Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 2ο Τεστ – Ομάδα Α′

11 Νοεμβρίου 2020

1. (**4 μον.**) **(α)** Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$\alpha_n = \frac{n!}{n^n}, \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\text{ημ}(n^2), \qquad \gamma_n = \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \cdots + n^4}.$$

(β) Έστω y θετικός πραγματικός αριθμός. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \frac{[y] + [2y] + \cdots + [ny]}{n^2}$$

όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του x. Αποδείξτε ότι $a_n \to \frac{y}{2}$.

2. (**4 μον.**) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(α) Αν $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt[n]{\alpha_n} \to 1$.

(β) Αν $\beta_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\beta_n \to \beta > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $\beta_n > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ) Αν $\gamma_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\gamma_n \to \gamma > 0$ τότε $\sqrt[n]{\gamma_n} \to 1$.

3. (**4 μον.**) **(α)** Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών τέτοια ώστε $q_n \to x$.

(β) Ορίζουμε μια ακολουθία (x_n) με $1 < x_1 < 3$ και

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 3}{4}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Εξετάστε αν η (x_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό και, αν ναι, βρείτε το $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Σύντομες απαντήσεις

1 (α) Για την (α_n) εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}=\frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}<1,$$

άρα $\alpha_n\to 0$.

Προσοχή: Το γεγονός ότι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}<1$ δεν φτάνει για να επικαλεστούμε το κριτήριο του λόγου. Πρέπει να βρούμε το όριο της $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ και να το συγκρίνουμε με το 1. Για παράδειγμα, αν (α_n) είναι οποιαδήποτε γνησίως φθίνουσα ακολουθία με θετικό όριο, π.χ. η $\alpha_n=1+\frac{1}{n}$ που συγκλίνει στο 1, έχουμε $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}<1$ για κάθε n αλλά δεν έχουμε $\alpha_n\to 0$.

Για την (β_n) παρατηρούμε ότι $|\beta_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}|\eta\mu(n^2)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$, άρα $\beta_n\to 0$.

Για την (γ_n) παρατηρούμε ότι $1\leqslant 1^4+2^4+\cdots+n^4\leqslant n\cdot n^4=n^5$, άρα

$$1\leqslant\gamma_n\leqslant\sqrt[n]{n^5}=(\sqrt[n]{n})^5$$

και από το γνωστό όριο $\sqrt[n]{n}\to 1$ βλέπουμε ότι εφαρμόζεται το κριτήριο παρεμβολής και έχουμε $\gamma_n\to 1$.

1 (β) Χρησιμοποιούμε την $x-1<[x]\leqslant x$ για τους $y,2y,\dots,ny$ και έχουμε

$$\frac{1}{n^2}\Big((y-1)+(2y-1)+\cdots+(ny-1)\Big)\leqslant a_n\leqslant\frac{1}{n^2}\Big(y+2y+\cdots+ny\Big)$$

και αφού $y+2y+\cdots+ny=(1+2+\cdots+n)y=\frac{n(n+1)}{2}y$ παίρνουμε

$$\frac{n(n+1)}{2n^2}y-\frac{1}{n}\leqslant a_n\leqslant\frac{n(n+1)}{2n^2}y.$$

Από την $\frac{n(n+1)}{2n^2}\to\frac{1}{2}$, την $\frac{1}{n}\to 0$ και το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $a_n\to\frac{y}{2}$.

2 (α) Δεν ισχύει: για την $\alpha_n=\frac{1}{n^n}$ έχουμε $\alpha_n>0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\alpha_n\to 0\in\mathbb{R}$ αλλά $\sqrt[n]{\alpha_n}=\frac{1}{n}\to 0\neq 1$.

2 (β) Ισχύει: παίρνουμε $\varepsilon=\beta/2>0$ και αφού $\beta_n\to\beta$ βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|\beta_n-\beta|<\beta/2$ για κάθε $n\geqslant n_0$, απ' όπου παίρνουμε $\beta_n>\beta/2$ για κάθε $n\geqslant n_0$. Αν ορίσουμε $\delta=\frac{1}{2}\min\{\beta/2,\beta_1,\dots,\beta_{n_0}\}$ τότε βλέπουμε ότι $\delta>0$ και $\beta_n>\delta$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

2 (γ) Ισχύει: όπως και στο (β) βρίσκουμε $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\gamma/2<\gamma_n<3\gamma/2$ για κάθε $n\geqslant n_0$, άρα $\sqrt[n]{\frac{\gamma}{2}}<\sqrt[n]{\gamma_n}<\sqrt[n]{\frac{3\gamma}{2}}$ για κάθε $n\geqslant n_0$. Γνωρίζουμε ότι $\sqrt[n]{\frac{\gamma}{2}}\to 1$ και $\sqrt[n]{\frac{3\gamma}{2}}\to 1$, οπότε το κριτήριο παρεμβολής μας δίνει ότι $\sqrt[n]{\gamma_n}\to 1$.

3 (α) Έστω $x\in\mathbb{R}$. Από την πυκνότητα των ρητών στο $\mathbb{R}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $q_n\in\mathbb{Q}$ ώστε $x-\frac{1}{n}<q_n<x+\frac{1}{n}$. Αφού $x-\frac{1}{n}\to x$ και $x+\frac{1}{n}\to x$, από το κριτήριο παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $q_n\to x$.

3 (β) Δείχνουμε επαγωγικά ότι $1<x_n<3$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έχουμε $1<x_1<3$ και αν $1<x_n<3$ τότε

$$1=\frac{1^2+3}{4}<x_{n+1}=\frac{x_n^2+3}{4}<\frac{3^2+3}{4}=3.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η (x_n) είναι φθίνουσα: για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n^2+3}{4}-x_n=\frac{x_n^2-4x_n+3}{4}=\frac{(x_n-1)(x_n-3)}{4}<0$$

διότι $x_n-1>0$ και $x_n-3<0$.

Αφού η (x_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον $x\in\mathbb{R}$. Τότε, $x_{n+1}\to x$ και $x_{n+1}=\frac{x_n^2+3}{4}\to\frac{x^2+3}{4}$, άρα $x=\frac{x^2+3}{4}$. Έπεται ότι $x=1$ ή $x=3$, και αφού $x<x_1<3$ συμπεραίνουμε ότι $x=1$.