Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 5: Παράγωγος

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε η f είναι συνεχής στο (a,b).

(β) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και αν $f(0) = f'(0) = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = 0$.

(γ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = a$, τότε $f'(a) = 0$.

(i) Αν $f'(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$ και $f(0) = 0$, τότε $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$.

(δ) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ και $f(0) = f(1) = f(2) = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.

(ε) Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in (a,b)$. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ και αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x_0) = \ell$.

(στ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο 0, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta,\delta)$.

(ζ) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f'(x_0) > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Υπόδειξη. (α) *Σωστό.* Έστω $x \in (a,b)$. Από την υπόθεση, η f είναι παραγωγίσιμη στο x, άρα είναι συνεχής στο x.

(β) *Σωστό.* Αφού $f(0) = f'(0) = 0$, έχουμε

$$0 = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

Από την αρχή της μεταφοράς για το όριο, αν $x_n \neq 0$ και $x_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{x_n} = 0$. Θεωρώντας την ακολουθία $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, παίρνουμε $\lim\limits_{n\to\infty} nf(1/n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(1/n)}{1/n} = 0$.

(γ) *Λάθος.* Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1 - x$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ και παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x_0 = 0$, όμως $f'(x) = -1$ για κάθε $x \in [0,1]$, άρα $f'(0) = -1 \neq 0$.

(δ) *Σωστό.* Έστω $x > 0$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[0,x]$: υπάρχει $\xi_x \in (0,x)$ ώστε

$$f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi_x).$$

Αφού $x > 0$ και $f'(\xi_x) \geqslant 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) \geqslant 0$.

Για $x = 0$, έχουμε $f(x) = f(0) = 0$.

(ε) *Σωστό.* Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[0,1]$ και $[1,2]$, βρίσκουμε $y_1 \in (0,1)$ με $f'(y_1) = 0$ και $y_2 \in (1,2)$ με $f'(y_2) = 0$. Εφαρμόζοντας πάλι το θεώρημα Rolle για την f' στο $[y_1,y_2]$, βρίσκουμε $x_0 \in (y_1,y_2)$ με $f''(x_0) = 0$. Τέλος, $0 < y_1 < x_0 < y_2 < 2$, δηλαδή $x_0 \in (0,2)$.

(στ) *Σωστό.* Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=\ell\in\mathbb{R}$, υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $0<|y-x_0|<\delta$, τότε $|f'(y)-\ell|<\varepsilon$. Έστω $x\in(a,b)$ με $x_0<x<x_0+\delta$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι f είναι συνεχής στο $[x_0,x]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0,x), οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0,x]$, βρίσκουμε $y_x\in(x_0,x)$ ώστε $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(y_x)$. Όμως, $0<|y_x-x_0|<|x-x_0|<\delta$, άρα $|f'(y_x)-\ell|<\varepsilon$. Συνεπώς,

$$(*)\qquad \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\ell\right|=|f'(y_x)-\ell|<\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν και η $(*)$ ισχύει για κάθε $x\in(x_0,x_0+\delta)$, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\ell$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι το όριο από αριστερά ισούται με ℓ, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και $f'(x_0)=\ell$.

(ζ) *Λάθος.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ αν $x\in\mathbb{Q}$ και $f(x)=-x^2$ αν $x\notin\mathbb{Q}$. Η f είναι ασυνεχής σε κάθε $x\neq 0$, άρα δεν υπάρχει $\delta>0$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $(-\delta,\delta)$. Όμως, η f είναι παραγωγίσιμη στο 0: έχουμε

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}\right|=\frac{|f(x)|}{|x|}=\frac{|x^2|}{|x|}=|x|\to 0\quad \text{όταν } x\to 0,$$

άρα $f'(0)=0$.

(η) *Λάθος.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{1}{x}$ αν $x\neq 0$ και $f(0)=0$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0)=\frac{1}{2}>0$ (εξηγήστε γιατί). Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο $\delta>0$, η f είναι αύξουσα στο $(0,\delta)$. Τότε, $f'(x)\geqslant 0$ για κάθε $x\in(0,\delta)$. Δηλαδή, $\frac{1}{2}+2x\cos\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\geqslant 0$ για κάθε $x\in(0,\delta)$. Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο ώστε $x_n=\frac{1}{2\pi n+\pi/2}<\delta$ και παρατηρούμε ότι $f'(x_n)=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\pi n+\pi/2}\cos(2\pi n+\pi/2)-\sin(2\pi n+\pi/2)=-\frac{1}{2}<0$, άτοπο.

2. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f,g,h είναι παραγωγίσιμες στο 0.

(α) $f(x)=x$ αν $x\notin\mathbb{Q}$ και $f(x)=0$ αν $x\in\mathbb{Q}$.

(β) $g(x)=0$ αν $x\notin\mathbb{Q}$ και $g(x)=x^2$ αν $x\in\mathbb{Q}$.

(γ) $h(x)=\sin x$ αν $x\notin\mathbb{Q}$ και $h(x)=x$ αν $x\in\mathbb{Q}$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_1(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{f(x)}{x}$, $x\neq 0$. Έχουμε $f_1(x)=1$ αν $x\notin\mathbb{Q}$ και $f_1(x)=0$ αν $x\in\mathbb{Q}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}f_1(x)$.

Όμως αυτό το όριο δεν υπάρχει: αν (q_n) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών ώστε $q_n\neq 0$ και $q_n\to 0$, τότε $f_1(q_n)=0\to 0$. Αν (α_n) είναι μια ακολουθία αρρήτων αριθμών ώστε $\alpha_n\to 0$, τότε $f_1(\alpha_n)=1\to 1$. Αφού $\lim_{n\to\infty}f(q_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(\alpha_n)$, από την αρχή της μεταφοράς βλέπουμε ότι το $\lim_{x\to 0}f_1(x)$ δεν υπάρχει. Άρα, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_1(x)=\frac{g(x)-g(0)}{x}=\frac{g(x)}{x}$, $x\neq 0$. Έχουμε $g_1(x)=0$ αν $x\notin\mathbb{Q}$ και $g_1(x)=x$ αν $x\in\mathbb{Q}$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}g_1(x)$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0}g_1(x)=0$. Έστω $\varepsilon>0$. Παρατηρούμε ότι

$$|g_1(x)|\leqslant|x|$$

για κάθε $x\neq 0$. Πράγματι, αν $x\notin\mathbb{Q}$ έχουμε $|g_1(x)|=0\leqslant|x|$, ενώ αν $x\in\mathbb{Q}$ έχουμε $|g_1(x)|=|x|$.

Επιλέγουμε $\delta=\varepsilon$. Τότε, αν $0<|x|<\delta$ έχουμε $|g_1(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, $\lim_{x\to 0}g_1(x)=0$.

Άρα, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0, και $g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}g_1(x)=0$.

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h_1(x) = \frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{h(x)}{x}$, $x \neq 0$. Έχουμε $h_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ και $h_1(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο 0 αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} h_1(x)$.

Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x \in \mathbb{R}$ και $0 < |x| < \delta$, τότε $\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι:

$$\text{αν } x \in \mathbb{R} \text{ και } 0 < |x| < \delta, \text{ τότε } |h_1(x) - 1| < \varepsilon.$$

Πράγματι, αν $x \notin \mathbb{Q}$ έχουμε $|h_1(x)-1| = \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$, ενώ αν $x \in \mathbb{Q}$ έχουμε $|h_1(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$.

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\lim_{x\to 0} h_1(x) = 0$. Άρα, η h είναι παραγωγίσιμη στο 0, και $h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0} h_1(x) = 0$.

3. Εξετάστε αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι, εξετάστε αν η παράγωγός τους είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

(α) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $f(0) = 0$.

(β) $g(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $g(0) = 0$.

(γ) $h(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ αν $x \neq 0$, και $h(0) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, τότε $x_n \to 0$ αλλά $\frac{f(x_n)}{x_n} = 2\pi n + \frac{\pi}{2} \to +\infty$. Άρα, η f δεν παραγωγίζεται στο 0.

(β) Η g είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $g'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, τότε $x_n \to 0$ και $\frac{g(x_n)}{x_n} = 1 \to 1$. Αν ορίσουμε $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, τότε $x_n \to 0$ και $\frac{g(x_n)}{x_n} = 0 \to 0$. Έπεται ότι το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ δεν υπάρχει, άρα η g δεν παραγωγίζεται στο 0.

(γ) Η h είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \neq 0$ και $h'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Για την παράγωγο στο 0 εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο της

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \frac{h(x)}{x} = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

καθώς το $x \to 0$. Παρατηρήστε ότι $\left|x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$. Αν λοιπόν μας δώσουν $\varepsilon > 0$ τότε, επιλέγοντας $\delta = \varepsilon > 0$ έχουμε

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{h(x)-h(0)}{x} - 0\right| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η h παραγωγίζεται στο 0, και $h'(0) = 0$. Η h' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$, δεν είναι όμως συνεχής στο 0: για να το δείξετε, παρατηρήστε ότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 1$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν η $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Υπόδειξη. Αν $x \neq 0$, τότε
$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$
Για την παράγωγο στο 0, θεωρούμε τη συνάρτηση
$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = -\frac{x - \sin x}{x^2}, \quad x \neq 0.$$
Θα δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$. Αφού η f_1 είναι περιττή, έπεται ότι
$$\lim_{x\to 0^-} f_1(x) = -\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0,$$
άρα
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f_1(x) = 0.$$
Χρησιμοποιώντας την $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ για $0 < x < \pi/2$, παίρνουμε
$$\begin{aligned} 0 < \frac{x - \sin x}{x^2} &< \frac{\sin x}{x}\,\frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\,\frac{1 - \cos x}{x} \\ &= \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\,\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \frac{x}{2} \to 1\cdot 1\cdot 1^2\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$
όταν $x \to 0$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f_1(x) = 0$.

Η f' είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$. Για να δείξουμε ότι f' είναι συνεχής στο 0 αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = 0$. Χρησιμοποιώντας την $\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$ για $0 < x < \pi/2$, παίρνουμε
$$0 > \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} > -\sin x \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$
Παρατηρούμε ότι
$$\sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \frac{\sin x}{2} \to 0$$
όταν $x \to 0$. Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$. Η f' είναι περιττή, άρα $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0 = f'(0)$. Δηλαδή, η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

5. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία στα οποία είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \notin \mathbb{Q} \;\text{ ή }\; x = 0 \\ \frac{1}{q} & , \quad x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p,q) = 1 \end{cases}$$

Υπόδειξη. Αν $x \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ τότε η f είναι ασυνεχής στο x, άρα δεν υπάρχει η $f'(x)$.

Έστω $x \in (0,1)$ ο οποίος είναι άρρητος. Η f είναι συνεχής στο x, και $f(x) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Έστω (α_n) ακολουθία αρρήτων αριθμών στο $(0,1)$, ώστε $\alpha_n \neq x$ και $\alpha_n \to x$. Τότε, από την αρχή της μεταφοράς,
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{0 - 0}{\alpha_n - x} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$
Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n} < x < 1 - \frac{1}{n}$ για κάθε $n \geqslant n_0$ (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n \geqslant n_0$, υπάρχει μοναδικός $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{m_n}{n} < x < \frac{m_n + 1}{n} < 1$. Παρατηρήστε ότι
$$f\left(\frac{m_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{m_n + 1}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}.$$

Επίσης, τουλάχιστον ένας από τους $\frac{m_n+1}{n} - x$, $x - \frac{m_n}{n}$ είναι μικρότερος ή ίσος από $\frac{1}{2n}$ (το άθροισμά τους είναι ίσο με $\frac{1}{n}$). Άρα, θέτοντας $x_n = \frac{m_n}{n}$ ή $x_n = \frac{m_n+1}{n}$, έχουμε $x_n \neq x$, $x_n \to x$ και

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| = \left|\frac{f(x_n)}{x_n - x}\right| \geqslant \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{|x_n - x|} \geqslant \frac{1}{n} \cdot (2n) = 2.$$

Τότε, από την αρχή της μεταφοράς,

$$0 = |f'(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}\right| \geqslant 2,$$

το οποίο είναι άτοπο.

6. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ η οποία:

(α) είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \frac{1}{2}$.

(β) είναι συνεχής στο $(0,1)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 2$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$ αν $0 < x < 1/2$ και $f(x) = 1 - x$ αν $1/2 \leqslant x < 1$.

(β) Ορίστε την f σε κάθε διάστημα της μορφής $\left(\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n-1/2}\right)$ μιμούμενοι το (α): η f να παίρνει την τιμή 0 στα $\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n-1/2}$, την τιμή 1 στο σημείο $\frac{1}{n}$, και να είναι γραμμική στα δύο διαστήματα $\left(\frac{1}{n+1/2}, \frac{1}{n}\right)$ και $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1/2}\right)$.

7. Δώστε παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) > 0$: Θεωρήστε την $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{x+1}{3}$ (τη γραμμική συνάρτηση με $f(-1) = 0$ και $f(2) = 1$). Έχουμε $f'(x) = \frac{1}{3} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα, $f'(1) > 0$.

(β) $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ και $f'(1) < 0$: Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ζητάμε: $f(-1) = a - b + c = 0$ και $f(2) = 4a + 2b + c = 1$, άρα $c = \frac{1}{3} - 2a$ και $b = \frac{1}{3} - a$. Επίσης, $f'(x) = 2ax + b$, άρα

$$f'(1) = 2a + b = a + \frac{1}{3} < 0 \quad \text{αν } a < -\frac{1}{3}.$$

Τώρα, μπορούμε να επιλέξουμε: $a = -\frac{2}{3}$, $b = 1$, $c = \frac{5}{3}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{5}{3}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(γ) $f(0) = 0$, $f(3) = 1$, $f'(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$: Το τυπικό παράδειγμα γνησίως αύξουσας παραγωγίσιμης συνάρτησης που η παράγωγός της μηδενίζεται σε ένα σημείο είναι η $g(x) = x^3$. Θεωρήστε συνάρτηση της μορφής $f(x) = a(x-1)^3 + b$. Ζητάμε: $f(0) = -a + b = 0$, άρα $b = a$. Επίσης, $f(3) = 8a + a = 1$, άρα $a = \frac{1}{9}$. Ελέγξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x-1)^3+1}{9}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

(δ) $f(m) = 0$ και $f'(m) = (-1)^m$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f(x) = a\sin(\pi x)$. Τότε, $f(m) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $f'(m) = \pi a\cos(\pi m) = (-1)^m \pi a$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Πρέπει λοιπόν να επιλέξουμε $a = \frac{1}{\pi}$ ώστε να ικανοποιούνται οι δύο πρώτες συνθήκες. Τότε,

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right| \leqslant \frac{1}{\pi} \leqslant \frac{1}{2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $\pi > 2$. Δηλαδή, ικανοποιείται και η τρίτη συνθήκη.

8. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι: $f(x_0) = 0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0. Δείξτε ότι η συνάρτηση γινόμενο $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στοx_0.

Υπόδειξη. Για $x \neq x_0$ γράφουμε

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x - x_0} g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x),$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x_0) = 0$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g είναι συνεχής στο x_0, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \to f'(x_0)g(x_0)$$

όταν $x \to x_0$, συνεπώς η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)$.

9. Για καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της στο διάστημα που υποδεικνύεται.

(α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$.

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$.

Υπόδειξη. (α) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ στο $[-2, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8$. Οι ρίζες της παραγώγου είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = -\frac{4}{3}$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-2, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-2) = 5, \quad f(2) = -11, \quad f(-4/3) = 203/27.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 203/27$ και $\min(f) = -11$.

(β) $f(x) = x^5 + x + 1$ στο $[-1, 1]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)$ και $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$, δηλαδή η f δεν έχει κρίσιμα σημεία. Υπολογίζουμε τις τιμές $f(-1) = -1$ και $f(1) = 3$. Έπεται ότι $\max(f) = 3$ και $\min(f) = -1$.

(γ) $f(x) = x^3 - 3x$ στο $[-1, 2]$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, 2)$, με παράγωγο $f'(x) = 3x^2 - 3$. Τα σημεία στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος είναι τα $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Άρα, το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο $(-1, 2)$ είναι το x_2. Υπολογίζουμε τις τιμές

$$f(-1) = 2, \quad f(1) = -2, \quad f(2) = 2.$$

Έπεται ότι $\max(f) = 2$ και $\min(f) = -2$.

10. Δείξτε ότι η εξίσωση:

(α) $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

(β) $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Υπόδειξη. (α) Η εξίσωση $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax - bx - cx$. Παρατηρήστε ότι $f(0) = f(1) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βρίσκουμε μια ρίζα της εξίσωσης στο $(0, 1)$.

(β) Η εξίσωση $6x^4 - 7x + 1 = 0$ έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 6x^4 - 7x + 1$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2 < x_3$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ (δηλαδή, ότι η εξίσωση έχει περισσότερες από δύο πραγματικές ρίζες). Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f στα $[x_1, x_2]$ και $[x_2, x_3]$, βρίσκουμε $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$ ώστε $f'(y_1) = f'(y_2) = 0$. Δηλαδή, η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον δύο (διαφορετικές) πραγματικές ρίζες. Όμως, $f'(x) = 24x^3 - 7 = 0$ αν και μόνο αν $x = \sqrt[3]{7/24}$, δηλαδή η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα η αρχική εξίσωση έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

(γ) Η εξίσωση $x^3 + 9x^2 + 33x - 8 = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 9x^2 + 33x - 8$. Αφού $f(0) = -8 < 0$ και $f(1) = 35 > 0$, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Αν υποθέσουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα (θεώρημα Rolle). Όμως, $f'(x) = 3x^2 + 18x + 33 = 3(x^2 + 6x + 11) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ελέγξτε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική). Αυτό είναι άτοπο, άρα η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία πραγματική ρίζα.

Από τα παραπάνω, η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

11. Έστω $a_1 < \cdots < a_n$ στο $\mathbb{R}$ και έστω $f(x) = (x - a_1)\cdots(x - a_n)$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ λύσεις.

Υπόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει n διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle βλέπουμε ότι η $f''(x) = 0$ έχει $n - 1$ διαφορετικές πραγματικές ρίζες, και, συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ότι η $f^{(n)}(x) = 0$ έχει (τουλάχιστον) μία πραγματική ρίζα. Όμως, $f^{(n)}(x) = n! \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει το πολύ $(n - 1)$ πραγματικές ρίζες. Παρατηρούμε τώρα ότι: για κάθε $i = 1, \ldots, n - 1$ έχουμε $f(a_i) = f(a_{i+1}) = 0$, οπότε το θεώρημα Rolle δείχνει ότι υπάρχει $y_i \in (a_i, a_{i+1})$ ώστε $f'(y_i) = 0$. Τα $y_1, \ldots, y_{n-1}$ είναι διαφορετικά ανά δύο γιατί τα (a_i, a_{i+1}) είναι ξένα ανά δύο (διαδοχικά) διαστήματα. Άρα, η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει ακριβώς $n - 1$ πραγματικές ρίζες.

12. Σχεδιάστε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad f(x) = x + \frac{3}{x^2}, \qquad f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \qquad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

θεωρώντας σαν πεδίο ορισμού τους το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο μπορούν να οριστούν.

13. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x^2 - 2a_k x + a_k^2) = nx^2 - 2(a_1 + \cdots + a_n)x + (a_1^2 + \cdots + a_n^2).$$

Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x) = 2nx - 2(a_1 + \cdots + a_n).$$

Έπεται ότι η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο $x_0 = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$. Η ελάχιστη τιμή είναι ίση με $\min(f) = (a_1^2 + \cdots + a_n^2) - \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)^2$.

14. Έστω $a > 0$. Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-a|}$$

είναι ίση με $\frac{2+a}{1+a}$.

Υπόδειξη. Μελετήστε την f χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, a]$ και $[a, +\infty)$ (ώστε να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Παραγωγίζοντας, ελέγξτε ότι η f είναι αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, φθίνουσα στο $[a, +\infty)$, ενώ στο $[0, a]$ έχουμε ότι η f είναι φθίνουσα στο $[0, a/2]$ και αύξουσα στο $[a/2, a]$.

Συνεπώς, η μέγιστη τιμή της f είναι μία από τις $f(0)$ και $f(a)$. Παρατηρήστε ότι $f(0) = 1 + \frac{1}{1+a} = \frac{2+a}{1+a} = f(a)$. Συνεπώς, $\max(f) = \frac{2+a}{1+a}$.

15. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ και ότι $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο x στο (a, b) για το οποίο οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.

Υπόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in (a, b)$ ώστε $f'(x) = g'(x)$ (αυτό σημαίνει ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα $(x, f(x))$ και $(x, g(x))$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται). Θεωρούμε τη συνάρτηση $h = f - g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αφού $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$, έχουμε $h(a) = h(b) = 0$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle, βρίσκουμε $x \in (a, b)$ ώστε $h'(x) = 0$, δηλαδή, $f'(x) - g'(x) = 0$.

16. Δίνονται δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο ρίζες της $f(x) = 0$ βρίσκεται μια ρίζα της $g(x) = 0$, και αντίστροφα.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1 < x_2$ στο (a, b) ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$, και ότι η g δεν μηδενίζεται στο (x_1, x_2) (απαγωγή σε άτοπο). Εφαρμόζοντας την υπόθεση $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ στα x_1 και x_2, βλέπουμε ότι $f'(x_1)g(x_1) \neq 0$ και $f'(x_2)g(x_2) \neq 0$, άρα η g δεν μηδενίζεται στα x_1, x_2. Με άλλα λόγια, η g δεν μηδενίζεται στο $[x_1, x_2]$.

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την $h := \frac{f}{g} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2), και $h(x_1) = h(x_2) = 0$ (εξηγήστε γιατί). Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x \in (x_1, x_2)$ ώστε

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} = 0.$$

Αυτό είναι άτοπο: αφού $x \in (a, b)$, έχουμε $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$, άρα $h'(x) \neq 0$.

Β′ Ομάδα

17. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b), με $f(a) = f(b)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x_1 \neq x_2 \in (a, b)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

Υπόδειξη. Θέτουμε $\gamma = \frac{a+b}{2}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στα $[a, \gamma]$ και $[\gamma, b]$ βρίσκουμε $x_1 \in (a, \gamma)$ και $x_2 \in (\gamma, b)$ που ικανοποιούν τις

$$f'(x_1) = \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \quad \text{και} \quad f'(x_2) = \frac{f(b) - f(\gamma)}{b - \gamma}.$$

Χρησιμοποιώντας την $\gamma - a = \frac{b-a}{2} = b - \gamma$ και την $f(a) = f(b)$, ελέγξτε ότι $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

18. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Δείξτε ότι

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{y\to+\infty} f'(y) = 0$, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $y > M$ ισχύει $|f'(y)| < \varepsilon$. Έστω $x > M$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$: υπάρχει $y_x \in (x, x+1)$ ώστε

$$f(x+1) - f(x) = f'(y_x)((x+1) - x) = f'(y_x).$$

Όμως $y_x > x > M$, άρα $|f'(y_x)| < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$|f(x+1) - f(x)| < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+1) - f(x)) = 0$.

19. Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}[f(x+\sqrt{x}) - f(x)] = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $x > 1$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+\sqrt{x}]$: υπάρχει $y_x \in (x, x+\sqrt{x})$ ώστε

$$f(x+\sqrt{x}) - f(x) = f'(y_x)\sqrt{x}.$$

Όμως $y_x > x > 1$, άρα $|f'(y_x)| \leqslant \frac{1}{y_x} < \frac{1}{x}$. Δηλαδή,

$$|f(x+\sqrt{x}) - f(x)| < \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Έπεται ότι $\lim_{x\to+\infty}(f(x+\sqrt{x}) - f(x)) = 0$.

20. Έστω f, g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο $[0, a]$ και παραγωγίσιμες στο $(0, a)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = g(0) = 0$ και $f'(x) > 0$, $g'(x) > 0$ στο $(0, a)$.

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε ότι η $\frac{f(x)}{x}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

(β) Αν η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$, δείξτε ότι η $\frac{f}{g}$ είναι αύξουσα στο $(0, a)$.

Υπόδειξη. (α) Η παράγωγος της $h(x) = \frac{f(x)}{x}$ στο $x \in (0, a)$ ισούται με

$$h'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$ για την f, βρίσκουμε $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi)x.$$

Όμως η f' είναι αύξουσα και $\xi < x$, άρα $f'(\xi) \leqslant f'(x)$. Συνεπώς, $f(x) \leqslant f'(x)x$. Έπεται ότι $h' \geqslant 0$ στο $(0, a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

(β) Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι καλά ορισμένη στο $(0, a)$. Πράγματι, παρατηρήστε ότι η $\frac{f'}{g'}$ ορίζεται καλά στο $(0, a)$ και ότι $g' > 0$ (από την υπόθεση). Αυτό έχει σαν συνέπεια και την $g(x) > 0$ στο $(0, a)$ (δείτε την ερώτηση κατανόησης 4). Έχουμε

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$ για την $z_x(t) = f(t)g(x) - g(t)f(x)$, βρίσκουμε $\xi \in (0, x)$ ώστε

$$0 = z_x(x) - z_x(0) = f'(\xi)g(x) - g'(\xi)f(x).$$

Αφού η $\frac{f'}{g'}$ είναι αύξουσα και $\xi < x$, παίρνουμε

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leqslant \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Συνεπώς, $f'(x)g(x) - g'(x)f(x) \geqslant 0$. Έπεται ότι $h' \geqslant 0$ στο $(0,a)$, άρα η h είναι αύξουσα.

21. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geqslant 1 + x$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \log x \leqslant x - 1.$$

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^x - 1 - x$. Η παράγωγος $g'(x) = e^x - 1$ της g είναι αρνητική στο $(-\infty, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$. Άρα, η g έχει ολικό ελάχιστο στο 0. Δηλαδή, $g(x) \geqslant g(0) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Από την $e^{x-1} \geqslant x$ έπεται ότι

$$x - 1 = \ln\left(e^{x-1}\right) \geqslant \ln x.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα για τον $\frac{1}{x} > 0$, παίρνουμε

$$-\ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{1}{x} - 1,$$

δηλαδή

$$1 - \frac{1}{x} \leqslant \ln x.$$

22. Δείξτε ότι για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\ln x \leqslant n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leqslant \sqrt[n]{x}\, \ln x.$$

Συμπεράνατε ότι $\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln x$ για $x > 0$.

Υπόδειξη. Έστω $x > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 21 για τον θετικό αριθμό $\sqrt[n]{x}$, παίρνουμε

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leqslant \ln(\sqrt[n]{x}) \leqslant \sqrt[n]{x} - 1,$$

δηλαδή

$$\frac{\sqrt[n]{x} - 1}{\sqrt[n]{x}} \leqslant \frac{1}{n} \ln x \leqslant \sqrt[n]{x} - 1.$$

Έπεται ότι

$$\ln x \leqslant n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \leqslant \sqrt[n]{x}\, \ln x.$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$, το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = \ln x.$$

23. (α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας την ανισότητα της Άσκησης 21 για τον θετικό αριθμό $1+\frac{x}{n}$ παίρνουμε
$$\frac{x/n}{1+(x/n)} \leqslant \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n}.$$

Άρα,
$$\frac{x}{1+\frac{x}{n}} \leqslant n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant x.$$

Το κριτήριο των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών δείχνει ότι
$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

(β) Από το (α) έχουμε
$$\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) \to x$$
όταν το $n\to\infty$. Η $y\mapsto e^y$ είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε η αρχή της μεταφοράς δείχνει ότι
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)} \to e^x$$
όταν το $n\to\infty$.

24. Μελετήστε τη συνάρτηση
$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$
στο $(0,+\infty)$ και σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. Ποιός είναι μεγαλύτερος, ο e^π ή ο π^e;

Υπόδειξη. Η παράγωγος της f είναι η
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

Δηλαδή, $f'(x)>0$ αν $\ln x<1$ και $f'(x)<0$ αν $\ln x>1$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$. Αφού $\pi>3>e$ έχουμε $f(\pi)<f(e)$, δηλαδή
$$\frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}.$$

Έπεται ότι
$$\ln(\pi^e) = e\ln\pi < \pi\ln e = \ln(e^\pi).$$

Άρα, $\pi^e < e^\pi$.

25. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις ln και exp ικανοποιούν τα εξής: (α) για κάθε $s>0$,
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^s} = +\infty$$

και (β)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^s} = 0.$$

Δηλαδή, η exp αυξάνει στο $+\infty$ ταχύτερα από οποιαδήποτε (μεγάλη) δύναμη του x, ενώ η ln αυξάνει στο $+\infty$ βραδύτερα από οποιαδήποτε (μικρή) δύναμη του x.

Υπόδειξη. Εφαρμόστε τον κανόνα του l'Hospital.

26. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c μια σταθερά. Δείξτε ότι υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-cx}$ στο $\mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι

$$g'(x) = f'(x)e^{-cx} - cf(x)e^{-cx} = e^{-cx}(f'(x) - cf(x)) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = f(x)e^{-cx} = a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι $f(x) = ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

27. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Δείξτε ότι: για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $g_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ με

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει μια ρίζα στο διάστημα (a, b).

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $h_\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ με $h_\lambda(x) = e^{\lambda x} f(x)$. Η h_λ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b), και $h_\lambda(a) = h_\lambda(b) = 0$. Από το θεώρημα του Rolle, η εξίσωση $h'_\lambda(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (a, b). Αφού

$$h'_\lambda(x) = e^{\lambda x}(f'(x) + \lambda f(x)) = e^{\lambda x} g_\lambda(x),$$

έπεται ότι η

$$g_\lambda(x) := f'(x) + \lambda f(x)$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b).

28. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ ώστε $f'(\xi) > f(\xi)$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $e^{-x} f(x)$.]

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-x} f(x)$ στο (a, b). Σταθεροποιήστε $c \in (a, b)$. Αφού $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x\to b^-} e^{-x} = e^{-b} > 0$, ισχύει

$$\lim_{x\to b^-} g(x) = \lim_{x\to b^-} e^{-x} f(x) = +\infty.$$

Άρα, υπάρχει $d \in (c, b)$ ώστε $g(c) < g(d)$. Από το θεώρημα μέσης τιμής στο $[c, d]$, υπάρχει $\xi \in (c, d)$ ώστε

$$g'(\xi) = \frac{g(d) - g(c)}{d - c} > 0.$$

Όμως,

$$g'(\xi) = e^{-\xi}(f'(\xi) - f(\xi)).$$

Άρα, $f'(\xi) > f(\xi)$ (και $\xi \in (a, b)$, αφού $a < c < \xi < d < b$).

29. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g(x) = \sin x - \frac{2x}{\pi}$ στο $[0, \pi/2]$. Παρατηρήστε ότι $g(0) = g(\pi/2) = 0$. Επίσης,

$$g'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

και
$$g''(x) = -\sin x < 0 \quad \text{στο} \quad (0, \pi/2).$$
Άρα, η g είναι κοίλη. Έπεται ότι: για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει
$$g(x) \geqslant \frac{2x}{\pi} g(\pi/2) + \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) g(0) = 0.$$
Δηλαδή,
$$\sin x \geqslant \frac{2x}{\pi}.$$

30. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. [*Υπόδειξη:* Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$.]

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(x) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε την $g = f^2 + (f')^2$. Τότε,
$$g' = 2ff' + 2f'f'' = 2f'(f + f'') = 0,$$
δηλαδή η g είναι σταθερή. Αφού $g(0) = [f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 0$, συμπεραίνουμε ότι
$$g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2 = 0$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, $f(x) = f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(β) Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \cos x$ ικανοποιεί τις $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ και $g''(x) + g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από το (α) έπεται ότι $f(x) - \cos x = g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

31. (α) Δείξτε ότι η εξίσωση $\tan x = x$ έχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα της μορφής $I_k = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

(β) Έστω a_k η λύση της παραπάνω εξίσωσης στο διάστημα I_k, $k \in \mathbb{N}$. Βρείτε, αν υπάρχει, το όριο $\lim_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k)$ και δώστε γεωμετρική ερμηνεία.

Υπόδειξη. (α) Θεωρήστε τη συνάρτηση $f_k : I_k \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \tan x - x$. Παρατηρήστε ότι
$$\lim_{x\to(k\pi-\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = -\infty \ \text{ και } \lim_{x\to(k\pi+\frac{\pi}{2})^+} f_k(x) = +\infty.$$
Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής μπορείτε να δείξετε ότι υπάρχει $a_k \in I_k$ ώστε $f_k(a_k) = \tan a_k - a_k = 0$. Η λύση είναι μοναδική γιατί η $f_k(x) = \tan x - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο I_k: παρατηρήστε ότι $f_k'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0$ αν $x \neq k\pi$ και $= 0$ στο σημείο $k\pi$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ έπεται ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε αν $x > M$ τότε $0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon$.

Υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $k \geqslant k_0$ να ισχύει $k\pi - \frac{\pi}{2} > M$. Τότε, αν θεωρήσουμε τη λύση a_k της εξίσωσης $\tan x = x$ στο I_k, έχουμε $a_k > M$ και $\arctan a_k = a_k - k\pi$. Άρα,
$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_k - k\pi) < \varepsilon.$$
Όμοια,
$$0 < \frac{\pi}{2} - (a_{k+1} - (k+1)\pi) < \varepsilon.$$

Έπεται ότι
$$|a_{k+1} - a_k - \pi| < \varepsilon.$$
Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k+1} - a_k) = \pi$.

Γ′ Ομάδα

32. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $g(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x - a_k|$.

Υπόδειξη. Μελετήστε την g χωριστά στα διαστήματα $(-\infty, a_1]$, $[a_1, a_2], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$ και $[a_n, +\infty)$ (για να «διώξετε» τις απόλυτες τιμές). Θα χρειαστεί να διακρίνετε τις περιπτώσεις n περιττός και n άρτιος.

(α) Αν $n = 2s - 1$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$ και αύξουσα στο $[a_s, +\infty)$. Συνεπώς,
$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s-1} |a_s - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s-1} a_k - \sum_{k=1}^{s-1} a_k.$$
(β) Αν $n = 2s$ για κάποιον $s \in \mathbb{N}$, ελέγξτε ότι η g είναι φθίνουσα στο $(-\infty, a_s]$, σταθερή στο $[a_s, a_{s+1}]$, και αύξουσα στο $[a_{s+1}, +\infty)$. Συνεπώς,
$$\min(g) = \sum_{k=1}^{2s} |a_s - a_k| = \sum_{k=1}^{2s} |a_{s+1} - a_k| = \sum_{k=s+1}^{2s} a_k - \sum_{k=1}^{s} a_k.$$

33. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $f(x) = (x^2 - 1)^n$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, όλες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Rolle δείξτε επαγωγικά το εξής: για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, η εξίσωση $f^{(k)}(x) = 0$ έχει k διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$ και $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

(β) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει n διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(-1, 1)$.

(γ) Δείξτε ότι η εξίσωση $f^{(n)}(x) = 0$ έχει το πολύ n διαφορετικές λύσεις. [*Υπόδειξη:* Αν η $f^{(n)}(x) = 0$ είχε $n + 1$ διαφορετικές λύσεις, τότε η $f^{(2n)}(x) = 0$ θα είχε λύση.]

34. Να βρεθούν όλοι οι $a > 1$ για τους οποίους η ανισότητα $x^a \leqslant a^x$ ισχύει για κάθε $x > 1$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ πρέπει να έχει μέγιστο στο a. Η συνάρτηση αυτή μελετήθηκε στην Άσκηση 24.

35. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή και ίση με 0 στο $[0, 1]$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-2x} f(x)$. Αφού $g'(x) = e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) \leqslant 0$, η g είναι φθίνουσα. Όμως, $g(0) = 0$ και $g \geqslant 0$ (διότι $f(0) = 0$ και $f \geqslant 0$ από τις υποθέσεις). Αναγκαστικά, $g \equiv 0$ και έπεται ότι $f \equiv 0$ στο $[0, 1]$.

36. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}f(x)$. Τότε, $g'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα. Τότε, για κάθε $x > 0$ έχουμε $g(x) > g(0) = 0$, δηλαδή $e^{-x}f(x) > 0$. Έπεται ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

37. Έστω $\alpha > 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\alpha e^x = 1 + x + x^2/2$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = e^{-x}(1 + x + x^2/2)$. Τότε,

$$g'(x) = e^{-x}(1+x) - e^{-x}(1 + x + x^2/2) = -\frac{x^2e^{-x}}{2}.$$

Αφού $g'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$, η g είναι γνησίως φθίνουσα. Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} = 0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$. Συνεπώς, η g παίρνει κάθε θετική τιμή α ακριβώς μία φορά (εξηγήστε γιατί). Έπεται το ζητούμενο.

38. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f' είναι φραγμένη. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0.$$

Υπόδειξη. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(y)$
lsM για κάθε $y > 0$. Έστω $x > 1$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $y_x \in (1, x)$ ώστε

$$|f(x) - f(1)| = |f'(y_x)(x-1)| \leqslant M(x-1).$$

Τότε, για κάθε $x > 1$,

$$\frac{|f(x)|}{x^\alpha} \leqslant \frac{|f(x) - f(1)|}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha} \leqslant M\frac{x-1}{x^\alpha} + \frac{|f(1)|}{x^\alpha}.$$

Αν $\alpha > 1$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|f(1)|}{x^\alpha} = 0.$$

Συνεπώς, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} = 0$ (εξηγήστε γιατί).

39. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to b^-} f'(x)$ τότε είναι ίσο με $+\infty$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $-\infty \leqslant \lim\limits_{x\to b^-} f'(x) < +\infty$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $\ell \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$ ώστε $f'(y) \leqslant \ell$ για κάθε $y \in (x_0, b)$.

(β) Θεωρήστε $x \in (x_0, b)$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x_0, x]$ δείξτε ότι

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \ell(x - x_0) \leqslant f(x_0) + \ell(b - a).$$

(γ) Από το (β) η f είναι άνω φραγμένη στο $[x_0, b)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

40. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ τότε είναι ίσο με 0.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \ell \neq 0$.

(α) Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > \frac{|\ell|}{2}$.

(β) Θεωρήστε $x > M$ και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο $[M, x]$ δείξτε ότι

$$|f(x) - f(M)| \geqslant \frac{|\ell|(x - M)}{2}.$$

(γ) Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, έχουμε $\lim_{x\to+\infty} |f(x)-f(M)| = |L-f(M)|$. Από την άλλη πλευρά, $\lim_{x\to+\infty} \frac{|\ell|(x-M)}{2} = +\infty$. Από το (β) μπορείτε να καταλήξετε σε άτοπο.

(δ) Υποθέτοντας ότι $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \pm\infty$, μπορείτε πάλι να δείξετε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x > M$ να έχουμε $|f'(x)| > 1$. Συνεπώς, επαναλαμβάνοντας τα βήματα (β) και (γ), καταλήγετε σε άτοπο.