Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 1: Το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Ερωτήσεις κατανόησης

Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leqslant \sup A$.

(β) Έστω A μη κενό, άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ο $x \in \mathbb{R}$ είναι άνω φράγμα του A αν και μόνο αν $\sup A \leqslant x$.

(γ) Αν το A είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $\sup A \in A$.

(δ) Αν A είναι ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τότε $\sup A \in A$.

(ε) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x \leqslant a$.

(στ) Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $x \in A$ με $a - \varepsilon < x < a$.

(ζ) Αν το A είναι μη κενό και $\sup A - \inf A = 1$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ ώστε $x - y = 1$.

(η) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x < y$ υπάρχουν άπειροι το πλήθος $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$.

Υπόδειξη. (α) *Σωστό.* Ο $\sup A$ είναι εξ ορισμού άνω φράγμα του A. Συνεπώς, για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \leqslant \sup A$.

(β) *Σωστό.* Αν ο x είναι άνω φράγμα του A τότε $\sup A \leqslant x$ από τον ορισμό του $\sup A$: ο $\sup A$ είναι το *μικρότερο* άνω φράγμα του A. Αντίστροφα, αν $\sup A \leqslant x$ τότε για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leqslant \sup A \leqslant x$, δηλαδή ο x είναι άνω φράγμα του A.

(γ) *Λάθος.* Το $A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, όμως $\sup A = 1 \notin A$.

(δ) *Σωστό.* Έστω A ένα μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$. Από το αξίωμα της πληρότητας, υπάρχει το $a = \sup A \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι $a \in A$: από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - 1 < x$. Αν $a \notin A$, τότε $x < a$. Αυτό σημαίνει ότι ο x δεν είναι άνω φράγμα του A, οπότε, εφαρμόζοντας πάλι τον χαρακτηρισμό του supremum, βρίσκουμε $y \in A$ ώστε $a - 1 < x < y < a$. Έπεται ότι $0 < y - x < 1$. Αυτό είναι άτοπο, διότι οι x και y είναι ακέραιοι.

(ε) *Σωστό.* Αν $a = \sup A$ και $\varepsilon > 0$, από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $x \in A$ ώστε $a - \varepsilon < x$. Από την άλλη πλευρά, ο a είναι άνω φράγμα του A και $x \in A$. Συνεπώς, $x \leqslant a$.

(στ) *Λάθος.* Πάρτε, για παράδειγμα, $A = \{1, 2\}$. Τότε, $\sup A = 2$. Αν όμως πάρουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$, τότε δεν υπάρχει $x \in A$ που να ικανοποιεί την $\frac{3}{2} < x < 2$.

(ζ) *Λάθος.* Πάρτε, για παράδειγμα, $A = (0,1)$. Τότε, $\sup A - \inf A = 1 - 0 = 1$. Αν όμως $x, y \in (0,1)$ τότε $0 < x < 1$ και $-1 < -y < 0$, άρα $-1 < x - y < 1$. Δηλαδή, για κάθε $x, y \in (0,1)$ έχουμε $x - y \neq 1$.

(η) *Σωστό.* Έστω A το σύνολο όλων των $r \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιούν την $x < r < y$ (γνωρίζετε ότι το A είναι μη κενό). Ας υποθέσουμε ότι το A έχει πεπερασμένα το πλήθος στοιχεία, τα $r_1 < \cdots < r_m$.

Έχουμε $x < r_1$, άρα υπάρχει ρητός r_* που ικανοποιεί την $x < r_* < r_1$. Όμως τότε, $x < r_* < y$ και $r_* \notin \{r_1, \dots, r_m\}$ (άτοπο).

Επαγωγή

1. Να δειχθεί με επαγωγή ότι ο αριθμός $n^5 - n$ είναι πολλαπλάσιο του 5 για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέστε ότι για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ ο $m^5 - m$ είναι πολλαπλάσιο του 5 και γράψτε

$$(m+1)^5 - (m+1) = (m^5 - m) + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m.$$

2. Εξετάστε για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού n ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:
(i) $2^n > n^3$, (ii) $2^n > n^2$, (iii) $2^n > n$, (iv) $n! > 2^n$, (v) $2^{n-1} \leqslant n^2$.

Υπόδειξη. (ii) Μερικές δοκιμές θα σας πείσουν ότι η $2^n > n^2$ ισχύει για $n = 1$, δεν ισχύει για $n = 2, 3, 4$ και (μάλλον) ισχύει για κάθε $n \geqslant 5$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η $2^n > n^2$ ισχύει για κάθε $n \geqslant 5$: για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι η $2^m > m^2$ ισχύει για κάποιον $m \geqslant 5$. Τότε,

$$2^{m+1} > 2m^2 > (m+1)^2$$

αν ισχύει η ανισότητα

$$1 + 2m < m^2.$$

Όμως, αφού $m \geqslant 5$, έχουμε

$$1 + 2m < m + 2m = 3m < m^2.$$

(iv) Αποδείξτε με επαγωγή ότι $n! > 2^n$ για κάθε $n \geqslant 4$. Ελέγξτε ότι $n! \leqslant 2^n$ αν $n = 1, 2, 3$.

(v) Αποδείξτε με επαγωγή ότι $2^{n-1} > n^2$ για κάθε $n \geqslant 7$. Ελέγξτε ότι $2^{n-1} \leqslant n^2$ αν $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

3. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Αν $0 < a < b$, αποδείξτε ότι

$$na^{n-1} \leqslant \frac{b^n - a^n}{b - a} \leqslant nb^{n-1}.$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέστε ότι

$$a^m - b^m = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right)$$

για κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned} a^{m+1} - b^{m+1} &= (a-b)a^m + b(a^m - b^m) \\ &= (a-b)a^m + (a-b)b\left(\sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k}\right) \\ &= (a-b)\left(a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-1-k} b\right) \\ &= (a-b)\left(a^m + \sum_{k=0}^{m-1} a^k b^{m-k}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{m} a^k b^{m-k}\right). \end{aligned}$$

Αν $0 < a < b$, τότε $a^{n-1} \leqslant a^k b^{n-1-k} \leqslant b^{n-1}$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Άρα,

$$na^{n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = \frac{b^n - a^n}{b-a} \leqslant nb^{n-1}.$$

4. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύουν οι ανισότητες

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$$

και

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $1 \geqslant 2\sqrt{2} - 2$, δηλαδή $\sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2}$ που ισχύει διότι $2 \leqslant 9/4 = (3/2)^2$.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geqslant 1$ έχουμε $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant 2\sqrt{k+1} - 2$ και θα δείξουμε ότι

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant 2\sqrt{k+2} - 2.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant 2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{k+1} - 2 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geqslant 2\sqrt{k+2} - 2$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Όμως, πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας με τη συζυγή παράσταση βλέπουμε ότι

$$2(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}) = \frac{2}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

(β) Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ανισότητα $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{4}}$, η οποία ισχύει ως ισότητα.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιον $k \geqslant 1$ έχουμε $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$ και θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2},$$

συνεπώς (εξηγήστε γιατί) αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{3k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3k+4}}$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $1 + \frac{3}{3k+1} = \frac{3k+4}{3k+1} \leqslant \left(\frac{2k+2}{2k+1}\right)^2 = \frac{4k^2+8k+4}{4k^2+4k+1} = 1 + \frac{4k+3}{4k^2+4k+1}$. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $3(4k^2 + 4k + 1) \leqslant (3k+1)(4k+3)$. Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την $12k^2 + 12k + 3 < 12k^2 + 13k + 3$, η οποία ισχύει αφού $k > 0$.

5. Έστω $m \geqslant 1$ φυσικός αριθμός. Αποδείξτε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι εδώ το m είναι τυχόν αλλά σταθερό. Για $n = 1$ ζητάμε να ισχύει η ισότητα $1 \cdot 2 \cdots m = \frac{1 \cdot 2 \cdots m \cdot (m+1)}{m+1}$, η οποία ισχύει.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}$$

και θα δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)\cdots(k+m-1) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)\cdot(n+m+1)}{m+1}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)\cdots(k+m-1) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1) + (n+1)(n+2)\cdots(n+m)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1} + (n+1)(n+2)\cdots(n+m)\\ &= \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1} + \frac{(m+1)(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}\\ &= \frac{[n+(m+1)](n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m+1}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+m)\cdot(n+m+1)}{m+1}.\end{aligned}$$

6. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $a \geqslant -1$, τότε $(1+a)^n \geqslant 1+na$.

(β) Αν $0 < a < 1/n$, τότε $(1+a)^n < 1/(1-na)$.

(γ) Αν $0 \leqslant a \leqslant 1$, τότε

$$1-na \leqslant (1-a)^n \leqslant \frac{1}{1+na}.$$

Υπόδειξη. (α) Για $n=1$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα: $1+a=1+a$. Δείχνουμε το επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $(1+a)^m \geqslant 1+ma$. Αφού $1+a \geqslant 0$, έχουμε $(1+a)(1+a)^m \geqslant (1+a)(1+ma)$. Άρα,

$$(1+a)^{m+1} \geqslant (1+a)(1+ma) = 1+(m+1)a+ma^2 \geqslant 1+(m+1)a.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $ma^2 \geqslant 0$.

(β) Για το επαγωγικό βήμα, παρατηρήστε πρώτα ότι αν $0 < a < \frac{1}{m+1}$ τότε έχουμε και $0 < a < \frac{1}{m}$. Από την επαγωγική υπόθεση,

$$(1+a)^{m+1}(1-(m+1)a) = (1+a)(1-(m+1)a)(1+a)^m < \frac{(1+a)(1-(m+1)a)}{1-ma}.$$

Όμως,

$$(1+a)(1-(m+1)a) = 1+a-(m+1)a-(m+1)a^2 = 1-ma-(m+1)a^2 < 1-ma.$$

Έπεται ότι

$$(1+a)^{m+1}(1-(m+1)a) < 1.$$

(γ) Για την αριστερή ανισότητα, παρατηρήστε ότι $-a \geqslant -1$. Συνεπώς, μπορούμε να εφαρμόσουμε το (α) με τον $-a$ στη θέση του a:

$$(1-a)^n = (1+(-a))^n \geqslant 1+n(-a) = 1-na.$$

Για τη δεξιά ανισότητα: αν $a = 1$ η ανισότητα ισχύει διότι, τότε, $(1-a)^n = 0$. Αν $0 \leqslant a < 1$ έχουμε $\frac{1}{1-a} > 1 + a$ (εξηγήστε γιατί), οπότε

$$\frac{1}{(1-a)^n} = \left(\frac{1}{1-a}\right)^n > (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

από το (α). Έπεται ότι $(1-a)^n \leqslant \frac{1}{1+na}$.

7. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $-1 < a < 0$, τότε $(1+a)^n \leqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Αν $a > 0$, τότε $(1+a)^n \geqslant 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. (α) Ισοδύναμα, αποδείξτε ότι αν $0 < x < 1$, τότε $(1-x)^n \leqslant 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με επαγωγή. Αν $n = 1$ τότε ισχύει σαν ισότητα.

Υποθέστε ότι $(1-x)^m \leqslant 1 - mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
(1-x)^{m+1} &= (1-x)^m(1-x) \\
&\leqslant \left(1 - mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2\right)(1-x) \\
&= 1 - (m+1)x + \left[\frac{m(m-1)}{2} + m\right]x^2 - \frac{m(m-1)}{2}x^3 \\
&< 1 - (m+1)x + \frac{(m+1)m}{2}x^2,
\end{aligned}$$

αφού $\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m+1)m}{2}$ και $x > 0$.

(β) Αν $n = 1$, η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα. Αν $n \geqslant 2$, παρατηρήστε ότι από το διωνυμικό ανάπτυγμα,

$$(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \geqslant 1 + na + \binom{n}{2} a^2 = 1 + na + \frac{n(n-1)}{2}a^2.$$

Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι $a > 0$;

8. (α) Αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, αποδείξτε ότι

$$(1+a_1)\cdots(1+a_n) \geqslant 1 + a_1 + \cdots + a_n.$$

(β) Αν $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$, τότε

$$\begin{aligned}
1 - (a_1 + \cdots + a_n) &\leqslant (1-a_1)\cdots(1-a_n) \\
&\leqslant 1 - (a_1 + \cdots + a_n) + (a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n).
\end{aligned}$$

Υπόδειξη. Με επαγωγή.

9. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{και} \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}.$$

Υπόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \frac{n+2}{n+1} \\
&\iff \frac{n+1}{n+2} < \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n \\
&\iff 1 - \frac{1}{n+2} < \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1-\frac{n}{(n+1)^2}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξετε ότι

$$\frac{n}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+2}.$$

10. Αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz: αν $a_1,\ldots,a_n$ και $b_1,\ldots,b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right).$$

Αποδείξτε επίσης την ανισότητα του Minkowski: αν $a_1,\ldots,a_n$ και $b_1,\ldots,b_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. (α) Η πιο φυσιολογική απόδειξη είναι με επαγωγή: παρατηρήστε πρώτα ότι αρκεί να δείξουμε την ανισότητα στην περίπτωση που $a_k\geqslant 0$, $b_k\geqslant 0$ για κάθε $k=1,\ldots,n$ (εξηγήστε γιατί).

$n=2$: Ελέγξτε ότι για κάθε $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$(a_1b_1+a_2b_2)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2).$$

Επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για οποιεσδήποτε δύο k–άδες πραγματικών αριθμών, $k=2,\ldots,m$. Έστω $a_1,\ldots,a_{m+1}$ και $b_1,\ldots,b_{m+1}$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_kb_k &= \sum_{k=1}^{m} a_kb_k + a_{m+1}b_{m+1}\\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^m a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^m b_k^2\right)^{1/2} + a_{m+1}b_{m+1}.\end{aligned}$$

Αν ορίσουμε $x=\left(\sum_{k=1}^m a_k^2\right)^{1/2}$ και $y=\left(\sum_{k=1}^m b_k^2\right)^{1/2}$, τότε (από το βήμα $n=2$) έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^m a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^m b_k^2\right)^{1/2} + a_{m+1}b_{m+1} &= xy+a_{m+1}b_{m+1}\\ &\leqslant (x^2+a_{m+1}^2)^{1/2}(y^2+b_{m+1}^2)^{1/2}\\ &= \left(a_1^2+\cdots+a_m^2+a_{m+1}^2\right)^{1/2}\left(b_1^2+\cdots+b_m^2+b_{m+1}^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_kb_k \leqslant \left(a_1^2+\cdots+a_m^2+a_{m+1}^2\right)^{1/2}\left(b_1^2+\cdots+b_m^2+b_{m+1}^2\right)^{1/2}.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το επαγωγικό βήμα.

(β) Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2 &= \sum_{k=1}^n a_k(a_k+b_k) + \sum_{k=1}^n b_k(a_k+b_k)\\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2}\\ &= \left[\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{1/2}\right]\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Έπεται το ζητούμενο (εξηγήστε γιατί).

11. (Ταυτότητα του Lagrange) Αν $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ και $b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$, τότε

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_kb_j - a_jb_k)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Lagrange αποδείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right) = \sum_{k,j=1}^n a_k^2b_j^2$$

και, όμοια,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) = \sum_{k,j=1}^n a_j^2b_k^2.$$

Επίσης,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)\left(\sum_{j=1}^n a_jb_j\right) = \sum_{k,j=1}^n a_kb_ja_jb_k.$$

Άρα, το αριστερό μέλος ισούται (εξηγήστε γιατί) με

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_k^2b_j^2 - 2a_kb_ja_jb_k + a_j^2b_k^2) = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^n (a_kb_j - a_jb_k)^2.$$

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz προκύπτει άμεσα.

12. (Ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου) Αν $x_1,\ldots,x_n>0$, τότε

$$x_1x_2\cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^n.$$

Ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

Επίσης, αν $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$, τότε

$$x_1x_2\cdots x_n \geqslant \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος. Δείχνουμε πρώτα επαγωγικά ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$, αν $x_1,\ldots,x_{2^k}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt[2^k]{x_1\cdots x_{2^k}} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}.$$

Για $k=1$ πρέπει να ελέγξουμε ότι αν $x_1, x_2>0$ τότε $\sqrt{x_1x_2}\leqslant \frac{x_1+x_2}{2}$. Αυτή η ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν $4x_1x_2\leqslant (x_1+x_2)^2$, η οποία ισχύει διότι $(x_1-x_2)^2\geqslant 0$.

Υποθέτουμε ότι αν $y_1,\ldots,y_{2^m}$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε

$$\sqrt[2^m]{y_1\cdots y_{2^m}}\leqslant \frac{y_1+\cdots+y_{2^m}}{2^m}.$$

Έστω $x_1,\ldots,x_{2^m},x_{2^m+1},\ldots,x_{2^{m+1}}>0$. Τότε, εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τους $x_1,\ldots,x_{2^m}>0$ και $x_{2^m+1},\ldots,x_{2^{m+1}}>0$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sqrt[2^{m+1}]{x_1\cdots x_{2^m}x_{2^m+1}\cdots x_{2^{m+1}}} &= \sqrt{\sqrt[2^m]{x_1\cdots x_{2^m}}\cdot \sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\cdots x_{2^{m+1}}}}\\ &\leqslant \frac{\sqrt[2^m]{x_1\cdots x_{2^m}}+\sqrt[2^m]{x_{2^m+1}\cdots x_{2^{m+1}}}}{2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{x_1+\cdots+x_{2^m}}{2^m}+\frac{x_{2^m+1}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\Big)\\ &= \frac{x_1+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει το ζητούμενο αν το πλήθος N των αριθμών είναι $N=2^k$, $k\in\mathbb{N}$. Έστω $n\in\mathbb{N}$ και έστω $x_1,\ldots,x_n>0$. Υπάρχει $N=2^k>n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε τη N–άδα $x_1,\ldots,x_n,\alpha,\ldots,\alpha$, όπου πήραμε $N-n$ φορές τον θετικό αριθμό $\alpha=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου γι' αυτή τη N–άδα:

$$\sqrt[N]{x_1\cdots x_n\cdot \alpha^{N-n}}\leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n+(N-n)\alpha}{N}.$$

Αφού $x_1\cdots x_n=\alpha^n$, η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\alpha=\sqrt[N]{\alpha^n\cdot\alpha^{N-n}}\leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n+(N-n)\alpha}{N},$$

δηλαδή

$$N\alpha\leqslant (x_1+\cdots+x_n)+(N-n)\alpha\Longrightarrow n\alpha\leqslant x_1+\cdots+x_n.$$

Συνεπώς,

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}=\alpha\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Δεύτερος τρόπος. Θέτουμε $\alpha=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ και ορίζουμε $b_k=\frac{x_k}{\alpha}$, $k=1,\ldots,n$. Παρατηρούμε ότι οι b_k είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο

$$b_1\cdots b_n=\frac{x_1}{\alpha}\cdots\frac{x_n}{\alpha}=\frac{x_1\cdots x_n}{\alpha^n}=1.$$

Επίσης, η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$b_1+\cdots+b_n\geqslant n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε το εξής:

> Έστω $n\in\mathbb{N}$. Αν $b_1,\ldots,b_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο $b_1\cdots b_n=1$, τότε $b_1+\cdots+b_n\geqslant n$.

Αποδείξτε την με επαγωγή ως προς το πλήθος των b_k: αν $n=1$ τότε έχουμε έναν μόνο αριθμό, τον $b_1=1$. Συνεπώς, η ανισότητα είναι τετριμμένη: $1\geqslant 1$.

Υποθέτουμε ότι για κάθε m–άδα θετικών αριθμών $y_1,\ldots,y_m$ με γινόμενο $y_1\cdots y_m=1$ ισχύει η ανισότητα

$$y_1+\cdots+y_m\geqslant m,$$

και δείχνουμε ότι αν $b_1, \cdots, b_{m+1}$ είναι $(m+1)$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί με γινόμενο $b_1 \cdots b_{m+1} = 1$ τότε
$$b_1 + \cdots + b_{m+1} \geqslant m+1.$$
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_{m+1}$. Παρατηρούμε ότι, αν $b_1 = b_2 = \cdots = b_{m+1} = 1$ τότε η ανισότητα ισχύει σαν ισότητα. Αν όχι, αναγκαστικά έχουμε $b_1 < 1 < b_{m+1}$ (εξηγήστε γιατί).

Θεωρούμε την m-άδα θετικών αριθμών
$$y_1 = b_1 b_{m+1}\,,\ y_2 = b_2, \ldots,\ y_m = b_m.$$
Αφού $y_1 \cdots y_m = b_1 \cdots b_{m+1} = 1$, από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε
$$(b_1 b_{m+1}) + b_2 + \cdots + b_m = y_1 + \cdots + y_m \geqslant m.$$
Όμως, από την $b_1 < 1 < b_{m+1}$ έπεται ότι $(b_{m+1}-1)(1-b_1) > 0$ δηλαδή $b_1 + b_{m+1} > 1 + b_{m+1}b_1$. Άρα,
$$b_1 + b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m > 1 + b_1 b_{m+1} + b_2 + \cdots + b_m \geqslant 1 + m.$$
Έχουμε λοιπόν δείξει το επαγωγικό βήμα.

Αν οι $x_1, \ldots, x_n$ δεν είναι όλοι ίσοι, τότε η απόδειξη που προηγήθηκε δείχνει ότι η ανισότητα είναι γνήσια (εξηγήστε γιατί). Δηλαδή: στην ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x_1 = \cdots = x_n$.

Για την ανισότητα
$$x_1 x_2 \cdots x_n \geqslant \left(\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \right)^n$$
εφαρμόστε την ανισότητα που μόλις δείξαμε για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς $\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

13. Έστω $a_1, \ldots, a_n > 0$. Αποδείξτε ότι
$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Υπόδειξη. Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού–αρμονικού μέσου έχουμε
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

14. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου αποδείξτε ότι: για κάθε $x > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$x^n \leqslant \frac{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n}}{2n+1}.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι στο άθροισμα του δεξιού μέλους έχουμε $2n+1$ όρους, δηλαδή το δεξιό μέλος είναι ο αριθμητικός μέσος των $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{2n}$. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε
$$\frac{1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{2n}}{2n+1} \geqslant \sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{2n}}.$$
Όμως,
$$1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{2n} = x^{1+2+3+\cdots+2n} = x^{\frac{2n(2n+1)}{2}} = x^{n(2n+1)}.$$
Συνεπώς,
$$\sqrt[2n+1]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdots x^{2n}} = \sqrt[2n+1]{(x^n)^{2n+1}} = x^n,$$
και έχουμε το ζητούμενο.

15. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n = 1$. Αποδείξτε ότι
$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \geqslant 1$, ισχύει $(1-\sqrt{a_k})^2 \geqslant 0$, άρα $1+a_k \geqslant 2\sqrt{a_k}$. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις ανισότητες κατά μέλη, παίρνουμε

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1}\cdot 2\sqrt{a_2}\cdots 2\sqrt{a_n} = 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = 2^n,$$

αφού $a_1a_2\cdots a_n = 1$.

16. Αποδείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

Υπόδειξη. Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdots n} \leqslant \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2},$$

χρησιμοποιώντας τη γνωστή ταυτότητα

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Supremum και Infimum

17. Αποδείξτε ότι τα παρακάτω ισχύουν στο $\mathbb{R}$:

(α) Αν $x < y+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leqslant y$.

(β) Αν $x \leqslant y+\varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x \leqslant y$.

(γ) Αν $|x-y| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε $x = y$.

(δ) Αν $a < x < b$ και $a < y < b$, τότε $|x-y| < b-a$.

Υπόδειξη. (α) *Απαγωγή σε άτοπο.* Υποθέτουμε ότι $y < x$. Τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ έχουμε

$$x-(y+\varepsilon) = x-y-\frac{x-y}{2} = \frac{x-y}{2} > 0,$$

δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x > y+\varepsilon$. Άτοπο.

(β) Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο: υποθέτουμε ότι $y < x$. Τότε, επιλέγοντας $\varepsilon = \frac{x-y}{2} > 0$ έχουμε

$$x-(y+\varepsilon) = x-y-\frac{x-y}{2} = \frac{x-y}{2} > 0,$$

δηλαδή υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε $x > y+\varepsilon$. Άτοπο.

(γ) Θυμηθείτε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $b \geqslant 0$, τότε $|a| \leqslant b$ αν και μόνο αν $-b \leqslant a \leqslant b$. Από την υπόθεση, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύουν οι

$$x \leqslant y+\varepsilon \quad \text{και} \quad y \leqslant x+\varepsilon.$$

Από το (β) έπεται ότι $x \leqslant y$ και $y \leqslant x$. Άρα, $x = y$.

(δ) Αφού $a < x < b$ και $-b < -y < -a$, έχουμε $-(b-a) < x-y < b-a$. Άρα, $|x-y| < b-a$.

18. Αποδείξτε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $\mathbb{R}$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα.

Υπόδειξη. Έστω A μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{-x : x \in A\}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι το B είναι μη κενό: υπάρχει $x \in A$ και τότε $-x \in B$. Επίσης, το B άνω φραγμένο: το A είναι κάτω φραγμένο και αν θεωρήσουμε τυχόν κάτω φράγμα t του A μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι ο $-t$ είναι άνω φράγμα του B (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup B$ του B. Όπως πριν, αφού ο s είναι άνω φράγμα του B, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A. Αν $y > -s$, τότε $-y < s$. Αφού $s = \sup B$, υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $-y < b$. Τότε, $-b \in A$ και $-b < y$. Δηλαδή, ο $-s$ είναι κάτω φράγμα του A και αν $y > -s$ τότε ο y δεν είναι κάτω φράγμα του A. Έπεται ότι $-s = \inf A$.

Άλλος τρόπος: Ορίζουμε $\Gamma = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ κάτω φράγμα του } A\}$. Αποδείξτε ότι το Γ είναι μη κενό και άνω φραγμένο (οποιοδήποτε στοιχείο του A είναι ένα άνω φράγμα του Γ). Από το αξίωμα της πληρότητας υπάρχει το ελάχιστο άνω φράγμα $s = \sup \Gamma$ του Γ. Αποδείξτε ότι ο s είναι κάτω φράγμα του A. Τότε, ο s είναι το *μέγιστο στοιχείο* του Γ, δηλαδή το μέγιστο κάτω φράγμα του A.

Για να δείξετε ότι ο $s = \sup \Gamma$ είναι κάτω φράγμα του A, πρέπει να δείξετε ότι το τυχόν $a \in A$ ικανοποιεί την $\sup \Gamma \leqslant a$. Αρκεί να δείξετε ότι ο a είναι άνω φράγμα του Γ (εξηγήστε γιατί). Όμως, αν $x \in \Gamma$ τότε $x \leqslant a$ (από τον ορισμό του Γ, ο x είναι κάτω φράγμα του A).

19. Έστω A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $a_0 \in A$ με την ιδιότητα: για κάθε $a \in A$, $a \leqslant a_0$. Αποδείξτε ότι $a_0 = \sup A$. Με άλλα λόγια, αν το A έχει μέγιστο στοιχείο, τότε αυτό είναι το supremum του A.

Υπόδειξη. Αφού για κάθε $a \in A$ έχουμε $a \leqslant a_0$, ο a_0 είναι άνω φράγμα του A. Όμως, αν s είναι κάποιο άνω φράγμα του A, αφού $a_0 \in A$ πρέπει να έχουμε $a_0 \leqslant s$. Άρα, ο a_0 είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A.

20. Έστω A, B δύο μη κενά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν $\sup A = \inf B$, αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον χαρακτηρισμό του sup μπορούμε να βρούμε $a \in A$ ώστε $a > \sup A - \varepsilon/2$. Από τον χαρακτηρισμό του inf μπορούμε να βρούμε $b \in B$ ώστε $b < \inf B + \varepsilon/2$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες με την υπόθεση, παίρνουμε

$$b < \inf B + \frac{\varepsilon}{2} = \sup A + \frac{\varepsilon}{2} < a + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = a + \varepsilon.$$

Δηλαδή, βρήκαμε $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

21. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Βρείτε το supremum και το infimum του συνόλου $(a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Αιτιολογήστε πλήρως την απάντηση σας.

(β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $A_x = \{q \in \mathbb{Q} : q < x\}$. Αποδείξτε ότι

$$x = y \Longleftrightarrow A_x = A_y.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $A = (a, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : a < x < b\}$. Από τον ορισμό του A έχουμε $x < b$ για κάθε $x \in A$. Άρα, $\sup A \leqslant b$. Παρατηρήστε ότι $\sup A > a$. Υποθέτουμε ότι $\sup A < b$. Από την πυκνότητα του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$ υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ ώστε $\sup A < q < b$. Τότε $a < q < b$, δηλαδή $q \in A$. Αυτό είναι άτοπο, λόγω της $\sup A < q$. Άρα, $\sup A = b$.

Με ανάλογο επιχείρημα αποδείξτε ότι $\inf A = a$.

(β) Ας υποθέσουμε ότι $x \neq y$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x < y$. Υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ με την ιδιότητα $x < q < y$. Τότε, $q \in A_y$ και $q \notin A_x$. Άρα, $A_x \neq A_y$.

Αν $x = y$, είναι φανερό ότι: για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ ισχύει $q < x \Longleftrightarrow q < y$. Άρα, $A_x = A_y$.

22. Έστω A, B μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με $A \subseteq B$. Αποδείξτε ότι

$$\inf B \leqslant \inf A \leqslant \sup A \leqslant \sup B.$$

Υπόδειξη. Δείχνουμε την $\inf B \leqslant \inf A$. Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του A. Όμως, αν $x \in A$ τότε $x \in B$ (διότι $A \subseteq B$), άρα $\inf B \leqslant x$.

23. Έστω A, B μη κενά, φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A \cup B$ είναι φραγμένο και

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \qquad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Μπορούμε να πούμε κάτι ανάλογο για το $\sup(A \cap B)$ ή το $\inf(A \cap B)$;

Υπόδειξη. (α) Από την Άσκηση 21 έχουμε $\sup(A\cup B) \geqslant \sup A$ και $\sup(A\cup B) \geqslant \sup B$. Άρα, $\sup(A\cup B) \geqslant \max\{\sup A, \sup B\}$.

Για την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι ο $M := \max\{\sup A, \sup B\}$ είναι άνω φράγμα του $A \cup B$. Έστω $x \in A \cup B$. Τότε, ο x ανήκει σε τουλάχιστον ένα από τα A ή B. Αν $x \in A$ τότε $x \leqslant \sup A \leqslant M$ και αν $x \in B$ τότε $x \leqslant \sup B \leqslant M$.

(β) Ισχύει η ανισότητα $\sup(A \cap B) \leqslant \min\{\sup A, \sup B\}$. Μπορεί όμως να είναι γνήσια. Ένα παράδειγμα δίνουν τα $A = \{1, 2\}$ και $B = \{1, 3\}$.

24. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \inf B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sup A \leqslant \inf B$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant \sup A \leqslant \inf B \leqslant b$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$. Θα δείξουμε ότι $\sup A \leqslant \inf B$.

Πρώτος τρόπος: Για να δείξουμε ότι $\sup A \leqslant \inf B$, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A. Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση, για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$. Άρα, ο a είναι κάτω φράγμα του B. Συνεπώς, $a \leqslant \inf B$. Το $a \in A$ ήταν τυχόν, άρα ο $\inf B$ είναι άνω φράγμα του A.

Δεύτερος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $\inf B < \sup A$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα $\inf B + \varepsilon < \sup A - \varepsilon$ (εξηγήστε γιατί). Από τον χαρακτηρισμό του infimum, υπάρχει $b \in B$ που ικανοποιεί την $b < \inf B + \varepsilon$ και υπάρχει $a \in A$ που ικανοποιεί την $\sup A - \varepsilon < a$. Τότε, $b < \inf B + \varepsilon < \sup A - \varepsilon < a$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

25. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$a \leqslant b.$$

Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$.

Υπόδειξη. Πρώτος τρόπος: Για να δείξουμε ότι $\sup A \leqslant \sup B$, αρκεί να δείξουμε ότι ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A. Έστω $a \in A$. Από την υπόθεση, υπάρχει $b \in B$ ώστε

$$a \leqslant b \leqslant \sup B.$$

Το $a \in A$ ήταν τυχόν, άρα ο $\sup B$ είναι άνω φράγμα του A.

Δεύτερος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $\sup A > \sup B$. Υπάρχει $\varepsilon > 0$ με την ιδιότητα $\sup A - \varepsilon > \sup B$ (γιατί;). Από τον χαρακτηρισμό του supremum, υπάρχει $a \in A$ που ικανοποιεί την $a > \sup A - \varepsilon$. Τότε, για κάθε $b \in B$ έχουμε

$$b \leqslant \sup B < \sup A - \varepsilon < a.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση.

26. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf των παρακάτω συνόλων:

(α) $A = \{x > 0 : 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geqslant 0, 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}$, $C = \{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$.

(β) $D = \{x \in \mathbb{R} : x < 0, x^2 + x - 1 < 0\}$, $E = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$, $F = \{x \in \mathbb{Q} : (x-1)(x+\sqrt{2}) < 0\}$.

(γ) $G = \{5 + \frac{6}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{7 - 8n : n \in \mathbb{N}\}$.

Υπόδειξη.

(i) Για το A παρατηρήστε ότι $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leqslant \sqrt{3}\} = (1, \sqrt{3}]$. Άρα, $\max A = \sup A = \sqrt{3}$. Το $\inf A$ είναι το 1, το A δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(ii) Ανάλογα, $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leqslant \sqrt{3}\}$. Εδώ, $\sup B = \sqrt{3}$, $\inf B = 1$, το B δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο.

(iii) Το C έχει ελάχιστο στοιχείο το 0 και μέγιστο στοιχείο το $\frac{1}{2}$. Συνεπώς, $\inf C = 0$ και $\sup C = \frac{1}{2}$.

(iv) Ισχύει $x^2 + x - 1 < 0$ αν και μόνο αν $-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Έπεται ότι $D = \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$. Το D δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο, $\inf D = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\sup D = 0$.

(v) Γράφουμε το E στη μορφή $E = \left\{\frac{1}{2k-1} - 1 : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2k} + 1 : k \in \mathbb{N}\right\}$. Εξηγήστε τα παρακάτω: $\sup E = \max E = \frac{3}{2}$, $\inf E = -1$, το E δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

(vi) Έχουμε $F = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x < 1\}$. Το F δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο, $\inf F = -\sqrt{2}$, $\sup F = 1$.

(vii) Τέλος, το G δεν είναι κάτω φραγμένο και έχει μέγιστο στοιχείο το $\max G = \sup G = 11$ (εξηγήστε γιατί).

27. Βρείτε το supremum και το infimum των συνόλων

$$A = \left\{1 + (-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad , \quad B = \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Υπόδειξη. (α) Γράψτε το A στη μορφή

$$A = \left\{2 - \frac{1}{2k} : k \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{1}{2k-1} : k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Για κάθε $a \in A$ ισχύει $0 < a < 2$. Αν $y > 0$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2k-1} < y$. Αν $y < 2$ τότε υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $2 - \frac{1}{2k} > y$. Από τα παραπάνω έπεται ότι $\inf A = 0$ και $\sup A = 2$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε ότι το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

(β) Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Άρα, $\sup B = \max B = \frac{5}{6}$. Για κάθε $b \in B$ ισχύει $b > 0$. Επίσης, αν $y > 0$ τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{n} < y.$$

Έπεται ότι $\inf B = 0$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε ότι το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο.

28. Αποδείξτε ότι το σύνολο

$$A = \left\{\frac{(-1)^n m}{n+m} : m, n = 1, 2, \ldots\right\}$$

είναι φραγμένο και βρείτε τα $\sup A$ και $\inf A$. Εξετάστε αν το A έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο.

Υπόδειξη. Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\left|\frac{(-1)^n m}{n+m}\right| = \frac{m}{n+m} < 1$. Συνεπώς, $A \subseteq (-1,1)$. Αποδείξτε ότι $\sup A = 1$ και $\inf A = -1$. Τέλος, αποδείξτε ότι το A δεν έχει μέγιστο ούτε ελάχιστο στοιχείο.

Άλλες ασκήσεις

29. Αποδείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ και $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ είναι άρρητοι.

Υπόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Τότε, $5+2\sqrt{6} = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$, άρα $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$ όπου $m,n \in \mathbb{N}$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Από την $m^2 = 6n^2$ βλέπουμε ότι ο m είναι άρτιος, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 2k$. Αντικαθιστώντας στην $m^2 = 6n^2$ παίρνουμε $2k^2 = 3n^2$. Αναγκαστικά, ο n είναι κι αυτός άρτιος. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m και n.

(β) Υποθέτουμε ότι $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} = x \in \mathbb{Q}$. Τότε,

$$5+2\sqrt{6} = x^2+5-2x\sqrt{5},$$

άρα $\sqrt{6}+x\sqrt{5} = y \in \mathbb{Q}$. Υψώνοντας πάλι στο τετράγωνο, βλέπουμε ότι $\sqrt{30} \in \mathbb{Q}$. Μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{30} = \frac{m}{n}$ όπου $m,n \in \mathbb{N}$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Από την $m^2 = 30n^2$ βλέπουμε ότι ο m είναι άρτιος, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $m = 2k$. Αντικαθιστώντας στην $m^2 = 30n^2$ παίρνουμε $2k^2 = 15n^2$. Αναγκαστικά, ο n είναι κι αυτός άρτιος. Αυτό είναι άτοπο, αφού ο 2 είναι κοινός διαιρέτης των m και n.

30. Αποδείξτε ότι αν ο φυσικός αριθμός n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{n}$ είναι άρρητος.

Υπόδειξη. Αφού ο n δεν είναι τετράγωνο κάποιου φυσικού αριθμού, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $N^2 < n < (N+1)^2$. Υποθέτουμε ότι $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, όπου $p,q \in \mathbb{N}$ και ο q είναι ο μικρότερος δυνατός.

Θέτουμε $q_1 = p - qN = q(\sqrt{n}-N)$ και $p_1 = p(\sqrt{n}-N) = qn - pN$. Τότε, $p_1, q_1 \in \mathbb{N}$ διότι είναι ακέραιοι και θετικοί (αφού $\sqrt{n}-N > 0$) και $q_1 = p - qN < q$ διότι $\frac{p}{q} = \sqrt{n} < N+1$. Όμως,

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{p(\sqrt{n}-N)}{q(\sqrt{n}-N)} = \frac{p}{q} = \sqrt{n},$$

το οποίο είναι άτοπο αφού $q_1 < q$.

31. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a \leqslant b$, και

(β) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \varepsilon$.

Αποδείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\sup A \leqslant \inf B$. Σταθεροποιούμε $b \in B$. Αφού $a \leqslant b$ για κάθε $a \in A$, ο b είναι άνω φράγμα του A, συνεπώς $\sup A \leqslant b$. Το $b \in B$ ήταν τυχόν, άρα ο $\sup A$ είναι κάτω φράγμα του B. Τώρα, έπεται ότι $\sup A \leqslant \inf B$.

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $a_\varepsilon \in A$ και $b_\varepsilon \in B$ ώστε $b_\varepsilon - a_\varepsilon < \varepsilon$, συνεπώς

$$\inf B \leqslant b_\varepsilon < a_\varepsilon + \varepsilon \leqslant \sup A + \varepsilon.$$

Δείξαμε ότι $\inf B < \sup A + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\inf B \leqslant \sup A$ (από την Άσκηση 2).

32. Έστω A, B μη κενά, άνω φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\sup A \leqslant \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sup A \leqslant \sup B$. Έστω $a \in A$ και $\varepsilon > 0$. Από τον ε-χαρακτηρισμό του $\sup B$, υπάρχει $b \in B$ ώστε $\sup B - \varepsilon < b$. Τότε,

$$a - \varepsilon \leqslant \sup A - \varepsilon \leqslant \sup B - \varepsilon < b.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $a \in A$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $b \in B$ ώστε $a - \varepsilon < b$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε τυχόν $a \in A$ και βρίσκουμε $b \in B$ ώστε

$$a < b + \varepsilon \leqslant \sup B + \varepsilon.$$

Αφού το $a \in A$ ήταν τυχόν, ο $\sup B + \varepsilon$ είναι άνω φράγμα του A, δηλαδή

$$\sup A \leqslant \sup B + \varepsilon.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\sup A \leqslant \sup B$ (από την Άσκηση 2).

33. Έστω A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:
(α) για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$ ισχύει $a < b$.
(β) $A \cup B = \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει $\gamma \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε είτε $A = (-\infty, \gamma)$ και $B = [\gamma, +\infty)$ ή $A = (-\infty, \gamma]$ και $B = (\gamma, +\infty)$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι $A \cap B = \emptyset$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, από την Άσκηση 23 έχουμε $\gamma := \sup A \leqslant \delta := \inf B$. Δικαιολογήστε διαδοχικά τα εξής:

(i) $\gamma = \delta$: αν είχαμε $\gamma < \delta$ τότε ο $\frac{\gamma+\delta}{2}$ δεν θα ανήκε στο $A \cup B$ (εξηγήστε γιατί).

(ii) $(-\infty, \gamma] \supseteq A$ και $[\gamma, \infty) \supseteq B$.

(iii) $(-\infty, \gamma) \subseteq A$ και $(\gamma, \infty) \subseteq B$.

(iv) Ο γ ανήκει σε ακριβώς ένα από τα A ή B.

34. Έστω $A \subset (0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\inf A = 0$ και ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα max, min, sup και inf του συνόλου

$$B = \left\{ \frac{x}{x+1} : x \in A \right\}.$$

Υπόδειξη. Αν $y \in B$ τότε $y = \frac{x}{x+1}$ για κάποιο $x \in A$. Αφού $A \subset (0, +\infty)$, βλέπουμε ότι $y > 0$. Άρα, το B είναι κάτω φραγμένο από το 0.

Δείχνουμε ότι $\inf B = 0$ με τον ε χαρακτηρισμό του infimum. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\inf A = 0$, υπάρχει $x \in A$ ώστε $x < \varepsilon$. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} < x < \varepsilon$ (είναι $x + 1 > 1$ αφού $x > 0$).

Παρατηρούμε ότι ο 1 είναι άνω φράγμα του B: αν $y \in B$ τότε υπάρχει $x \in A$ ώστε $y = \frac{x}{x+1} < 1$. Δείχνουμε ότι $\sup B = 1$ με τον ε χαρακτηρισμό του supremum. Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητάμε $x \in A$ ώστε $1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$, δηλαδή $x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Αφού το A δεν είναι άνω φραγμένο, τέτοιο $x \in A$ υπάρχει. Τότε, το $y = \frac{x}{x+1} \in B$ και $y = \frac{x}{x+1} > 1 - \varepsilon$.

Το B δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο στοιχείο: θα έπρεπε να υπάρχει $x > 0$ που να ικανοποιεί την $\frac{x}{x+1} = 0$ ή την $\frac{x}{x+1} = 1$ αντίστοιχα (κάτι που δεν γίνεται).