

Ανάλυση Ι και Εφαρμογές – 3ο Τεστ – Ομάδα Β'

30 Νοεμβρίου 2020

1. (4 μον.) (α) Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει κάθε μία από τις παρακάτω σειρές:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin k}{k}\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[k]{k} - 1\right)^k, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^4}{4^k}.$$

(β) Εξετάστε για ποιες τιμές του $a > 0$ συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k^a}.$$

2. (4 μον.) Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αν είναι αληθής αποδείξτε την και αν είναι ψευδής δώστε αντιπαράδειγμα.

(i) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k}$ συγκλίνει.

(ii) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και $k^2 a_k \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(iii) Αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η ακολουθία $s_n = a_1 + \dots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

3. (4 μον.) (α) Αποδείξτε ότι αν $a_k \in \mathbb{R}$ και η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3$ συγκλίνει απολύτως.

(β) Προσδιορίστε το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τους οποίους συγκλίνει η δυναμοσειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}.$$