Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 7: Ολοκλήρωμα Riemann

Α΄ Ομάδα

1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a,b]$ ώστε $f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

(στ) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή.

(ζ) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f,P) = U(f,P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(η) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leqslant 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

4. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

5. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

6. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

7. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

8. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

9. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

10. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

11. Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

12. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0, 1]$ με τυχόν διάστημα $[a, b]$;

13. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

14. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

15. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a, b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b);

16. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx=1$. Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx=\frac{1}{n}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

17. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx=\frac{f(s)}{3}.$$

18. Υποθέτουμε ότι η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

19. Έστω $f,h:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x)=\int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x)=h(f(x))\cdot f'(x)$.

20. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta>0$. Ορίζουμε

$$g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

21. Έστω $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x)=\int_{h(x)}^{g(x)} t^2dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

22. Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε

$$F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt.$$

Βρείτε την F'.

Β′ Ομάδα

23. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n=\int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n\to f(0)$.

24. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\int_1^n\frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

25. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

για κάθε $x, y \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

26. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)|dt$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

27. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2 f(x)dx = a^2.$$

28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

30. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

31. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x \in [0,a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt \right) du.$$

32. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

33. Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = xf(x).$$

34. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

35. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2\int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \geqslant 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geqslant 0$.

36. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx) dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx) dx = 0.$$

37. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n = \int_0^\pi \sin(nx) dx \quad \text{και} \quad b_n = \int_0^\pi |\sin(nx)| dx.$$

38. Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g, h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε $f = g - h$.

Γ′ Ομάδα

39. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

40. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\, dt \leqslant \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

41. Έστω $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\, dt.$$

Δείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x f(t)(x-t)^{k-1}dt.$$

42. Έστω $f:[0,\infty)\to(0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\,dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

43. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με $f(a)=f(b)=0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2dx = 1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b xf(x)f'(x)\,dx = -\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2[f(x)]^2\,dx\right)\left(\int_a^b [f'(x)]^2dx\right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

44. Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_a^b\left[\int_a^b (f(y)-f(x))(g(y)-g(x))\,dy\right]dx\\ &= (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

45. Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)\,dx.$$

46. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = 0.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = f(1).$$

47. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$