε $n, m \geqslant N_3$.

Θέτουμε $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. Αν $N \leqslant m < n$, τότε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=m}^{n} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_n - s_{m-1} b_m\right| \\
&= \left|\sum_{k=m}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n(b_n - b) - s_{m-1}(b_m - b) + b(s_n - s_m)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=m}^{n-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_n||b_n - b| + |s_{m-1}||b_m - b| + |b||s_n - s_m| \\
&\leqslant M\sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| + M|b_n - b| + M|b_m - b| + |b||s_n - s_m| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Cauchy, η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

25. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ φραγμένη ακολουθια. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Υπόδειξη. Η δυναμοσειρά αποκλίνει για $x=1$, άρα $R \leqslant 1$. Εφαρμόζοντας το κριτήριο της ρίζας βλέπουμε ότι

$$\sqrt[k]{|a_k x^k|} = \sqrt[k]{|a_k|}\,|x| \to |x|$$

διότι η (a_k) είναι φραγμένη, άρα $\sqrt[k]{|a_k|} \to 1$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x με $|x|<1$, το οποίο αποδεικνύει ότι $R \geqslant 1$.

Συνδυάζοντας τις $R \leqslant 1$ και $R \geqslant 1$ έχουμε το ζητούμενο.

26. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ ακολουθια πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Υπόδειξη. Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=1$, άρα $R \geqslant 1$. Ας υποθέσουμε ότι $R>1$. Τότε, αφού για κάθε $|x|<R$ η δυναμοσειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x^k|$ συγκλίνει, παίρνοντας $x=1$ βλέπουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, δηλαδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αυτό είναι άτοπο, άρα $R=1$.

Γ΄ Ομάδα

27. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

Υπόδειξη. Αν $b_0 = 1$ και

$$b_k = \frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)}$$

για $k \in \mathbb{N}$, δείξτε ότι

$$\frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_{k-1} - b_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = b_0 - b_n = 1 - b_n.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) > a_1 + \cdots + a_n \to +\infty$$

δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1 - b_n \to 1.$$

28. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\}$ συγκλίνει. Αφού η (a_k) φθίνει προς το 0, το ίδιο ισχύει για την $\left(\min\{a_k, \frac{1}{k}\}\right)$ (εξηγήστε γιατί). Από το κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \min\left\{a_{2^k}, \frac{1}{2^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\}$$

συγκλίνει. Ειδικότερα, $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} \to 0$, άρα τελικά έχουμε $\min\left\{2^k a_{2^k}, 1\right\} = 2^k a_{2^k}$ (εξηγήστε γιατί).

Έπεται ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ συγκλίνει. Χρησιμοποιώντας ξανά το κριτήριο συμπύκνωσης, αυτή τη φορά για τη σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, βλέπουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο από την υπόθεση.

29. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,
$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geqslant 1 - \frac{s_m}{s_n}$$
και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. (α) Έστω ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει. Τότε,
$$\frac{a_k}{1+a_k} \to 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{1+a_k} = 1 - \frac{a_k}{1+a_k} \to 1 \quad \Rightarrow 1 + a_k \to 1.$$
Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: $1 + a_k < \frac{3}{2}$ για κάθε $k \geqslant m$. Έπεται ότι $0 \leqslant a_k \leqslant \frac{3}{2}\frac{a_k}{1+a_k}$ για κάθε $k \geqslant m$. Από το κριτήριο σύγκρισης, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι η (s_n) είναι αύξουσα. Άρα, αν $1 \leqslant m < n$ έχουμε
$$\begin{aligned}\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} &\geqslant \frac{a_{m+1}}{s_n} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} = \frac{a_{m+1} + \cdots + a_n}{s_n} \\ &= \frac{s_n - s_m}{s_n} = 1 - \frac{s_m}{s_n}.\end{aligned}$$
Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy, για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n > m \geqslant n_0$ τότε
$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} < \frac{1}{2},$$
δηλαδή
$$1 - \frac{s_m}{s_n} < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{s_m}{s_n} > \frac{1}{2}.$$
Σταθεροποιήστε $m \geqslant n_0$ και αφήστε το $n \to \infty$. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει, έχουμε $s_n \to \infty$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_m}{s_n} = 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο.

(γ) Παρατηρήστε ότι
$$\frac{a_n}{s_n^2} = \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n^2} \leqslant \frac{s_n - s_{n-1}}{s_n s_{n-1}} = \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}.$$
Αν t_n είναι το n-οστό μερικό άθροισμα της $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$, τότε
$$t_n = \frac{a_1}{s_1^2} + \frac{a_2}{s_2^2} + \cdots + \frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}\right) \leqslant \frac{2}{s_1}.$$

Η (t_n) είναι άνω φραγμένη, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

30. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,
$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geqslant 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$
και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Αφού η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, έχουμε $r_n \to 0$. Παρατηρήστε επίσης ότι η (r_n) είναι φθίνουσα.

(α) Αν $1 \leqslant m < n$,
$$\begin{aligned}\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} &\geqslant \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_m} \geqslant \frac{a_m + \cdots + a_n}{r_m} \\ &= \frac{r_m - r_{n+1}}{r_m} = 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m} \geqslant 1 - \frac{r_n}{r_m}.\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ συγκλίνει. Από το κριτήριο Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geqslant n_0$,
$$1 - \frac{r_n}{r_m} \leqslant \frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} < \frac{1}{2}.$$
Σταθεροποιώντας $m \geqslant n_0$ και αφήνοντας το $n \to \infty$ καταλήξτε σε άτοπο.

(β) Παρατηρήστε ότι
$$\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} = \frac{a_n}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \geqslant \frac{a_n}{2\sqrt{r_n}}.$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \leqslant 2\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_3} + \cdots + \sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right) \leqslant 2\sqrt{r_1}.$$

Έπεται ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

31. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} ka_k$ αποκλίνει.

Υπόδειξη. Θέτουμε $b_k = ka_k$. Τότε, θέλουμε να δείξουμε ότι: αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει.

Παρατηρήστε ότι αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, τότε έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα. Αφού η $\frac{1}{k}$ φθίνει προς το 0, το κριτήριο Dirichlet δείχνει ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}$ συγκλίνει, το οποίο είναι άτοπο.

32. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Γράφουμε $a_k^{\frac{k}{k+1}} = \frac{a_k}{a_k^{\frac{1}{k+1}}}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $a_k > 1/2^{k+1}$ τότε $a_k^{\frac{1}{k+1}} > 1/2$. Συνεπώς,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant 2a_k.$$

(β) Αν $a_k \leqslant 1/2^{k+1}$ τότε

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant \left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)^{\frac{k}{k+1}} = \frac{1}{2^k}.$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$a_k^{\frac{k}{k+1}} \leqslant 2a_k + \frac{1}{2^k}.$$

Όμως, η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, άρα η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (2a_k + 2^{-k})$ συγκλίνει. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο σύγκρισης.