Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 4: Συνέχεια και όρια συναρτήσεων

Α΄ Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) = 1$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ισχύει $f(x) > \frac{4}{5}$.

(β) Η $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι συνεχής.

(γ) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τις: $f(x) = 0$ αν $x \in \mathbb{N}$ και $f(x) = 1$ αν $x \notin \mathbb{N}$, είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν $x_0 \notin \mathbb{N}$.

(δ) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ε) Υπάρχει $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι ασυνεχής στα σημεία $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ και συνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(στ) Υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο 0 και ασυνεχής σε όλα τα άλλα σημεία.

(ζ) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε κάθε άρρητο x, τότε είναι συνεχής σε κάθε x.

(η) Αν η f είναι συνεχής στο (a, b) και $f(q) = 0$ για κάθε ρητό $q \in (a, b)$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

(ϑ) Αν $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η f είναι ασυνεχής στο σημείο 0.

(ι) Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και $f(0) = -f(1)$ τότε υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

(ια) Αν η $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (a, b).

(ιβ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ τότε η f είναι φραγμένη στο $[a, b]$.

(ιγ) Αν $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ τότε $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \sin \frac{1}{x} = 0$.

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$.
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] - [nx]$$

είναι περιοδική με περίοδο $1/n$. Δηλαδή, $f\big(x + \frac{1}{n}\big) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) Υπολογίστε την τιμή $f(x)$ όταν $0 \leqslant x < 1/n$.
(γ) Δείξτε την ταυτότητα

$$[nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

3. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M \geqslant 0$ ώστε $|f(x) - f(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$, για κάθε $x \in X$ και $y \in X$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

4. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με $|f(x)| \leqslant |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(β) Δώστε παράδειγμα μιας τέτοιας f που να είναι ασυνεχής σε κάθε $x \neq 0$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και έστω $a_1 \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $a_{n+1} = f(a_n)$ για $n = 1, 2, \ldots$. Αν $a_n \to a \in \mathbb{R}$ τότε $f(a) = a$.

6. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι:

(α) Αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(β) Αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) = g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

(γ) Αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$, τότε $f(y) \leqslant g(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

7. Έστω $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$\frac{\alpha}{x-\lambda} + \frac{\beta}{x-\mu} + \frac{\gamma}{x-\nu} = 0$$

έχει τουλάχιστον μία ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν).

8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δείξτε ότι

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+a} - \sqrt{x}\right) = \frac{a}{2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

9. Εξετάστε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια και, αν ναι, υπολογίστε τα.

$$\text{(α)} \quad \lim_{x\to 2} \tfrac{x^3-8}{x-2}, \qquad \text{(β)} \quad \lim_{x\to x_0} [x], \qquad \text{(γ)} \quad \lim_{x\to x_0} (x - [x]).$$

10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \text{ ρητός} \\ -x & \text{αν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ και ότι αν $x_0 \neq 0$ τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

11. Εξετάστε αν είναι συνεχείς οι ακόλουθες συναρτήσεις:

(α) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

(β) $f_k : [-1, 0] \to \mathbb{R}$ με $f_k(x) = \begin{cases} x^k \sin\frac{1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

(γ) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x^2} & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

12. Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(α) Δείξτε ότι αν $f(x) \leqslant g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(β) Δώστε ένα παράδειγμα όπου $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ενώ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

13. Έστω $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ ένα σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να είναι φραγμένη στο $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$ και ότι $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

14. Έστω $f : [a, b] \to [a, b]$ συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι υπάρχει $x \in [a, b]$ με $f(x) = x$.

15. Έστω $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: $f(x) = x^2$ για κάθε ρητό $x \in (0, 1)$. Να βρεθεί το $f\big(\frac{\sqrt{2}}{2}\big)$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

16. Έστω $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ με $f(x + 1) = f(x)$.

17. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f(0) = f(1)$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \big[0, 1 - \frac{1}{n}\big]$ ώστε $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$.

18. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2 \in [a, b]$. Δείξτε ότι για κάθε $t \in [0, 1]$ υπάρχει $y_t \in [a, b]$ ώστε

$$f(y_t) = tf(x_1) + (1 - t)f(x_2).$$

19. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε

$$f(y) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Β′ Ομάδα

20. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^3 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ είναι συνεχής μόνο στα σημεία $-1, 0, 1$.

21. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει $|f(x)| = 1$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

22. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $g \equiv f$ ή $g \equiv -f$ στο $[a, b]$.

23. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) \in \mathbb{Q}$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση.

24. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi > 0$ ώστε $f(x) \geqslant \xi$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Ισχύει το συμπέρασμα αν αντικαταστήσουμε το διάστημα $[a, b]$ με το διάστημα $(a, b]$;

25. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που ικανοποιούν την $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $f(x) > g(x) + \rho$ για κάθε $x \in [a, b]$.

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής σε κάθε σημείο του $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει $y \in [a, b]$ ώστε $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = 0$.

27. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $\max(f) < \max(g)$.

28. Έστω $f, g : [a,b] \to [c,d]$ συνεχείς και επί συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

29. Δείξτε ότι αν $a, b > 0$ τότε

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] = \frac{b}{a} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right] = 0.$$

Τι γίνεται όταν $x \to 0^-$;

30. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ και 0 αλλιώς. Εξετάστε αν υπάρχει το $\lim_{x \to 0} f(x)$.

31. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

32. Έστω $P(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$ πολυώνυμο με την ιδιότητα $a_0 a_m < 0$. Δείξτε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει θετική πραγματική ρίζα.

33. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο: υπάρχει ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός x_0 για τον οποίο

$$f(x_0) = x_0.$$

34. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή: υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ ώστε $f(y) \geqslant f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

35. (α) Έστω $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ δείξτε ότι η g διατηρεί πρόσημο: ή $g(x) > 0$ για κάθε $x \geqslant 0$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \geqslant 0$.

(β) Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Αν $f(x) \neq x$ για κάθε $x \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

36. Υποθέτουμε ότι η $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή, δηλαδή ότι υπάρχει $x_0 \in [a, +\infty)$ με $f(x) \geqslant f(x_0)$ για κάθε $x \in [a, +\infty)$.

37. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \alpha$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha$, τότε η f παίρνει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή.

38. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

39. Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση γνησίως αύξουσα και συνεχής. Δείξτε ότι

$$f((\alpha,\beta)) = (\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)).$$

40. Έστω $a\in[0,\pi]$. Ορίζουμε ακολουθία με $a_1=a$ και $a_{n+1}=\sin(a_n)$. Δείξτε ότι $a_n\to 0$.

41. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_n\in[0,1]$ ώστε $f(x_n)\to 0$. Τότε, υπάρχει $x_0\in[0,1]$ ώστε $f(x_0)=0$.

42. Έστω $f,g:I\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Δείξτε ότι

(α) η $f+g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

(β) η $f\cdot g$ δεν είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα συνεχής στο I, αν όμως οι f,g υποτεθούν και φραγμένες τότε η $f\cdot g$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I.

43. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $M=M(\varepsilon)>0$ ώστε αν $|x|\geqslant M$ τότε $|f(x)|<\varepsilon$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

44. Έστω $a\in\mathbb{R}$ και $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

45. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν $A,B>0$ ώστε $|f(x)|\leqslant A|x|+B$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

46. Έστω $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^n$, $x\in\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

47. (α) Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $a>0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,+\infty)$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

(β) Δείξτε ότι η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,+\infty)$.

48. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

(α) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=3x+1$.

(β) $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}$.

(γ) $f:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}\sin^2 x$.

(δ) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

(ε) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$.

(στ) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.

(ζ) $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{\cos(x^3)}{x}$.

(η) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$.

(ϑ) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$.

(ι) $f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

(ια) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x\sin x$.

(ιβ) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{x+1}$.

Γ΄ Ομάδα

49. Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια *συνεχής* συνάρτηση με $f(1) = \alpha$, η οποία ικανοποιεί την $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, τότε:

(α) $f(n) = n\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) $f(\frac{1}{m}) = \frac{\alpha}{m}$ για κάθε $m = 1, 2, \ldots$.

(γ) $f(x) = \alpha x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Μελετήστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}\,(p, q) = 1. \end{cases}$$

51. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι $f(x/2) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

52. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\frac{m}{2^n}) = 0$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

53. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $f(x) = f\big(x + \frac{1}{n}\big)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

54. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε $A = \{x \in [a, b] : f(x) = 0\}$. Αν $A \neq \emptyset$, δείξτε ότι $\sup A \in A$ και $\inf A \in A$.

55. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T > 0$: δηλαδή, $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = f(x + \sqrt{2})$.

56. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $a < b$ και ακολουθίες (x_n), (y_n) στο $[0, +\infty)$ με $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$ και $f(x_n) \to a$, $f(y_n) \to b$. Δείξτε ότι: για κάθε $c \in (a, b)$ υπάρχει ακολουθία (z_n) στο $[0, +\infty)$ με $z_n \to +\infty$ και $f(z_n) \to c$.

57. Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε *μονότονη* ακολουθία (x_n) σημείων του (a, b) με $x_n \to x_0$ ισχύει $f(x_n) \to f(x_0)$.

58. (α) Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f\,(a + t_n) = L$ για κάθε γνησίως φθίνουσα ακολουθία (t_n) με $t_n \to 0$, τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

(β) Σωστό ή λάθος; Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Αν $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) = L$ τότε $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

59. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάποιο $x_0 \in (a, b)$. Δείξτε ότι το $f(x_0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του $f([a, b])$.

60. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f είναι επί.

61. Έστω $f, g : [0,1] \to [0,1]$ συνεχείς συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα και $g \circ f = f \circ g$. Δείξτε ότι οι f και g έχουν κοινό σταθερό σημείο: υπάρχει $y \in [0,1]$ ώστε $f(y) = y$ και $g(y) = y$. [*Υπόδειξη:* Ξέρουμε ότι υπάρχει $x_1 \in [0,1]$ με $g(x_1) = x_1$. Αν ισχύει και η $f(x_1) = x_1$, έχουμε τελειώσει. Αν όχι, θεωρήστε την ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, δείξτε ότι είναι μονότονη και ότι όλοι οι όροι της είναι σταθερά σημεία της g. Το όριό της θα είναι κοινό σταθερό σημείο των f και g (γιατί;).]

62. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x_0 \in [a,b]$ υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Τότε, η f είναι φραγμένη.