ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Υποδείξεις για τη λύση των ασκήσεων 4 και 3 του Κεφ. 7

1. Άσκηση 4 του κεφαλαίου 7. Δείξτε αν $c > 0$ ότι $\sup(cf) = c\sup(f)$.

   Από τη μία έχω εξ'ορισμού ότι $f \leq \sup(f)$. Τότε πολλαπλασιάζοντας με τον θετικό $c > 0$ θα είναι επίσης $cf \leq c\sup(f)$. Που σημαίνει ότι το $c\sup(f)$ είναι ένα άνω φράγμα της cf και συνεπώς θα πρέπει να ισχύει ότι

   $$\sup(cf) \leq c\sup(f)\ , \tag{1}$$

   δεδομένου ότι το $\sup(cf)$ είναι το μικρότερο άνω φράγμα.

   Από την άλλη εξ'ορισμού $cf \leq \sup(cf)$. Τότε διαρώντας με τον θετικό $c > 0$ θα είναι επίσης

   $$f \leq \frac{1}{c}\sup(cf)\ ,$$

   που σημαίνει ότι και

   $$\sup(f) \leq \frac{1}{c}\sup(cf)\ ,$$

   ή ότι

   $$c\sup(f) \leq \sup(cf)\ , \tag{2}$$

   Συνεπώς από τις (1) και (2) συνάγεται ότι

   $$c\sup(f) = \sup(cf)\ .$$

   με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες παρόμοιες προτάσεις.

   Π.χ. η Άσκηση 3 του κεφαλαίου 7: δείξτε για δύο συναρτήσεις f και g ότι είναι

   $$\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f+g)\ .$$

   Πράγματι είναι εξ'ορισμού $\inf(f) \leq f$ και $\inf(g) \leq g$. Άρα προσθέτοντας έχουμε ότι

   $$\inf(f) + \inf(g) \leq f + g\ .$$

   Που σημαίνει ότι το $\inf(f) + \inf(g)$ είναι κατώτερο φράγμα του $f + g$ και συνεπώς θα πρέπει και πάλι εξ'ορισμού να είναι μικρότερο από το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του $f + g$, δηλαδή θα είναι

   $$\inf(f) + \inf(g) \leq \inf(f+g)\ .$$