Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 1ο Τεστ
29 Οκτωβρίου 2020

1. (**4 μον.**) Έστω $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών.

(**α**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(**β**) Αποδείξτε με επαγωγή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ανισότητα

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

2. (**4 μον.**) (**α**) Έστω A, B μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sup A = \inf B$.

(α-1) Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in A$ και κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$.

(α-2) Αποδείξτε επίσης ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ τέτοια ώστε $b - a < \varepsilon$.

(**β**) Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα:
«για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $a \leqslant b$.»

(β-1) Αποδείξτε ότι: για κάθε $a \in A$ ισχύει $a \leqslant \sup B$.

(β-2) Χρησιμοποιώντας το (β-1) αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

3. (**4 μον.**) (**α**) Δίνεται το εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}$:

$$K = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0 \text{ και } 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}.$$

Να βρείτε το $\sup K$ και το $\inf K$ (χωρίς αιτιολόγηση). Έχει το K ελάχιστο στοιχείο; Έχει το K μέγιστο στοιχείο;

(**β**) Δίνεται το σύνολο

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} : n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αποδείξτε ότι $\inf \Lambda = 0$, χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum.

Σύντομες απαντήσεις

1 (α) Ελέγχουμε πρώτα ότι η ταυτότητα ισχύει για $n=1$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ ισχύει
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1},$$
και γράφουμε
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

1 (β) Ελέγχουμε πρώτα ότι η ανισότητα ισχύει για $n=1$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι για κάποιον $n\in\mathbb{N}$ ισχύει
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 2-\frac{1}{n},$$
και γράφουμε
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}.$$
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι
$$2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant 2-\frac{1}{n+1},$$
ή, ισοδύναμα, ότι
$$\frac{1}{(n+1)^2}\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$
Όμως,
$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>\frac{1}{(n+1)^2},$$
άρα έχουμε το ζητούμενο.

2 (α) Έχουμε υποθέσει ότι $\sup A=\inf B$. Για το (α-1) θεωρούμε τυχόντα $a\in A$ και $b\in B$. Έχουμε ότι $a\leqslant\sup A$ και $\inf B\leqslant b$, άρα $a\leqslant\sup A=\inf B\leqslant b$, που μας δίνει ότι $a\leqslant b$.

Για το (α-2) θεωρούμε τυχόν $\varepsilon>0$ και χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του supremum και του infimum για τον θετικό αριθμό $\varepsilon/2$ βρίσκουμε $a\in A$ ώστε $\sup A<a+\varepsilon/2$ και $b\in B$ ώστε $\inf B>b-\varepsilon/2$. Τότε, $b-\varepsilon/2<\inf B=\sup A<a+\varepsilon/2$, άρα $b-\varepsilon/2<a+\varepsilon/2$ και έπεται ότι $b-a<\varepsilon$.

2 (β) Για το (β-1) θεωρούμε τυχόν $a\in A$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση επιλέγουμε $b\in B$ (προσοχή, το οποίο εξαρτάται από το a) τέτοιο ώστε $a\leqslant b$. Όμως (όποιο κι αν είναι αυτό το b) έχουμε $b\leqslant\sup B$, άρα $a\leqslant b\leqslant\sup B$ και έπεται ότι $a\leqslant\sup B$.

Για το (β-2) παρατηρούμε ότι στο (β-1) δείξαμε ότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A: για κάθε $a\in A$ δείξαμε ότι $a\leqslant\sup B$. Αφού ο $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, έπεται ότι $\sup A\leqslant\sup B$.

3 (α) Έχουμε $x\in K$ αν και μόνο αν $x\in\mathbb{Q}$, $x\geqslant 0$ και $1<x^2\leqslant 3$, δηλαδή αν και μόνο αν $x\in\mathbb{Q}$ και $1<x\leqslant\sqrt{3}$. Αφού ο $\sqrt{3}$ είναι άρρητος, δεν μπορούμε να έχουμε $x=\sqrt{3}$, άρα τελικά
$$K=\{x\in\mathbb{Q}:1<x<\sqrt{3}\}.$$
Τώρα, μπορούμε να εξηγήσουμε (χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$) ότι $\inf K=1$ και $\sup K=\sqrt{3}$. Αφού, οι $\inf K$ και $\sup K$ δεν ανήκουν στο K, το K δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

3 (β) Για κάθε $n,m\in\mathbb{N}$ έχουμε $\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}>0$, άρα ο 0 είναι κάτω φράγμα του Λ. Δείχνουμε ότι $\inf\Lambda=0$ χρησιμοποιώντας τον ε-χαρακτηρισμό του infimum. Έστω $\varepsilon>0$. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα μπορούμε να βρούμε $n\in\mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$. Τότε, ο $x=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\in\Lambda$ και
$$x=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}\leqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=0+\varepsilon.$$
Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $0=\inf\Lambda$.