ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Συμπληρώματα, Σχόλια, Διορθώσεις και Διευκρινίσεις στο μάθημα της Παρασκευής 24/01/20

Σχέση μονοτονίας και προσήμου παραγώγου

1. Ισχύει το εξής: Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και επιπλέον $f'(x_0) > 0$ τότε υπάρχει περιοχή του x_0, $I_{x_0} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, τέτοια ώστε να είναι $f(x) > f(x_0)$ όταν $x > x_0$ και $x \in I_{x_0}$ και $f(x) < f(x_0)$ όταν $x < x_0$ και $x \in I_{x_0}$.

   Απόδειξη: Εφόσον υπάρχει παράγωγος στο x_0, υπάρχει το όριο

   $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} ,$$

   που είναι ο θετικός αριθμός $f'(x_0) > 0$. Άρα θα υπάρχει μία περιοχή του $I_{x_0} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ τέτοια ώστε ο λόγος

   $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

   να είναι θετικός. Ο λόγος είναι ότι από τον ορισμό του ορίου, για την τιμή του $\varepsilon = f'(x_0)/2 > 0$ θα υπάρχει $\delta(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε για $x \in I_{x_0} : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να είναι

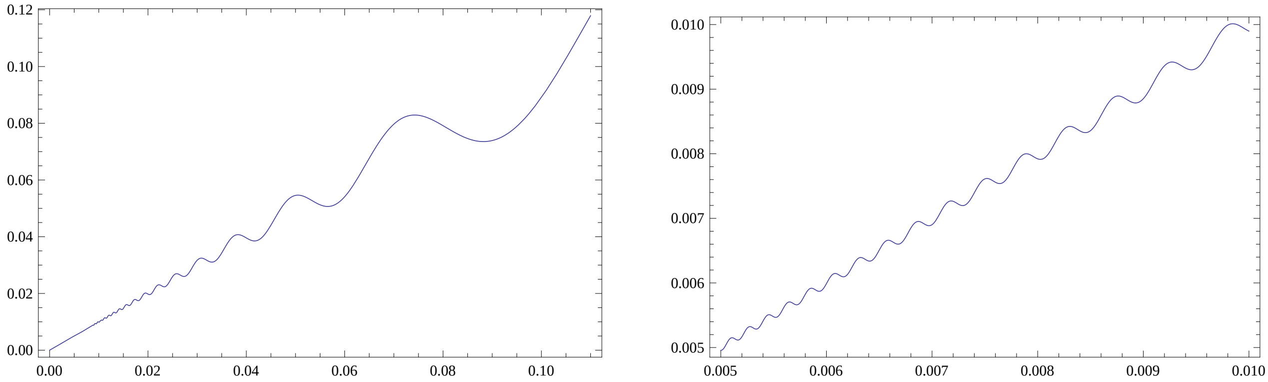
   $$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} ,$$

   ή

   $$0 < \frac{f'(x_0}{2} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < \frac{3f'(x_0)}{2} .$$

   Συνεπώς για κάθε $x \in I_{x_0}$ αν $x > x_0$ θα είναι και $f(x) > f(x_0)$ και αν $x \in I_{x_0}$ και $x < x_0$ θα είναι $f(x) < f(x_0)$. Η συνάρτηση τότε λέγεται οτι ανέρχεται (δηλαδή είναι ανοδική) στο σημείο x_0 (και όχι κατ' ανάγκη στο διάστημα I_{x_0}!).

   Παρατήρηση Η παραπάνω πρόταση δεν συνεπάγεται οπωσδήποτε ότι η συνάρτηση $f(x)$ θα είναι μονότονη σε κάποια περιοχή του x_0, όπως περιμένει συνήθως κανείς στην περίπτωση που η παράγωγος (δλδ. η κλίση) είναι θετική). Η λεπτή διαφορά σχετίζεται με το ότι η παράγωγος ακόμη και αν ορίζεται σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει ότι είναι συνεχής σε αυτό το σημείο. Έτσι οσοδήποτε κοντά στο σημείο που η παράγωγος έχει θετική τιμή, η παράγωγος (η κλίση) μπορεί να γίνει αρνητική.



Σχήμα 1: Στο αριστερό διάγραμμα βλέπετε μια γενική εποπτεία της συνάρτησης (1) και στο αριστερό μια λεπτομέρεια αυτού. Παρατηρήστε (στο 2ο διάγραμμα) ότι η συνάρτηση παρουσιάζει παντού, οσοδήποτε κοντά στο 0, διαστήματα που είναι φθίνουσα, δηλαδή έχει τοπικά αρνητική κλίση. Παρόλ' αυτά, η συνάρτηση έχει θετική κλίση στο $x_0 = 0$ και καθαρά ανοδική τάση στο σημείο αυτό. Η φαινομενική αυτή αντίφαση, παράγωγο θετική στο 0 και αρνητική οσοδήποτε κοντά στο 0, οφείλεται στην ασυνέχεια που παρουσιάζει η $f'(x)$ στο 0.

Πράγματι, ας εξετάσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0\,. \end{cases} \tag{1}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη παντού και η παράγωγός της

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin(1/x) - 2\cos(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 1 & , \quad x = 0\,. \end{cases}$$

είναι ασυνεχής στο $x_0 = 0$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα επειδή $f'(0) = 1 > 0$ υπάρχει μία περιοχή περί το $x_0 = 0$ στην οποία η συνάρτηση είναι $f(x) > f(0) = 0$ όταν $x > 0$ και $f(x) < f(0)$ όταν $x < 0$. Παρόλα αυτά δεν υπάρχει καμμία περιοχή του 0, οσοδήποτε μικρή και αν επιλεγεί αυτή, στην οποία η συνάρτηση να είναι αύξουσα σε ολόκληρη αυτή την περιοχή. Αν συνέβαινε αυτό θα υπήρχε κάποιο κατάλληλο δ, ώστε για κάθε (προσέξτε το για κάθε) $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ να είναι $f'(x) > 0$, εφόσον η συνάρτηση έχει θεωρηθεί (εσφαλμένα) αύξουσα και παραγωγίσιμη. Αλλά για $x_n = 1/((2n-1)\pi)$ η συνάρτηση $f'(x_n) = 3 > 0$, ενώ για $y_n = 1/(2n\pi)$ είναι $f'(y_n) = -1 < 0$, οπότε επειδή κάθε περιοχή του 0 περιέχει άπειρους όρους και της x_n και της y_n, η παράγωγος σε κάθε περιοχή του μηδενός θα λαμβάνει και θετικές και αρνητικές τιμές, και συνεπώς δεν θα είναι μονότονη στην περιοχή αυτή. Συνεπώς, το θετικό πρόσημο παραγώγου σε ένα σημείο δεν συνεπάγεται μονοτονία της συνάρτησης σε μία περιοχή του σημείου.

2. Η μονοτονία μιας συνάρτησης $f(x)$ σε μία ολόκληρη περιοχή του σημείου x_0, εξασφαλίζεται μόνο αν είναι $f'(x) > 0$ σε όλόκληρη αυτή την περιοχή του σημείου x_0 (αποδείξτε το).

3. Στο μάθημα της Παρασκευή (24/1/20) τέθηκε το ερώτημα: υπάρχει παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η παράγωγος να είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \geq 0 \\ -1 & , \ x < 0 \end{cases} \quad ; \tag{2}$$

Προσέξτε ότι η "εύκολη" απάντηση $f(x) = |x|$, δεν θα μπορούσε να είναι η υποψήφια συνάρτηση, διότι η συνάρτηση αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 (δεν έχει τιμή στο $x = 0$) και συνεπώς δεν είναι συνάρτηση που έχει παντού παράγωγο σύμφωνη με την (2). Αν έλειπε από τον "κανόνα" της συνάρτησης $f(x)$ η τιμή $f(0) = 1$, τότε η παράπάνω απάντηση $f(x) = |x|$ με πεδίο ορισμού ολόκληρο το $\mathbb{R}$ εκτός του μηδενός, θα ήταν σωστή.

Στο παράδειγμα (1) είδαμε ότι μία συνάρτηση μπορεί να είναι παραγωγίσιμη αλλά η παράγωγός της να είναι ασυνεχής. Όμως παρότι η παράγωγος συνάρτηση μπορεί να είναι ασυνεχής πρέπει να ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής! Ο λόγος είναι ότι η ασυνέχεια της παραγώγου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δεν μπορεί να οφείλεται σε άλμα της παραγώγου, αλλά μόνο σε έλλειψη ορίου τουλάχιστον στη μία από τις δύο πλευρές ενός σημείου (αν εμφανιζόταν άλμα θα ήταν ισοδύναμο με διαφοροποίηση των πλευρικών παραγώγων στο επίμαχο σημείο και επομένως απουσία της παραγώγου στο σημείο αυτό). Η προτεινόμενη συνάρτηση, δεν ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής και επομένως δεν μπορεί να έχει την παραπάνω παράγωγο.

Συμπέρασμα 1: Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης μπορεί να είναι ασυνεχής, αλλά όχι με ασυνέχεια υπό μορφή αλμάτων.

Συμπέρασμα 2: Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ικανοποιεί το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής (βλ. απόδειξη παρακάτω.)

<u>Θεώρημα:</u> Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι $f'(\alpha) < f'(\beta)$, τότε για κάθε ενδιάμεση τιμή ξ που ικανοποιεί την ανισότητα $f'(\alpha) < \xi < f'(\beta)$ υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε να είναι $f'(x_0) = \xi$. (Όμοια, και αν $f'(\alpha) > f'(\beta)$.)

<u>Απόδειξη:</u>

Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$F(x) = f(x) - \xi x \ .$$

Επειδή $F'(\alpha) = f'(\alpha) - \xi < 0$ η F κατέρχεται στο α. Δηλαδή υπάρχει περιοχή του α τέτοια ώστε όταν $x \in (\alpha, \alpha + \delta_1)$ να είναι $F(x) < F(\alpha)$ (βλ. Εδάφιο 1). Ομοίως επειδή $F'(\beta) > 0$ υπάρχει περιοχή του β τέτοια ώστε όταν $x \in (\beta - \delta_2, \beta)$ να είναι $F(x) < F(\beta)$ (η συνάρτηση $F(x)$ ανέρχεται). Η $F(x)$ είναι όμως συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ώστε να ορίζεται παντού στο διάστημα αυτό η παράγωγός της) και συνεπώς παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο σημείο x_0, το οποίο πρέπει όμως να βρίσκεται εντός του διαστήματος $\alpha < x_0 < \beta$ δεδομένου ότι στα σημεία α, β η συνάρτηση κατέρχεται και ανέρχεται, αντίστοιχα. Επειδή η διαφορίσιμη $F(x)$ γίνεται ελάχιστη στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ θα είναι $F'(x_0) = 0$ άρα στο σημείο αυτό είναι $f'(x_0) = \xi$ (βλ. θεώρημα 5.5 των σημειώσεών σας). ό.έ.δ.

Με άλλα λόγια το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής για την παράγωγο μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης, δεν προϋποθέτει τη συνέχεια της παραγώγου. Αρκείται στην ύπαρξη της παραγώγου. Κατ' αντιπαράθεση, για μια συνάρτηση (όχι για την παράγωγο αυτής) το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής προϋποθέτει τη συνέχεια της συνάρτησης!

4. Ένας πολύ χρήσιμος χαρακτηρισμός της παραγώγου (του Κ. Καραθεοδωρή)

Αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $A(x)$ στο α τέτοια ώστε $f(x) - f(\alpha) = A(x)(x-a)$ και είναι $\lim_{x\to\alpha} A(x) = f'(\alpha)$. Αλλά και αντιστρόφως αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $A(x)$ στο α τέτοια ώστε $f(x) - f(\alpha) = A(x)(x-a)$ τότε η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α και $f'(\alpha) = \lim_{x\to\alpha} A(x)$.

Έστω $f(x)$ παραγωγίσιμη στο σημείο α. Η συνάρτηση

$$A(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} & , \ x \neq \alpha \\ f'(\alpha) & , \ x = \alpha \ , \end{cases}$$

είναι συνεχής στο α και είναι $\lim_{x\to\alpha} A(x) = f'(\alpha)$ δεδομένου ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α. Συνεπώς αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α τότε η συνεχής συνάρτηση $A(x)$ στο α που ορίσαμε ικανοποιεί την $f(x)-f(\alpha) = A(x)(x-a)$ για $x \neq \alpha$ και είναι $\lim_{x\to\alpha} A(x) = A(\alpha) = f'(\alpha)$.

Αντιστρόφως. Αν υπάρχει $A(x)$ συνεχής στο α με $\lim_{x\to\alpha} A(x) = A(\alpha)$ τέτοια ώστε για $x \neq \alpha$ να είναι $f(x) - f(\alpha) = A(x)(x-a)$ τοτε

$$A(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \ , \ x \neq \alpha \ ,$$

και επειδή το όριο $\lim_{x\to\alpha} A(x) = A(\alpha)$ υπάρχει η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α και είναι

$$f'(\alpha) = A(\alpha) \ .$$

Ο χαρακτηρισμός αυτός μας επιτρέπει να χειριστούμε τις παραγώγους ως κλάσματα και με διαισθητικό τρόπο να αποδεικνύουμε διάφορες προτάσεις οι οποίες αποδεικνύονται πιο δύσκολα με εψιλοντικά επιχειρήματα.

Π.χ. Ας αποδείξουμε ότι η σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο α αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(\alpha)$ και η $g(x)$ στο α και ας προσδιρίσουμε την παράγωγό της.

Σύμφωνα με τον Κ αρκεί να δείξω οτι η συνάρτηση

$$A(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(\alpha))}{x - \alpha} \ ,$$

είναι συνεχής στο α. Αλλά:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(\alpha))}{x - \alpha} = \frac{f(g(x)) - f(g(\alpha))}{g(x) - g(\alpha)} \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha} \ , \tag{3}$$

και επειδή η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $g(\alpha)$ και η $g(x)$ όντας παραγωγίσιμη στο α είναι και συνεχής στο α (που και αυτή η πρόταση αποδεικνύεται αμέσως και όμορφα με τον χαρακτηρισμό της παραγώγου του K), η συνάρτηση

$$B(x) = \frac{f(g(x)) - f(g(\alpha))}{g(x) - g(\alpha)}$$

είναι συνεχής στο $g(\alpha)$ και $B(\alpha) = f'(g(\alpha))$. Ομοίως, επειδή η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο α, υπάρχει συνάρτηση

$$\Gamma(x) = \frac{g(x) - g(\alpha)}{x - \alpha}$$

συνεχής στο α με $\Gamma(\alpha) = g'(\alpha)$. Συνεπώς η (3) γράφεται ως γινόμενο δύο συνεχών συναρτήσεων

$$\frac{f(g(x)) - f(g(\alpha))}{x - \alpha} \quad = \quad B(x)\Gamma(x)\ , \tag{4}$$

και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη στο α και η παράγωγός της στο α είναι ίση με

$$(f(g(x))'|_{x=\alpha} = f'(g(\alpha))g'(\alpha)\ .$$

Επίσης από τον χαρακτηρισμό του K αντιλαμβανόμαστε ότι για την εφαρμογή του κανόνα του L'Hospital απαιτείται μόνο παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων σε ένα μόνο σημείο : έστω οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμες στο σημείο α και έστω ότι $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$. Τότε από τον χαρακτηρισμό του K

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} \\ &= \frac{A(x)(x - \alpha)}{B(x)(x - \alpha)} \\ &= \frac{A(x)}{B(x)}\ , \end{aligned}$$

όπου $A(x)$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to\alpha} A(x) = f'(\alpha)$ και $B(x)$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x\to\alpha} B(x) = g'(\alpha)$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\alpha} \frac{A(x)}{B(x)} \\ &= \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \end{aligned}$$

εφόσον $g'(\alpha) \neq 0$. Στην απόδειξη αυτή διαφαίνεται ότι απαιτήθηκε μόνο η παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων στο σημείο που λαμβάνεται το όριο.

5. Η μορφή του θεωρήματος του Taylor όπως διατυπώθηκε από τον Young: Εάν η συνάρτηση f έχει παράγωγο n-τάξης στο σημείο a, $f^{(n)}(a)$, τότε η συνάρτηση

$$P(h) = \frac{f(a+h) - \Big(f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)\Big)}{h^n/n!}$$

θα έχει ως όριο:

$$\lim_{h\to 0} P(h) = f^{(n)}(a) \; .$$

Παρατηρήσεις

Πριν αποδείξουμε αυτήν την πρόταση προσέξτε ότι το μόνο που απαιτείται είναι η υπάρξη παραγώγου n-τάξης σε ένα μόνο σημείο. Βεβαίως δεδομένου οτι υπάρχει η παράγωγος $f^{(n)}(a)$ στο σημείο a, συμπεραίνεται ότι πρέπει να υπάρχει η παράγωγος $f^{(n-1)}(x)$ όχι μόνο στο σημείο a αλλά και σε μία περιοχή του a δεδομένου ότι είναι

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a) \; ,$$

και επί πλέον μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $f^{(n-1)}(x)$ είναι συνεχής στο σημείο a. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι όλες οι συναρτήσεις f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ ορίζονται σε μία περιοχή του a και επί πλέον επειδή ορίζεται η $f^{(n-1)}$ σε μία περιοχή του a θα είναι και συνεχής σε μία περιοχή του a. Συνεπώς η μεν $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής στο a ενώ οι f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n-2)}$ είναι συνεχείς σε μία περιοχή a. Προσέξτε: δεν μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η $f^{(n-1)}$ είναι συνεχής σε σημεία άλλα του a, βλέπε Άσκηση 8 του Κεφαλαίου 5 (που θυμίζω χρειάζεται επαναδιατύπωση).

Από την πρόταση αυτή έχουμε αμέσως ότι αν μία συνάρτηση f έχει παράγωγο n-τάξης στο σημείο a, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \varepsilon) \; ,$$

με $\varepsilon \to 0$ όταν $h \to 0$. Δηλαδή το υπόλοιπο $R_{n,f,a}$ του πολυωνύμου Taylor $T_{n,f,a}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$R_{n,f,a} = \frac{h^n}{n!}\varepsilon \; ,$$

και είναι τάξης ανώτερης από το h^n έτσι ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{n,f,a}}{h^n} = 0 \; .$$

Αυτή η μορφή βεβαίως του υπολοίπου δεν είναι χρήσιμη για να εκτιμήσουμε τι συμβαίνει στο υπόλοιπο συναρτήσει του n αν η συνάρτηση f είναι απείρως παραγωγίσιμη.

Η απόδειξη που παραθέτουμε ακολουθεί τον Burkill (A first course in mathematical analysis σελ. 80).

Απόδειξη: Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F_n(h) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{2!}f''(a) - \cdots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) \ ,$$

και τις συναρτήσεις

$$G_+(h) = F_n(h) - \frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(a) - \varepsilon) \ \ , \ \ G_-(h) = F_n(h) - \frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(a) + \varepsilon)$$

με $\varepsilon > 0$.

Θα είναι από τον ορισμό της $P(h)$:

$$F_n(h) = \frac{h^n}{n!}P(h) \ ,$$

και

$$G_+(h) = \frac{h^n}{n!}(P(h) - f^{(n)}(a) + \varepsilon) \ , \ G_-(h) = \frac{h^n}{n!}(P(h) - f^{(n)}(a) - \varepsilon) \ . \tag{5}$$

Οι $G_+(h)$, $G_-(h)$ είναι παραγωγίσιμες n φορές ως προς h στο σημείο 0 και είναι

$$G_+(0) = G'_+(0) = G''_+(0) = G_+^{(n-1)}(0) = 0 \ , \ G_-(0) = G'_-(0) = G''_-(0) = G_-^{(n-1)}(0) = 0 \ ,$$

ενώ

$$G_+^{(n)}(0) = \varepsilon \ \ , \ \ G_-^{(n)}(0) = -\varepsilon \ \ .$$

Εφόσον είναι $G_+^{(n)}(0) > 0$ θα υπάρχει περιοχή $(0,\delta)$ στην οποία η συνάρτηση $G_+^{(n-1)}$ θα είναι θετική, δηλαδή $G_+^{(n-1)}(h) > 0$ αν $h \in (0,\delta)$. Άρα εφόσον $G_+^{(n-1)}(h) > 0$ για κάποιο $h \in (0,\delta)$ θα είναι και $G_+^{(n-2)}(h) > 0$ δεδομένου

$$G_+^{(n-2)}(h) - G_+^{(n-2)}(0) = G_+^{(n-2)}(h) = G_+^{(n-1)}(\xi)h > 0 \ \ , 0 < \xi < h.$$

Επαναλαμβάνοντας καταλήγουμε ότι σε μία περιοχή $(0,\delta_1)$ θα είναι

$$G_+(h) > 0$$

Ομοίως συμπεραίνουμε ότι σε μία περιοχή $(0,\delta_2)$

$$G_-(h) < 0 \ \ .$$

Άρα από την (5) έχουμε για $h \in (0,\delta)$ όπου $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$:

$$-\varepsilon < P(h) - f^{(n)}(a) < \varepsilon \ .$$

και συνεπώς

$$\lim_{h\to 0} P(h) = f^{(n)}(a) \ .$$

6. Τώρα μπορούμε να αντιμετωπίσουμε την Άσκηση 6 και 7 του Κεφαλαίου 6

   Από το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε είναι

$$f(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(x_0)+\varepsilon)\ \ ,\ \ g(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}(g^{(n)}(x_0)+\varepsilon)\ ,$$

   με $\varepsilon \to 0$ όταν $h \to 0$, οπότε

$$\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0)+\varepsilon}{g^{(n)}(x_0)+\varepsilon}\ ,$$

   και

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)}{g(x_0+h)}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}\ ,$$

   Για την Άσκηση 7 επειδή

$$f(x_0+h)=\frac{h^n}{n!}(f^{(n)}(x_0)+\varepsilon)$$

   αν n άρτιος και $f^{(n)}(x_0)>0$ για h αρκούντως μικρό θα είναι

$$f(x_0+h)>f(x_0)\ ,$$

   και το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο.

7. Συχνά προσεγγίζουμε την πρώτη παράγωγο μιας συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο α με

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h}\ .$$

   Επειδή έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει η $f'(\alpha)$στο α σύμφωνα με το εδάφιο 6 θα είναι

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+h(f'(\alpha)+\varepsilon_1)\ \ ,\ \ f(\alpha-h)=f(\alpha)+h(f'(\alpha)+\varepsilon_2)\ ,$$

   με $\varepsilon_{1,2}\to 0$ καθώς $h\to 0$. Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}(f'(\alpha)+\varepsilon_1-\varepsilon_2)\\ &= f'(\alpha)\ .\end{aligned}$$

   Συνεπώς αν h είναι αρκούντως μικρό η παράγωγος στο σημείο α προσεγγίζεται από το $(f(\alpha+h)-f(\alpha-h))/(2h)$.

   Ομοίως προσεγγίζουμε τη δεύτερη παράγωγο στο σημείο α με

$$\frac{f(\alpha+h)-2f(\alpha)+f(\alpha-h)}{h^2}\ .$$

8. Η σύγκλιση του αναπτύγματος Taylor της $f(x) = (1+x)^p$ περί το $x = 0$, όπου τώρα ο p είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Αποδεικνύεται ότι το ανάπτυγμα συγκλίνει για $|x| < 1$. Η απόδειξη για $0 \leq x < 1$ είναι άμεση. Για $-1 < x \leq 0$ είναι κάπως περίπλοκη.

Είναι

$$f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n} \, ,$$

και το ανάπτυγμα Taylor n-τάξης περί το $x = 0$ με υπόλοιπο τύπου Lagrange είναι

$$\begin{aligned}(1+x)^p &= 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}x^n + \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{p-(n+1)}\end{aligned}$$

με $0 < \theta < 1$.

Εύκολα αποδεικνύεται τώρα ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για $n \to \infty$ αν $0 \leq x < 1$. Πράγματι όταν τελικά γίνει $n > p$ τότε αφενός

$$0 < (1+\theta x)^{p-n} < 1$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0 \, ,$$

όπως φαίνεται με το κριτήριο του λόγου. Συνεπώς το ανάπτυγμα Taylor συγκλινει όταν $0 \leq x < 1$.

Για να δειχθεί η σύγκλιση για $-1 < x < 1$ πρέπει να γίνει χρήση υπολοίπου τύπου Cauchy, το οποίο στην περίπτωση αυτή είναι:

$$R_n = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{(n+1)!}\frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1-p}}$$

με $0 < \theta < 1$, και υποθέτουμε ότι είναι $n > p$. Τώρα όταν $|x| < 1$ είναι

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1 \, .$$

Επίσης όταν $p > 1$ έχουμε την ανισότητα

$$(1+\theta x)^{p-1} < (1+|x|)^{p-1}$$

ενώ όταν $p < 1$ είναι

$$(1+\theta x)^{p-1} < (1-|x|)^{p-1}$$

$$|R_n| < |p|(1 \pm |x|)^{p-1}\frac{|(p-1)(p-2)\cdots(p-n)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}$$

το οποίο με το κριτήριο του λόγου αποδεικνύεται ότι τείνει στο μηδέν αν $|x| < 1$.

Το ανάπτυγμα είναι από τα πλέον σημαντικά στη Φυσική. Άσκηση: Γράψτε το ανάπτυγμα της $(1+x)^{-1/2}$.