Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 3: Σειρές πραγματικών αριθμών

Α΄ Ομάδα

1. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας).

(α) Αν $a_k \to 0$ τότε η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη.

(β) Αν η ακολουθία $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ είναι φραγμένη τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(γ) Αν $|a_k| \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως.

(δ) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(ε) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

(στ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(ζ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to +\infty$, τότε η η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(η) Αν $a_k \to 0$, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ συγκλίνει.

(ϑ) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k}$ συγκλίνει.

(ι) Αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

(ια) Αν $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει.

2. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}{k!}$ συγκλίνει.

3. Εξετάστε για ποιές τιμές του p συγκλίνει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k(1+k^2)^p$.

4. Δείξτε ότι

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+3^k}{6^k} = \frac{3}{2}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} = 1$.

5. Υπολογίστε το άθροισμα της σειράς $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

6. Εφαρμόστε τα κριτήρια λόγου **και** ρίζας στις ακόλουθες σειρές:

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^k x^k$ (β) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ (γ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ (δ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^3 x^k$

(ε) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k^2}$ (ζ) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} x^k$ (η) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} x^k}{k!}$.

Αν για κάποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ κανένα από αυτά τα δύο κριτήρια δεν δίνει απάντηση, εξετάστε τη σύγκλιση ή απόκλιση της σειράς με άλλο τρόπο.

7. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ (β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

(γ) $a_k = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{k}$ (δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$.

8. Εξετάστε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

9. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές. Όπου εμφανίζονται οι παράμετροι $p, q, x \in \mathbb{R}$ να βρεθούν οι τιμές τους για τις οποίες οι αντίστοιχες σειρές συγκλίνουν.

(α) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$ (β) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k k^p$ $(0 < p)$ (γ) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^p - k^q}$ $(0 < q < p)$

(δ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$ (ε) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p^k - q^k}$ $(0 < q < p)$ (στ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^k}$

(ζ) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^p \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$.

Β′ Ομάδα

10. Εξετάστε αν συγκλίνει ή αποκλίνει καθεμία από τις παρακάτω σειρές:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10}}{10^k}$, (β) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, (γ) $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-\sqrt{k}}{k^2+1}$, (ε) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, (στ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$

(ζ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k+k}$, (η) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, (ϑ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$.

11. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_k) ως εξής: αν ο k είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k}$ και αν ο k δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού θέτουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

12. Έστω $\{a_k\}$ φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0. Ορίζουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k.$$

Δείξτε ότι $0 \leqslant (-1)^n (s - s_n) \leqslant a_{n+1}$.

13. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει τότε $k a_k \to 0$.

14. Έστω ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, δείξτε ότι οι

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2}{1+a_k^2}$$

συγκλίνουν επίσης.

15. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$ συγκλίνει. Δείξτε ότι, αν η $\{a_k\}$ είναι φθίνουσα, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

16. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_k}}{k}$ συγκλίνει.

17. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ συγκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει απολύτως.

18. Έστω (a_k) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ συγκλίνει και αν $p > 1/2$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^p}$ συγκλίνει απολύτως.

19. Προσδιορίστε τις τιμές των a, b, c για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{a^k}{k^b (\ln k)^c}.$$

20. Προσδιορίστε τις τιμές των $a, b, c > 0$ για τις οποίες συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^a \sin\left(\frac{1}{k^b}\right) \cos\left(\frac{1}{k^c}\right).$$

21. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim\limits_{k\to\infty} a_k > 1$. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{a_k}}$$

συγκλίνει.

22. Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η (a_n) συγκλίνει.

23. Έστω $(a_k), (b_k)$ δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι: αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και αν η (b_k) είναι μονότονη και φραγμένη, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

24. Έστω (a_k), (b_k) δύο ακολουθίες. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει και η $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει, δείξτε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει.

25. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ φραγμένη ακολουθια. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

26. Έστω $(a_k)_{k\geqslant 0}$ ακολουθια πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ισούται με 1.

Γ΄ Ομάδα

27. Υποθέτουμε ότι $a_k \geqslant 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)} = 1.$$

28. Έστω (a_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $a_k \to 0$. Δείξτε ότι: αν η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{a_k, \frac{1}{k}\right\} = +\infty.$$

29. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει. Θέτουμε $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(α) Δείξτε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,

$$\frac{a_{m+1}}{s_{m+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} \geqslant 1 - \frac{s_m}{s_n}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k}$ αποκλίνει.

(γ) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{s_n^2} \leqslant \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s_k^2}$ συγκλίνει.

30. Υποθέτουμε ότι $a_k > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Θέτουμε $r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$.

(α) Δείξτε ότι: για $1 \leqslant m < n$,

$$\frac{a_m}{r_m} + \cdots + \frac{a_n}{r_n} \geqslant 1 - \frac{r_{n+1}}{r_m}$$

και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{r_k}$ αποκλίνει.

(β) Δείξτε ότι $\frac{a_n}{\sqrt{r_n}} < 2\left(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}\right)$ και συμπεράνατε ότι η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$ συγκλίνει.

31. Έστω (a_k) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει τότε και η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k$ αποκλίνει.

32. Έστω (a_k) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε και η $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^{\frac{k}{k+1}}$ συγκλίνει.