

Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 2: Ακολουθίες πραγματικών αριθμών

Α' Ομάδα

1. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

- (α) Κάθε φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.
- (β) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη.
- (γ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία ακεραίων αριθμών, τότε η (a_n) συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή.
- (δ) Υπάρχει γνήσιως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.
- (ε) Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων αριθμών συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.
- (στ) Κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο κάποιας ακολουθίας άρρητων αριθμών.
- (ζ) Αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε $a_n \rightarrow 0$ αν και μόνο αν $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$.
- (η) Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία. Αν η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \rightarrow +\infty$.
- (θ) Αν η $(|a_n|)$ συγκλίνει τότε και η (a_n) συγκλίνει.
- (ι) Αν $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \rightarrow +\infty$.
- (ια) Αν η (a_n) συγκλίνει και $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η (a_n) είναι σταθερή.

Υπόδειξη. (α) Λάθος. Η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

(β) Σωστό. Υποθέτουμε ότι $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1 > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|a_n - a| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή,

$$\text{αν } n \geq n_0, \text{ τότε } |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Θέτουμε

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\}$$

και ελέγχουμε ότι $|a_n| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (διακρίνετε περιπτώσεις: $n \leq n_0$ και $n > n_0$). Άρα, η (a_n) είναι φραγμένη.

(γ) Σωστό. Υποθέτουμε ότι η (a_n) συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό a . Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \frac{1}{2}$. Τότε, αν $n \geq n_0$ έχουμε

$$|a_n - a_{n_0}| = |(a_n - a) + (a - a_{n_0})| \leq |a_n - a| + |a - a_{n_0}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Όμως, οι a_n και a_{n_0} είναι ακέραιοι, άρα $a_n = a_{n_0}$. Δηλαδή, η (a_n) είναι τελικά σταθερή: για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n = a_{n_0}$.

Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι απλή: γενικότερα, αν για μια ακολουθία (a_n) στο \mathbb{R} (όχι αναγκαστικά στο \mathbb{Z}) υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{R}$ ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει $a_n = a$, τότε $a_n \rightarrow a$ (εξηγήστε, με βάση τον ορισμό του ορίου).

(δ) *Λάθος*. Ας υποθέσουμε ότι (a_n) είναι μια γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών. Το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μη κενό υποσύνολο του \mathbb{N} . Από την αρχή της καλής διάταξης, έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_m \leq a_n$. Αυτό είναι άτοπο, αφού $a_{m+1} \in A$ και $a_{m+1} < a_m$.

(ε) *Λάθος*. Η ακολουθία $a_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ είναι ακολουθία άρρητων αριθμών, όμως $a_n \rightarrow 0$ (και ο 0 είναι ρητός).

(στ) *Σωστό*. Διακρίνετε περιπτώσεις. Αν ο x είναι άρρητος, μπορείτε να θεωρήσετε τη σταθερή ακολουθία $a_n = x$. Αν ο x είναι ρητός, μπορείτε να θεωρήσετε την ακολουθία $a_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$.

(ζ) *Σωστό*. Υποθέτουμε πρώτα ότι $a_n \rightarrow 0$. Έστω $M > 0$. Αφού $a_n \rightarrow 0$, εφαρμόζοντας τον ορισμό με $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 = n_0(\varepsilon) = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $0 < a_n < \frac{1}{M}$. Δηλαδή, υπάρχει $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $\frac{1}{a_n} > M$. Έπεται ότι $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση εργαζόμαστε με ανάλογο τρόπο.

(η) *Σωστό*. Έστω $M > 0$. Αφού η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_{n_0} > M$. Αφού η (a_n) είναι αύξουσα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n \geq a_{n_0} > M$. Αφού ο $M > 0$ ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι $a_n \rightarrow +\infty$.

(θ) *Λάθος*. Η $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει, όμως η $|a_n| = 1$ συγκλίνει.

(ι) *Λάθος*. Θεωρήστε την ακολουθία (a_n) με $a_{2k} = k$ και $a_{2k-1} = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, $a_n > 0$ και η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη, όμως $a_n \not\rightarrow +\infty$ (αν αυτό ίσχυε, θα έπρεπε όλοι τελικά οι όροι της (a_n) να είναι μεγαλύτεροι από 2, το οποίο δεν ισχύει αφού όλοι οι περιττοί όροι της είναι ίσοι με 1).

(ια) *Σωστό*. Αν $a_n \rightarrow a$ τότε οι ακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a (εξηγήστε γιατί). Από την υπόθεση ότι $a_{n+2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, βλέπουμε ότι οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) είναι σταθερές ακολουθίες: υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ ώστε

$$x = a_1 = a_3 = a_5 = \dots \quad \text{και} \quad y = a_2 = a_4 = a_6 = \dots$$

Από τις $a_{2k-1} \rightarrow x$ και $a_{2k} \rightarrow y$ έπεται ότι $x = y = a$. Άρα, η (a_n) είναι σταθερή.

2. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Αν $a_n \rightarrow a > 0$ αποδείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1$. Τι μπορείτε να πείτε αν $a_n \rightarrow 0$;

Υπόδειξη. Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Τότε,

$$\sqrt[n]{a/2} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{3a/2}.$$

Όμως, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3a/2} = 1$, από το (α). Τότε, το κριτήριο παρεμβολής μας εξασφαλίζει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Αν $a_n \rightarrow 0$ δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο: θεωρήστε τα παραδείγματα $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{3^n}$, $\gamma_n = \frac{1}{n^n}$. Τι παρατηρείτε για τις $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\gamma_n}$;

3. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 2.001\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n > 2.003\} \\ A_3 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n < 1.98\} \\ A_4 &= \{n \in \mathbb{N} : 1.99997 < a_n < 2.0001\} \\ A_5 &= \{n \in \mathbb{N} : a_n \leq 2\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $j = 1, \dots, 5$ εξετάστε αν (α) το A_j είναι πεπερασμένο, (β) το $\mathbb{N} \setminus A_j$ είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη. (α) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.001 > 0$ βρίσκουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $1.999 < a_n < 2.001$. Άρα, κάθε $n \geq n_1$ ανήκει στο A_1 . Το $\mathbb{N} \setminus A_1$ είναι πεπερασμένο (και το A_1 άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του \mathbb{N}).

(γ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.02 > 0$ βρίσκουμε $n_3 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_3$ ισχύει $1.98 < a_n < 2.02$. Άρα, κάθε $n \geq n_3$ ανήκει στο $\mathbb{N} \setminus A_3$. Το A_3 είναι πεπερασμένο (και το $\mathbb{N} \setminus A_3$ άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του \mathbb{N}).

(δ) Παίρνοντας $\varepsilon = 0.00003 > 0$ βρίσκουμε $n_4 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_4$ ισχύει $1.99997 < a_n < 2.00003 < 2.0001$. Άρα, κάθε $n \geq n_4$ ανήκει στο A_4 . Το $\mathbb{N} \setminus A_4$ είναι πεπερασμένο (και το A_4 άπειρο, και μάλιστα, τελικό τμήμα του \mathbb{N}).

(ε) Το A_5 μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο, εξαρτάται από την (a_n) . Πάρτε σαν παραδείγματα τις ακολουθίες

$$a_n = 2, \quad a_n = 2 + \frac{1}{n}, \quad a_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Όλες ικανοποιούν την $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $A_5 = \mathbb{N}$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \emptyset$. Στην δεύτερη, $A_5 = \emptyset$ και $\mathbb{N} \setminus A_5 = \mathbb{N}$. Στην τρίτη, τόσο το A_5 όσο και το $\mathbb{N} \setminus A_5$ είναι άπειρα σύνολα (το σύνολο των περιττών και το σύνολο των άρτιων φυσικών, αντίστοιχα).

4. Αποδείξτε με τον ορισμό ότι

$$a_n = \frac{n^2 - n}{n^2 + n} \rightarrow 1.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2 - n}{n^2 + n} - 1 \right| = \left| \frac{-2n}{n^2 + n} \right| = \frac{2n}{n^2 + n} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρείτε $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - 1| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon$.

5. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, αποδείξτε ότι $a_n > 0$ τελικά.

Υπόδειξη. Επιλέγουμε $\varepsilon = a/2 > 0$. Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < a/2$. Ισοδύναμα, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a/2 < a_n < 3a/2$. Άρα, $a_n > a/2 > 0$ τελικά (από τον n_0 -οστό όρο και πέρα).

6. Για ποιές τιμές του $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$;

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| = \frac{|1-x^2|}{1+x^2} \leq \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1.$$

Επίσης, αν $x \neq 0$ τότε $\frac{1-x^2}{1+x^2} \neq \pm 1$ (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\left| \frac{1-x^2}{1+x^2} \right| < 1.$$

Από το (α), αν $x \neq 0$ τότε η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n \rightarrow 0$. Τέλος, αν $x = 0$ έχουμε $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n = 1 \rightarrow 1$.

Δηλαδή, η ακολουθία $\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ συγκλίνει, όποιο κι αν είναι το x .

7. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγχλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{3^n}{n!}, & \beta_n &= \frac{2n-1}{3n+2}, & \gamma_n &= n - \sqrt{n^2 - n}, & \delta_n &= \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \\ \varepsilon_n &= (\sqrt[n]{10} - 1)^n, & \zeta_n &= \frac{n^6}{6^n}, & \eta_n &= n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right), & \vartheta_n &= \frac{\sin n}{n} \\ \kappa_n &= \frac{2^n \cdot n!}{n^n}, & \nu_n &= \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, & \rho_n &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n, & \sigma_n &= \frac{n^2}{3n^2 + n + 1} \\ \tau_n &= \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, & \xi_n &= \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) $\alpha_n = \frac{3^n}{n!}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$, άρα $\alpha_n \rightarrow 0$.

(β) $\beta_n = \frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2-1/n}{3+2/n} \rightarrow \frac{2}{3}$.

(γ) $\gamma_n = n - \sqrt{n^2 - n} = \frac{n}{n + \sqrt{n^2 - n}} \rightarrow \frac{1}{2}$.

(δ) $\delta_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \leq e,$$

διότι η $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e . Παίρνοντας n -οστές ρίζες βλέπουμε ότι

$$1 + \frac{1}{n} \leq \delta_n \leq \sqrt[n]{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $\delta_n \rightarrow 1$ (αφού $1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ και $\sqrt[n]{e} \rightarrow 1$).

(ε) $\varepsilon_n = (\sqrt[n]{10} - 1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\varepsilon_n} = \sqrt[n]{10} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 < 1$. Άρα, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

(ζ) $\zeta_n = \frac{n^6}{6^n}$: με το κριτήριο του λόγου. Παρατηρήστε ότι $\frac{\zeta_{n+1}}{\zeta_n} = \frac{1}{6} \left(\frac{n+1}{n}\right)^6 \rightarrow \frac{1}{6} < 1$. Άρα, $\zeta_n \rightarrow 0$.

(η) $\eta_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Χρησιμοποιώντας την $\sin t \leq t$ για $t > 0$, βλέπουμε ότι $0 < \eta_n \leq n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Άρα, $\eta_n \rightarrow 0$.

(θ) $\vartheta_n = \frac{\sin n}{n}$: η $(\sin n)$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{n}\right)$ μηδενική. Άρα, $\vartheta_n \rightarrow 0$.

(χ) $\kappa_n = \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^n} = 2 / \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{2}{e} < 1.$$

Άρα, $\kappa_n \rightarrow 0$.

(ν) $\nu_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$: παρατηρήστε ότι

$$\nu_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{2}$$

(ρ) $\rho_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$: Παρατηρήστε ότι

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq e,$$

διότι η $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον e . Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες βλέπουμε ότι

$$\sqrt{x_n} \leq \rho_n \leq \sqrt{e}.$$

Από το κριτήριο ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $\rho_n \rightarrow \sqrt{e}$.

$$(\zeta) \sigma_n = \frac{n^2}{3n^2+n+1} \rightarrow \frac{1}{3}.$$

(τ) $\tau_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\tau_{n+1}}{\tau_n} = \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 / \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \rightarrow \frac{3}{e} > 1.$$

Άρα, $\tau_n \rightarrow +\infty$.

(ξ) $\xi_n = \frac{\sin(n^3)}{\sqrt{n}}$: η $(\sin(n^3))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Άρα, $\xi_n \rightarrow 0$.

8. (α) Έστω $a_1, a_2, \dots, a_k > 0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \rightarrow \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

(β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας

$$x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n}.$$

Υπόδειξη. (α) Ορίζουμε $a = \max\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $a^n \leq a_1^n + \dots + a_k^n \leq ka^n$.

Άρα,

$$a \leq b_n := \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n} \leq \sqrt[n]{ka^n} = a \sqrt[n]{k}.$$

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{k} = 1$, από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε $b_n \rightarrow a$. Για παράδειγμα,

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n + 7^n} \rightarrow 7.$$

(β) Το πλήθος των προσθετέων (στον ορισμό του n -οστού όρου) δεν είναι σταθερό. Δουλέψτε όμως όπως στο (α): παρατηρήστε ότι $n^n < 1^n + 2^n + \dots + n^n < n \cdot n^n$ αν $n \geq 2$. Άρα,

$$1 < x_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \dots + n^n} < \sqrt[n]{n}$$

για κάθε $n \geq 2$. Αφού $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, εφαρμόζεται το κριτήριο των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, και $x_n \rightarrow 1$.

9. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Εξετάστε αν συγκλίνει η ακολουθία $x_n = \frac{[n\alpha]}{n}$ και, αν ναι, βρείτε το όριο της.

Υπόδειξη. Από τον ορισμό του ακεραίου μέρους έχουμε $[n\alpha] \leq n\alpha < [n\alpha] + 1$, άρα

$$nx_n \leq n\alpha < nx_n + 1.$$

Έπεται ότι

$$\alpha - \frac{1}{n} < x_n \leq \alpha,$$

άρα $x_n \rightarrow \alpha$.

10. Έστω $\alpha > 0$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $b_n = \frac{1+n\alpha}{(1+\alpha)^n}$ είναι φθίνουσα και προσδιορίστε το όριο της.

Υπόδειξη. Η (b_n) έχει θετικούς όρους. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)\alpha}{(1+n\alpha)(1+\alpha)} = \frac{1+(n+1)\alpha}{1+(n+1)\alpha+n\alpha^2} < 1$$

άρα η (b_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{1+(n+1)\alpha}{(1+n\alpha)(1+\alpha)} = \frac{n+1}{n} \frac{\alpha + \frac{1}{n+1}}{\alpha + \frac{1}{n}} \frac{1}{1+\alpha} \rightarrow \frac{1}{1+\alpha} < 1.$$

Από το κριτήριο του λόγου, $b_n \rightarrow 0$.

11. Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$ και $b_n \rightarrow +\infty$.

(α) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > \delta$.

(β) Αποδείξτε ότι $a_n b_n \rightarrow +\infty$.

Υπόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon = a/2 > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$|a_n - a| < \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}.$$

Θέτοντας $\delta = a/2$ παίρνουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω $M > 0$. Αφού $b_n \rightarrow +\infty$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $b_n > M/\delta$ για κάθε $n \geq n_1$. Θέτουμε $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$. Τότε, για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε $a_n b_n > \delta(M/\delta) = M$. Με βάση τον ορισμό, $a_n b_n \rightarrow +\infty$.

12. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. *Υπόδειξη:* Εξετάστε πρώτα αν η (y_n) είναι μονότονη.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

άρα η (y_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επίσης,

$$y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

αφού το άθροισμα που ορίζει τον y_n έχει n προσθετέους το πολύ ίσους με $\frac{1}{n+1}$. Άρα, η (y_n) είναι άνω φραγμένη. Από το θεώρημα σύγκλισης μονότονων ακολουθιών, η (y_n) συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

13. Θέτουμε $a_1 = \sqrt{6}$ και, για κάθε $n = 1, 2, \dots$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία $(a_n)_n$.

Υπόδειξη. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον 3. Άρα, $a_n \rightarrow x$ για κάποιον x που ικανοποιεί την $x = \sqrt{6+x}$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι -2 και 3 . Αφού η (a_n) έχει θετικούς όρους, $a_n \rightarrow 3$.

14. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) με $a_1 = 1$ και

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{a_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Εξετάστε αν συγκλίνει.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν η (a_n) συγκλίνει τότε το όριο της θα ικανοποιεί την $x = \frac{2x+1}{x+1}$ (εξηγήστε γιατί). Άρα $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η (a_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $a_n \neq -1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η (a_n) είναι αύξουσα (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι αν $a_m \leq a_{m+1}$ τότε

$$a_{m+2} - a_{m+1} = \frac{a_{m+1} - a_m}{(a_{m+1} + 1)(a_m + 1)} \geq 0.$$

(iii) Η (a_n) είναι άνω φραγμένη (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$a_{m+1} = \frac{2a_m + 1}{a_m + 1} \leq \frac{2a_m + 2}{a_m + 1} = 2$$

για κάθε m . Θα μπορούσατε επίσης να δείξετε ότι $a_m \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ για κάθε m (αφού, από τα παραπάνω, αυτό είναι το «υποφίηφο όριο» της αύξουσας ακολουθίας (a_n)).

Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει (στον $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

15. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow a$ αν και μόνο αν οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στο a .

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) και (a_{2k-1}) συγκλίνουν στον a .

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_1$ ισχύει $|a_{2k} - a| < \varepsilon$. Επίσης, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $k \geq n_2$ ισχύει $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$. Αν θέσουμε $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ τότε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $|a_n - a| < \varepsilon$.

[Πράγματι, παρατηρήστε ότι αν ο n είναι άρτιος τότε $n = 2k$ για κάποιον $k \geq n_1$ ενώ αν ο n είναι περιττός τότε $n = 2k - 1$ για κάποιον $k \geq n_2$.]

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $a_n \rightarrow a$.

Το αντίστροφο είναι απλό: έχουμε δει ότι αν μια ακολουθία (a_n) συγκλίνει στον $a \in \mathbb{R}$ τότε κάθε υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) συγκλίνει στον a .

16. Έστω (a_n) μια ακολουθία. Υποθέτουμε ότι οι υπακολουθίες (a_{2k}) , (a_{2k-1}) και (a_{3k}) συγκλίνουν. Αποδείξτε ότι:

(α) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k}$.

(β) Η (a_n) συγκλίνει.

Υπόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $a_{2k} \rightarrow x$, $a_{2k-1} \rightarrow y$ και $a_{3k} \rightarrow z$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Η (a_{6k}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k}) και υπακολουθία της (a_{3k}) . Άρα, η (a_{6k}) συγκλίνει και $x = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = z$.

(ii) Η (a_{6k-3}) είναι ταυτόχρονα υπακολουθία της (a_{2k-1}) και υπακολουθία της (a_{3k}) . Άρα, η (a_{6k-3}) συγκλίνει και $y = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = z$.

Έπεται ότι $x = y = z$. Αφού οι (a_{2k}) και (a_{2k-1}) έχουν το ίδιο όριο, η Άσκηση 15 δείχνει ότι η (a_n) συγκλίνει.

Β' Ομάδα

17. Για καθεμιά από τις παρακάτω ακολουθίες εξετάστε αν συγκλίνει, και αν ναι, βρείτε το όριό της:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{5^n + n}{6^n - n}, & \beta_n &= \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}, & \gamma_n &= (\sqrt[n]{n} - 1)^n \\ \delta_n &= n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right), & \varepsilon_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n^2) \\ \lambda_n &= (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}, & \mu_n &= \frac{n^n}{n!}, & \vartheta_n &= \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) $\alpha_n = \frac{5^n + n}{6^n - n} = \frac{(5/6)^n + (n/6^n)}{1 - (n/6^n)} \rightarrow \frac{0-0}{1-0} = 0$.

(β) $\beta_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{2} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} \leq \beta_n \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \sqrt[n]{2}.$$

Αφού $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$, από το κριτήριο ισοσυγκλιουσών ακολουθιών βλέπουμε ότι $\beta_n \rightarrow 1/2$.

(γ) $\gamma_n = (\sqrt[n]{n} - 1)^n$: με το κριτήριο της ρίζας. Παρατηρήστε ότι $\sqrt[n]{\gamma_n} = \sqrt[n]{n} - 1 \rightarrow 1 - 1 = 0 < 1$. Άρα, $\gamma_n \rightarrow 0$.

(δ) $\delta_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} \right)$: γράφουμε

$$\begin{aligned} \delta_n &= n^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \\ &= \frac{n^2}{n(n+1)} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}}} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(ε) $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cos(n^2)$: η $(\cos(n^2))$ είναι φραγμένη απολύτως από 1 και η $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ μηδενική. Άρα, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

(λ) $\lambda_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^2+1}$: δεν συγχλίνει, αφού $\lambda_{2n} \rightarrow 1$ και $\lambda_{2n-1} \rightarrow -1$.

(μ) $\mu_n = \frac{n^n}{n!}$: παρατηρήστε ότι $\mu_n = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdots \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{1} \geq n$. Άρα, $\mu_n \rightarrow +\infty$.

(θ) $\vartheta_n = \frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$: παρατηρήστε ότι

$$\frac{\vartheta_{n+1}}{\vartheta_n} = \frac{2(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

άρα $\vartheta_n \rightarrow 0$.

18. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ b_n &= \frac{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}{n^n} \\ \gamma_n &= \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \cdots + \frac{1}{(2n)!} \\ \delta_n &= \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \cdots + \frac{1}{(2n)^{2/3}}. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

Αφού $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1$, συμπεραίνουμε ότι $a_n \rightarrow 1$.

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n^2 + n^3 + \cdots + n^n \leq 1 + n + n^2 + n^3 + \cdots + n^n.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x = n$, παίρνουμε

$$1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n \leq 1 + n + n^2 + \dots + n^n = \frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}.$$

Συνεπώς,

$$b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^n} \leq \frac{n^{n+1} - 1}{n^n(n-1)} = \frac{n^{n+1} - 1}{n^{n+1} - n^n} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$b_n = \frac{1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n}{n^n} \geq \frac{n^n}{n^n} = 1.$$

Δηλαδή,

$$1 \leq b_n \leq \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Από το κριτήριο παρεμβολής έπεται ότι $b_n \rightarrow 1$.

(γ) Παρατηρήστε ότι

$$0 < \gamma_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots + \frac{1}{(2n)!} \leq \frac{n+1}{n!}.$$

Από το κριτήριο του λόγου προκύπτει εύκολα ότι $\frac{n+1}{n!} \rightarrow 0$. Άρα, $\gamma_n \rightarrow 0$.

(δ) Παρατηρήστε ότι

$$\delta_n = \frac{1}{n^{2/3}} + \frac{1}{(n+1)^{2/3}} + \dots + \frac{1}{(2n)^{2/3}} \geq \frac{n+1}{(2n)^{2/3}} > \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{4}} \rightarrow +\infty.$$

Άρα, $\delta_n \rightarrow +\infty$.

19. Έστω A μη κενό και άνω φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R} . Αν $a = \sup A$, αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Αν, επιπλέον, το $\sup A$ δεν είναι στοιχείο του A , αποδείξτε ότι η παραπάνω ακολουθία μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι γνησίως αύξουσα.

Υπόδειξη. Από τον βασικό χαρακτηρισμό του supremum, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x = x(\varepsilon) \in A$ ώστε $a - \varepsilon < x \leq a$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το παραπάνω για $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$, μπορείτε να βρείτε ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a - \frac{1}{n} < a_n \leq a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $a_n \rightarrow a$.

Ας υποθέσουμε, επιπλέον, ότι ο $a = \sup A$ δεν είναι στοιχείο του A . Υπάρχει $a_1 \in A$ που ικανοποιεί την $a - 1 < a_1 \leq a$. Όμως, $a_1 \neq a$ (διότι $a \notin A$), άρα $a - 1 < a_1 < a$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί $a_1, \dots, a_m \in A$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $a_1 < a_2 < \dots < a_m < a$.

(ii) Για κάθε $k = 1, \dots, m$ ισχύει $a - \frac{1}{k} < a_k < a$.

Τότε, ο $s_m = \max\{a - \frac{1}{m+1}, a_m\}$ είναι μικρότερος από τον a . Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $a_{m+1} \in A$ που ικανοποιεί την $s_m < a_{m+1} < a$ (εξηγήστε γιατί). Άρα, $a_m < a_{m+1}$ και $a - \frac{1}{m+1} < a_{m+1} < a$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (a_n) στοιχείων του A που ικανοποιούν την $a - \frac{1}{n} < a_n < a$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $a_n \rightarrow a$.

20. Έστω (a_n) ακολουθία με $a_n \rightarrow a$. Ορίζουμε μια δεύτερη ακολουθία (b_n) θέτοντας

$$b_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Αποδείξτε ότι $b_n \rightarrow a$.

Υπόδειξη. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a = 0$ και δείχνουμε ότι $b_n \rightarrow 0$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $|a_n| < \varepsilon/2$. Τότε, για κάθε $n > n_1$ έχουμε

$$|b_n| \leq \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{n - n_1}{n} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ο αριθμός $A := |a_1 + \cdots + a_{n_1}|$ εξαρτάται από το ε (αφού ο n_1 εξαρτάται από το ε) όχι όμως από το n . Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα, υπάρχει $n_2(A) = n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_2$ έχουμε

$$\frac{|a_1 + \cdots + a_{n_1}|}{n} = \frac{A}{n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν λοιπόν πάρουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει η

$$|b_n| \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Με βάση τον ορισμό, $b_n \rightarrow 0$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την ακολουθία $a'_n := a_n - a$. Τότε, $a'_n \rightarrow 0$. Άρα,

$$b_n - a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} = \frac{a'_1 + \cdots + a'_n}{n} \rightarrow 0.$$

Έπεται ότι $b_n \rightarrow a$.

21. Έστω (a_n) ακολουθία θετικών όρων με $a_n \rightarrow a > 0$. Αποδείξτε ότι

$$b_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \rightarrow a \quad \text{και} \quad \gamma_n := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \rightarrow a.$$

Υπόδειξη. Αφού $\frac{1}{a_n} \rightarrow \frac{1}{a}$, η Άσκηση 20 δείχνει ότι

$$\frac{1}{b_n} = \frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \rightarrow \frac{1}{a}.$$

Άρα, $b_n \rightarrow a$. Για την γ_n , παρατηρήστε ότι $b_n \leq \gamma_n \leq \delta_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$ από την ανισότητα αρμονικού-γεωμετρικού-αριθμητικού μέσου, και εφαρμόστε το κριτήριο των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών σε συνδυασμό με την Άσκηση 20.

22. Έστω (a_n) ακολουθία με $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{a_n}{n} \rightarrow a.$$

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\frac{a_n}{n} = \frac{(a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1}{n} = \frac{b_{n-1} + \cdots + b_1}{n} + \frac{a_1}{n}$$

όπου $b_n := a_{n+1} - a_n \rightarrow a$. Τώρα, χρησιμοποιήστε την Άσκηση 20.

23. Έστω (a_n) αύξουσα ακολουθία με την ιδιότητα

$$b_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \rightarrow a.$$

Αποδείξτε ότι $a_n \rightarrow a$.

Υπόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη. Τότε, η (a_n) συγκλίνει και, από την Άσκηση 20, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι $a_1 \geq 0$. Τότε, $a_n \geq a_1 \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (b_n) συγκλίνει, είναι φραγμένη: ειδικότερα, υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $a_1 + \dots + a_k = kb_k \leq kM$. Παίρνοντας $k = 2n$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η (a_n) είναι αύξουσα, γράφουμε

$$na_n \leq a_{n+1} + \dots + a_{2n} \leq a_1 + \dots + a_{2n} = 2nb_{2n} \leq 2nM.$$

Δηλαδή, η (a_n) είναι άνω φραγμένη από τον $2M$. Πού χρησιμοποιήθηκε η υπόθεση ότι οι όροι της (a_n) είναι μη αρνητικοί;

Για τη γενική περίπτωση, θεωρήστε την (αύξουσα ακολουθία) $a'_n = a_n - a_1$ και την $b'_n := \frac{a'_1 + \dots + a'_n}{n}$. Από την υπόθεση έχουμε $b'_n \rightarrow a - a_1$ και, όπως ορίστηκε η (a'_n) , έχουμε $a'_1 = 0$. Άρα, η (a'_n) είναι άνω φραγμένη. Έπεται ότι η (a_n) είναι άνω φραγμένη (εξηγήστε γιατί).

24. Αποδείξτε ότι: αν $a_n > 0$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, τότε $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_1 \frac{a_2}{a_1} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n},$$

όπου $b_1 = a_1$ και $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, $n = 2, 3, \dots$. Από την υπόθεση έχουμε $b_n \rightarrow a$ και, από την Άσκηση 21, η ακολουθία των γεωμετρικών μέσων της (b_n) συγκλίνει στον a . Δηλαδή, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

25. Προσδιορίστε τα όρια των ακολουθιών:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right]^{1/n} \\ \beta_n &= \frac{1}{n} [(n+1)(n+2) \dots (n+n)]^{1/n} \\ \gamma_n &= \left[\frac{2}{1} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n} \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για την $\alpha_n = \left[\frac{(2n)!}{(n!)^2} \right]^{1/n}$ θέτουμε $x_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \rightarrow 4.$$

Άρα, $\alpha_n \rightarrow 4$ από την Άσκηση 24.

Για την $\beta_n = \frac{1}{n} [(n+1)(n+2) \dots (n+n)]^{1/n} = \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n} \right]^{1/n}$ θέτουμε $y_n = \frac{(n+1)(n+2) \dots (n+n)}{n^n}$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \rightarrow \frac{4}{e}.$$

Άρα, $\beta_n \rightarrow \frac{4}{e}$ από την Άσκηση 24.

Για την $\gamma_n = \left[\frac{2}{1} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right]^{1/n}$ θέτουμε $z_n = \frac{2}{1} \left(\frac{3}{2} \right)^2 \left(\frac{4}{3} \right)^3 \dots \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$ και παρατηρούμε ότι

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} \rightarrow e.$$

Άρα, $\gamma_n \rightarrow e$ από την Άσκηση 24.

26. Υπολογίστε τα όρια των παρακάτω ακολουθιών:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \quad b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \quad c_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

και

$$d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n, \quad e_n = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^n.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$. Για παράδειγμα,

(α) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = x_{n-1} \rightarrow e$.

(β) $b_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n+1}{n+2} x_{n+1} x_n \rightarrow e^2$.

(γ) $\frac{1}{c_n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \frac{n}{n-1} x_{n-1} \rightarrow e$, άρα $c_n \rightarrow \frac{1}{e}$.

(δ) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{1}{e} \cdot e = 1$.

(ε) $e_n^3 = \left(1 + \frac{2}{3n}\right)^{3n} \rightarrow e^2$ (γιατί;), άρα $e_n \rightarrow \sqrt[3]{e^2}$.

27. Έστω (a_n) , (b_n) δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $b_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

(α) Αν, επιπλέον, η (b_n) είναι φραγμένη, αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθιών για τις οποίες $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ αλλά δεν ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε $a_n - b_n = b_n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$. Από την υπόθεση, η (b_n) είναι φραγμένη και η $\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right)$ είναι μηδενική. Συνεπώς, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

(β) Θεωρήστε τις $a_n = n + 1$ και $b_n = n$.

28. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2},$$

δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ δεν είναι βασική ακολουθία. Συμπεράνατε ότι $a_n \rightarrow +\infty$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ είναι βασική ακολουθία. Τότε, παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $m, n \geq n_0$ ισχύει $|a_m - a_n| < \frac{1}{4}$.

Πάρτε $n \geq n_0$ και $m = 2n > n \geq n_0$. Τότε, $|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{4}$. Αυτό δεν μπορεί να ισχύει, διότι

$$\begin{aligned} |a_{2n} - a_n| &= \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Εξηγήστε τώρα τα εξής:

(α) Αφού η (a_n) δεν είναι βασική ακολουθία, η (a_n) δεν συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό.

(β) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν συγκλίνει, η (a_n) δεν είναι άνω φραγμένη.

(γ) Αφού η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, αναγκαστικά $a_n \rightarrow +\infty$.

29. Έστω $0 < \mu < 1$ και ακολουθία (a_n) για την οποία ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Υπόδειξη. Έστω $a = a_1$ και $b = a_2$. Από την $|a_{n+1} - a_n| \leq \mu |a_n - a_{n-1}|$ έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \mu^{n-1} |a_2 - a_1| = |b - a| \cdot \mu^{n-1}.$$

Αν λοιπόν $m, n \in \mathbb{N}$ και $m > n$, τότε

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\ &\leq |b - a| (\mu^{m-1} + \dots + \mu^{m-n}) \\ &= |b - a| \cdot \mu^{n-1} \cdot \frac{1 - \mu^{m-n}}{1 - \mu} \\ &\leq \frac{|b - a| \mu^{n-1}}{1 - \mu} \\ &= \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^n. \end{aligned}$$

Θεωρήστε $\varepsilon > 0$ και βρείτε $n_0 \in \mathbb{N}$ που ικανοποιεί την $\frac{|b-a|}{\mu(1-\mu)} \mu^{n_0} < \varepsilon$. Τέτοιος n_0 υπάρχει γιατί $\mu^n \rightarrow 0$ όταν $n \rightarrow \infty$. Τότε, αν $m > n \geq n_0$,

$$|a_m - a_n| \leq \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^n \leq \frac{|b - a|}{\mu(1 - \mu)} \cdot \mu^{n_0} < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

30. Ορίζουμε $a_1 = a$, $a_2 = b$ και $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 2$. Εξετάστε αν η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι: για κάθε $n \geq 2$ ισχύει

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n = -\frac{a_n - a_{n-1}}{2},$$

δηλαδή

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}|.$$

Από την Άσκηση 29, η (a_n) είναι βασική ακολουθία.

Γ' Ομάδα

31. Αποδείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας ρητών αριθμών, καθώς επίσης και όριο γνησίως αύξουσας ακολουθίας άρρητων αριθμών.

Υπόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $q_1 \in \mathbb{Q}$ που ικανοποιεί την $x - 1 < q_1 < x$ (από την πυκνότητα του \mathbb{Q} στο \mathbb{R}).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί ρητούς αριθμούς q_1, \dots, q_m που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $q_1 < q_2 < \dots < q_m < x$.

(ii) Για κάθε $k = 1, \dots, m$ ισχύει $x - \frac{1}{k} < q_k < x$.

Τότε, ο $s_m = \max\{x - \frac{1}{m+1}, q_m\}$ είναι μικρότερος από τον x . Λόγω της πυκνότητας των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, μπορούμε να βρούμε $q_{m+1} \in \mathbb{Q}$ στο ανοικτό διάστημα (s_m, x) . Τότε, $q_m < q_{m+1}$ και $x - \frac{1}{m+1} < q_{m+1} < x$.

Επαγωγικά, ορίζεται γνησίως αύξουσα ακολουθία (q_n) ρητών αριθμών που ικανοποιούν την $x - \frac{1}{n} < q_n < x$. Από το κριτήριο των ισοσυγκλινοσών ακολουθιών, $q_n \rightarrow x$.

32. Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow a > 0$, τότε

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Υπόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a > 0$ και $a_n \rightarrow a$, θα υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n > a/2$. Δηλαδή, τελικά όλοι οι όροι της (a_n) ξεπερνούν τον θετικό αριθμό $a/2$.

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την (a_n) με $\varepsilon = a/2 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$|a_n - a| < \varepsilon = a/2 \implies a/2 < a_n < 3a/2.$$

Τότε, ο θετικός αριθμός $m := \min\{a_1, \dots, a_{n_0}, a/2\}$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, $\inf(A) \geq m > 0$.

33. Αποδείξτε ότι αν (a_n) είναι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $a_n \rightarrow 0$, τότε το σύνολο $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ έχει μέγιστο στοιχείο.

Υπόδειξη. Η βασική ιδέα είναι ότι, αφού $a_1 > 0$ και $a_n \rightarrow 0$, θα υπάρχει n_0 με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει $a_n < a_1$. Δηλαδή, υπάρχει στοιχείο του A μεγαλύτερο από «όλα» (εκτός από πεπερασμένα το πλήθος) τα στοιχεία του A .

Πράγματι, αν εφαρμόσετε τον ορισμό του ορίου για την (a_n) με $\varepsilon = a_1 > 0$, μπορείτε να βρείτε $n_0 \in \mathbb{R}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$a_n = |a_n - 0| < \varepsilon = a_1.$$

Τότε, ο μεγαλύτερος από τους a_1, \dots, a_{n_0} είναι το μέγιστο στοιχείο του A : ανήκει στο A και είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε a_n (εξηγήστε γιατί).

34. Ορίζουμε μια ακολουθία (α_n) με $\alpha_1 = 0$ και $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η (α_n) είναι αύξουσα.

(β) $\alpha_n \rightarrow 1$.

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\alpha_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2} - \alpha_n = \frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n + 1}{2\alpha_n + 2} = \frac{(\alpha_n - 1)^2}{2\alpha_n + 2} \geq 0,$$

άρα η (α_n) είναι αύξουσα.

(β) Η (α_n) είναι άνω φραγμένη από τον 1. Αποδείξτε το επαγωγικά: αν $\alpha_n \leq 1$ τότε $3\alpha_n^2 + 1 = 2\alpha_n^2 + \alpha_n^2 + 1 \leq 2\alpha_n + 1 + 1 = 2\alpha_n + 2$, οπότε $\alpha_{n+1} = \frac{3\alpha_n^2 + 1}{2\alpha_n + 2} \leq 1$.

Αφού η (α_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συγκλίνει σε κάποιον $x > 0$ ο οποίος ικανοποιεί την $x = \frac{3x^2 + 1}{2x + 2}$, δηλαδή $x^2 - 2x + 1 = 0$. Άρα, $x = 1$.

35. Θεωρούμε την ακολουθία (α_n) που ορίζεται από τις $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2\alpha_n + 3}{5}$, $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι η (α_n) συγκλίνει και υπολογίστε το όριο της.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\alpha_2 = \frac{9}{5} < 3 = \alpha_1$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι η (α_n) είναι φθίνουσα. Αφού (απλό) η (α_n) είναι και κάτω φραγμένη από τον $3/5$, συγκλίνει στη λύση της εξίσωσης $x = \frac{2x+3}{5}$. Δηλαδή, $\alpha_n \rightarrow 1$.

36. Έστω $a > 0$. Θεωρούμε τυχόν $x_1 > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) , τουλάχιστον από τον δεύτερο όρο της και πέρα, είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον \sqrt{a} . Βρείτε το $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Υπόδειξη. Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η (x_n) ορίζεται καλά. Αρκεί να δείξετε ότι $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $x_n > 0$ για κάθε n .

(ii) Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq \sqrt{a}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει $x_n \geq x_{n+1}$ (με επαγωγή). Παρατηρήστε ότι

$$x_n - x_{n+1} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} \geq 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αφού η $(x_n)_{n \geq 2}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, συγκλίνει. Το όριο x είναι θετικό (από τα προηγούμενα έχουμε $x \geq \sqrt{a}$) και πρέπει να ικανοποιεί την $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$, δηλαδή $x^2 = a$. Άρα, $x = \sqrt{a}$.

37. Έστω $0 < a_1 < b_1$. Ορίζουμε αναδρομικά δύο ακολουθίες θέτοντας

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{και} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

(α) Αποδείξτε ότι η (a_n) είναι αύξουσα και η (b_n) φθίνουσα.

(β) Αποδείξτε ότι οι $(a_n), (b_n)$ συγκλίνουν και έχουν το ίδιο όριο.

Υπόδειξη. Αποδείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) $a_n > 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό ορισμό (ανεξάρτητα μάλιστα από το ποιοί είναι οι a_n και b_n) έχετε

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

(iii) Η (a_n) είναι αύξουσα. Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geq \sqrt{a_n^2} = a_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Η (b_n) είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{2b_n}{2} = b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από τα παραπάνω, η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον b_1 , ενώ η (b_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_1 (εξηγήστε γιατί). Άρα, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε $a_n \rightarrow a$ και $b_n \rightarrow b$. Από την $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ έπεται ότι $b = \frac{a+b}{2}$, δηλαδή $a = b$.

38. Επιλέγουμε $x_1 = a$, $x_2 = b$ και θέτουμε

$$x_{n+2} = \frac{x_n}{3} + \frac{2x_{n+1}}{3}.$$

Αποδείξτε ότι η (x_n) συγκλίνει και βρείτε το όριό της. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $y_n = x_{n+1} - x_n$ και βρείτε αναδρομικό τύπο για την (y_n) .]

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$x_{n+2} - x_{n+1} = -\frac{x_{n+1} - x_n}{3}.$$

Άρα, η ακολουθία $y_n = x_{n+1} - x_n$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση $y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$. Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$y_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} y_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} (b-a).$$

Παρατηρήστε ότι

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = a + y_1 + \dots + y_{n-1}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x_n &= a + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) (b-a) \\ &= a + \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} (b-a) \rightarrow a + \frac{3}{4}(b-a) = \frac{3b+a}{4}. \end{aligned}$$

39. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με την ιδιότητα: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $1/k < \varepsilon$. Το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq k\}$ είναι πεπερασμένο, άρα έχει μέγιστο στοιχείο. Θέτουμε $n_0 = \max(A_k) + 1$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $n \notin A_k$, άρα $|a_n| > k$ (ειδικότερα, $a_k \neq 0$). Έπεται ότι, για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left|\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

Άρα, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

40. Θεωρούμε γνωστό ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$. Αποδείξτε ότι, για κάθε ρητό αριθμό q , ισχύει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n = e^q.$$

Υπόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι, για κάθε $x > 0$, η ακολουθία $t_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα. Ένας τρόπος για να το δούμε είναι εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου για τους αριθμούς $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 1 + \frac{x}{n}$ και $s_{n+1} = 1$. Έχουμε

$$s_1 \cdots s_n s_{n+1} \leq \left(\frac{s_1 + \dots + s_n + s_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1},$$

δηλαδή

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot 1 \leq \left(\frac{n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Αφού $n\left(1 + \frac{x}{n}\right) + 1 = n + 1 + x$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Θεωρούμε θετικό ρητό $q = \frac{k}{m}$, όπου $k, m \in \mathbb{N}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left(1 + \frac{k}{mn}\right)^n \rightarrow e^{k/m}.$$

Ισοδύναμα, ότι

$$b_n = \left(1 + \frac{k}{mn}\right)^{mn} \rightarrow e^k.$$

Παρατηρήστε ότι η (b_n) είναι αύξουσα: ζητάμε

$$b_{n+1} = t_{m(n+1)}(k) \geq t_{mn}(k) = b_n,$$

το οποίο ισχύει για κάθε n , αφού η $t_n(k)$ είναι αύξουσα και $m(n+1) > mn$. Επιπλέον,

$$b_{kn} = \left(1 + \frac{k}{mkn}\right)^{mkn} = \left[\left(1 + \frac{1}{mn}\right)^{mn}\right]^k \rightarrow e^k,$$

διότι $\left(1 + \frac{1}{mn}\right)^{mn} \rightarrow e$. Τώρα, για τυχόν $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε n_0 ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$e^k - \varepsilon < b_{kn} < e^k + \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n > kn_0$ έχουμε

$$e^k - \varepsilon < b_{kn_0} \leq b_n \leq b_{kn} < e^k + \varepsilon.$$

Συνεπώς, $b_n \rightarrow e^k$.

Για την περίπτωση $q < 0$ δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο.

41. (Λήμμα του Stoltz) Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και έστω (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. Αποδείξτε ότι αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda,$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ ή $\lambda = +\infty$, τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (η περίπτωση $\lambda = +\infty$ εξετάζεται ανάλογα). Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $b_n \rightarrow +\infty$, βλέπουμε ότι υπάρχει $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει $b_n > 0$ και

$$\lambda - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < \lambda + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού η (b_n) είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε $b_{n+1} - b_n > 0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι: για κάθε $n > n_1$ ισχύει

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_1}) < a_n - a_{n_1} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right)(b_n - b_{n_1}).$$

Διαιρώντας με b_n παίρνουμε

$$\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} \right] = \lambda - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} \right] = \lambda + \frac{\varepsilon}{2}$$

γιατί $b_n \rightarrow +\infty$ όταν $n \rightarrow \infty$. Άρα (εξηγήστε γιατί) υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται από το n_1 και από το ε , ώστε: για κάθε $n \geq n_2$ ισχύει

$$\lambda - \varepsilon < \left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \left(\lambda + \frac{\varepsilon}{2}\right) \left(1 - \frac{b_{n_1}}{b_n}\right) + \frac{a_{n_1}}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Συνεπώς, αν $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, έχουμε

$$\lambda - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < \lambda + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda.$$

42. Ορίζουμε ακολουθία (a_n) με $0 < a_1 < 1$ και $a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$, $n = 1, 2, \dots$. Αποδείξτε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 1$.

Υπόδειξη. Επαγωγικά δείχνουμε ότι $0 < a_n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (για το επαγωγικό βήμα παρατηρήστε ότι αν $0 < a_n < 1$ τότε έχουμε και $0 < 1 - a_n < 1$, οπότε πολλαπλασιάζοντας βλέπουμε ότι $0 < a_n(1 - a_n) < 1$, δηλαδή $0 < a_{n+1} < 1$).

Από την αναδρομική σχέση έχουμε

$$a_{n+1} - a_n = -a_n^2 < 0,$$

άρα $a_n > a_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, η (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού είναι και κάτω φραγμένη από το 0, η (a_n) συγκλίνει σε κάποιον $x \geq 0$. Πάλι από την αναδρομική σχέση, ο x ικανοποιεί την $x = x(1 - x) = x - x^2$, δηλαδή $x^2 = 0$. Άρα, $a_n \rightarrow 0$.

Με βάση τα παραπάνω, η ακολουθία $b_n = \frac{1}{a_n}$ ορίζεται καλά, είναι γνησίως αύξουσα, και $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$ (εξηγήστε γιατί). Γράφουμε

$$n a_n = \frac{n}{b_n}$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα του Stolz: έχουμε

$$\frac{(n+1) - n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{a_n(1-a_n)} - \frac{1}{a_n}} = 1 - a_n \rightarrow 1,$$

άρα

$$n a_n = \frac{n}{b_n} \rightarrow 1$$

από την Άσκηση 41.