ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Συμπληρώματα και Διευκρινίσεις στο μάθημα του Σαββάτου (7/12/19)

Μερικές προφανείς προτάσεις στην άλγεβρα των ορίων

1. Αν $\alpha \geq 0$ και η ακολουθία β_n είναι μηδενική, $\beta_n \to 0$, τότε η ακολουθία α^{β_n} συγκλίνει στο 1 (όπως το α^0).

   Απόδειξη: α) Έστω πρώτα ότι $\beta_n > 0$. Τότε για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ επειδή $1/\beta_n \to \infty$ θα ισχύει ότι

   $$(1+\varepsilon)^{1/\beta_n} \to \infty \ , \ \ (1-\varepsilon)^{1/\beta_n} \to 0 \ .$$

   Συνεπώς δοθέντος ότι για $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ο πεπερασμένος θετικός αριθμός α να είναι:

   $$(1-\varepsilon)^{1/\beta_n} < \alpha < (1+\varepsilon)^{1/\beta_n} \ ,$$

   οπότε

   $$|\alpha^{\beta_n} - 1| < \varepsilon \ \ , \forall \, n \geq n_0 \ .$$

   β) Αν $\beta_n < 0$

   $$\alpha^{\beta_n} = \frac{1}{\alpha^{-\beta_n}}$$

   η οποία τείνει στο 1 λόγω της (α).

   γ) αν $\beta_n = 0$ όλοι οι όροι είναι ίσοι με το 1.

   Συνεπώς αν $\beta_n \to 0$ η ακολουθία α^{β_n} ανεξαρτήτως του προσήμου του β_n τείνει στο 1. Σκεφθείτε πως θα αποδεικνύαται ότι $\alpha^{\beta_n} \to 1$ αν η β_n δεν είχε σταθερό πρόσημο.

   Πόρισμα: Αν $\beta_n \to \beta$ όπου β πεπερασμένος αριθμός, τότε $\beta_n - \beta \to 0$ και από την προηγούμενη πρόταση $\alpha^{\beta_n - \beta} \to 1$. Συνεπώς είναι:

   $$\lim_{n\to\infty} \alpha^{\beta_n} = \alpha^{\beta} \ .$$

2. Αν μια ακολουθία α_n θετικών όρων συγκλίνει στον πεπερασμένο αριθμό α και η ακολουθία β_n είναι μηδενική, $\beta_n \to 0$, τότε η ακολουθία $\alpha_n^{\beta_n}$ συγκλίνει στο 1.

   Απόδειξη: Θα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για $n > n_0$, η ακολουθία να φράσσεται από τα α_1, α_2 δηλαδή να είναι

   $$0 \leq \alpha_1 < \alpha_n < \alpha_2,$$

καθώς επίσης και για το όριο της α_n θα είναι $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Συνεπώς, θα είναι

$$0 \leq \alpha_1^{\beta_n} < \alpha_n^{\beta_n} < \alpha_2^{\beta_n}$$

και εξ'αυτού επειδή και η $\alpha_1^{\beta_n}$ και η $\alpha_2^{\beta_n}$ τείνουν στο 1 θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha^{\beta_n} = 1$$

<u>Εφαρμογή:</u> α) Άσκηση 2.12.x.

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{(-n^2)}\right)^{(-n^2)}\right)^{-1/n}$$

Άρα

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} e^{-1/n} = 1 \; .$$

β) Από την άσκηση 2.12.xii. Η ακολουθία

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} \to 1 \; .$$

3. Αν μια ακολουθία α_n θετικών όρων συγκλίνει στο $\alpha \neq 1$ και αν η ακολουθία β_n αποκλίνει στο άπειρο, $\beta_n \to \infty$, τότε η ακολουθία $\alpha_n^{\beta_n}$ αποκλίνει στο άπειρο αν $\alpha > 1$ και συγκλίνει στο 0 αν $\alpha < 1$.

   <u>Απόδειξη:</u> Ας θεωρήσουμε ότι $\alpha > 1$, τότε θα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για $n > n_0$, η ακολουθία να φράσσεται από τα α_1, α_2 δηλαδή να είναι

$$1 < \alpha_1 < \alpha_n < \alpha_2,$$

   καθώς επίσης και το όριο της $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. Συνεπώς, θα είναι

$$\alpha_1^{\beta_n} < \alpha_n^{\beta_n} < \alpha_2^{\beta_n}$$

   και εξ' αυτού επειδή και η $\alpha_1^{\beta_n}$ και η $\alpha_2^{\beta_n}$ (κατά μείζονα λόγο) αποκλίνουν θα είναι:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha^{\beta_n} = \infty$$

   Με παρόμοιο επιχείρημα όταν $\alpha < 1$ έχουμε τελικά $\alpha_1 < \alpha_n < \alpha_2 < 1$ και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty} \alpha^{\beta_n} = 0 \; .$$

   <u>Εφαρμογή:</u> α)

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$$

Άρα
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} e^{\sqrt{n}} = \infty \ .$$

β)
$$\alpha_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{(-\sqrt{n})}\right)^{(-\sqrt{n})}\right)^{-\sqrt{n}}$$

Άρα
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\sqrt{n}}} = 0 \ .$$

γ) Στην ειδική περίπτωση όπου η ακολουθία α_n τείνει στο 1 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω πρόταση. Για παράδειγμα αν

$$\alpha_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 1$$

αν αυτή υψωθεί στη $\beta_n = n$ θα τείνει στο e, αν υψωθεί στη $\beta_n' = n^2$ θα αποκλίνει στο ∞, ενώ αν υψωθεί στη $\beta_n'' = \sqrt{n}$ θα τείνει στο 1.