Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 7: Ολοκλήρωμα Riemann

Α′ Ομάδα

1. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς (αιτιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

(α) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι φραγμένη.

(β) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε παίρνει μέγιστη τιμή.

(γ) Αν η f είναι φραγμένη, τότε είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(δ) Αν η $|f|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(ε) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $c \in [a, b]$ ώστε $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$.

(στ) Αν η f είναι φραγμένη και αν $L(f, P) = U(f, P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a, b]$, τότε η f είναι σταθερή.

(ζ) Αν η f είναι φραγμένη και αν υπάρχει διαμέριση P ώστε $L(f, P) = U(f, P)$, τότε η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

(η) Αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Υπόδειξη. (α) *Σωστό.* Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann: εξετάζουμε αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη μόνο αν η f είναι φραγμένη.

(β) *Λάθος.* Η συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(x) = 1 - x$ αν $0 < x \leqslant 1$ δεν παίρνει μέγιστη τιμή, είναι όμως ολοκληρώσιμη: για κάθε $0 < b < 1$, η f είναι συνεχής στο $[b, 1]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[b, 1]$. Από την Άσκηση 9 (βλέπε παρακάτω) η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.

(γ) *Λάθος.* Η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in \mathbb{Q}$ και $f(x) = -1$ αν $x \notin \mathbb{Q}$ είναι φραγμένη, αλλά δεν είναι ολοκληρώσιμη: για κάθε διαμέριση P του $[0, 1]$ έχουμε $U(f, P) = 1$ και $L(f, P) = -1$, άρα

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = -1 < 1 = \overline{\int_0^1} f(x)\,dx.$$

(δ) *Λάθος.* Για τη συνάρτηση f του προηγούμενου ερωτήματος έχουμε $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Άρα, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, ενώ η f δεν είναι ολοκληρώσιμη.

(ε) *Λάθος.* Η $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 1$ αν $x \in [0, 1]$ και $f(x) = -1$ αν $x \in (1, 2]$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int_0^2 f(x)\,dx = 0$ (εξηγήστε γιατί). Όμως, δεν υπάρχει $c \in [0, 2]$ ώστε $2f(c) = \int_0^2 f(x)\,dx$. Θα είχαμε $f(c) = 0$, ενώ η f δεν μηδενίζεται πουθενά στο $[0, 2]$.

(στ) *Σωστό.* Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή. Τότε, υπάρχουν $y, z \in [a,b]$ ώστε $f(y) < f(z)$. Θεωρήστε τη διαμέριση $Q = \{a, b\}$ του $[a,b]$ (που περιέχει μόνο τα άκρα a και b του διαστήματος $[a,b]$). Τότε,

$$U(f,Q) - L(f,Q) = (M_0 - m_0)(b-a)$$

όπου

$$m_0 = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leqslant f(y) < f(z) \leqslant \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M_0.$$

Άρα, $M_0 - m_0 > 0$ οπότε $U(f,Q) - L(f,Q) > 0$. Αυτό είναι άτοπο: από την υπόθεση έχουμε $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

Άρα, η f είναι σταθερή: υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in [a,b]$, και το ολοκλήρωμα της f στο $[a,b]$ ισούται με $c(b-a)$.

(ζ) *Σωστό.* Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) = L(f,P)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) = U(f,P) - L(f,P) = 0,$$

και, αφού $m_k \leqslant M_k$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, συμπεραίνουμε ότι

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\} = M_k$$

για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Δηλαδή, η $f(x) = m_k = M_k$ για κάθε $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

Παρατηρήστε τώρα ότι: $x_1 \in [x_0, x_1]$, άρα $f(x_1) = m_0 = M_0$. Όμως, $x_1 \in [x_1, x_2]$, άρα $f(x_1) = m_1 = M_1$. Δηλαδή, $m_0 = M_0 = m_1 = M_1$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (για τα επόμενα υποδιαστήματα), συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\alpha = m_0 = M_0 = m_1 = M_1 = \cdots = m_k = M_k = \cdots = m_{n-1} = M_{n-1}.$$

Έπεται ότι $f(x) = \alpha$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δηλαδή, η f είναι σταθερή.

(η) *Σωστό.* Θεωρήστε τυχούσα διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Σε κάθε υποδιάστημα $[x_k, x_{k+1}]$ υπάρχει ρητός αριθμός q_k. Από την υπόθεση έχουμε $f(q_k) = 0$, άρα $m_k \leqslant 0 \leqslant M_k$. Έπεται ότι

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leqslant 0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = U(f,P).$$

Άρα, $\sup\limits_P L(f,P) \leqslant 0$ και $\inf\limits_P U(f,P) \geq 0$. Η f είναι ολοκληρώσιμη, άρα

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_P L(f,P) \leqslant 0 \quad \text{και} \quad \int_a^b f(x)dx = \inf_P U(f,P) \geq 0.$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

2. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leqslant 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Υπόδειξη. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant A$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2Ab < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q) - L(f,Q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P = \{0\} \cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P) - L(f,P) = b(M_0 - m_0) + U(f,Q) - L(f,Q) < b(M_0 - m_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0 = \sup\{f(x) : 0 \leqslant x \leqslant b\} \leqslant A \quad \text{και} \quad m_0 = \inf\{f(x) : 0 \leqslant x \leqslant b\} \geq -A.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0 - m_0 \leqslant 2A$, άρα

$$U(f,P) - L(f,P) < 2Ab + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

3. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ αν $x \neq 0$ και $f(0) = 2$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Παρατηρήστε ότι η f είναι φραγμένη στο $[0,1]$ και, για κάθε $0 < b < 1$, η $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $[b,1]$, άρα ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Από την Άσκηση 2, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,0]$. Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

4. Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Δείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

Υπόδειξη. Ακριβώς όπως στην προηγούμενη Άσκηση, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,x_0]$ και στο $[x_0,b]$.

Σημείωση. Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνει ότι αν μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[a,b]$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

5. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες:

(α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$.

(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$.

Υπόδειξη. (α) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,1]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $1/n$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{f(1) - f(0)}{n} = \frac{1}{n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(β) $f : [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sin x$. Η f είναι αύξουσα. Θεωρήστε τη διαμέριση P_n του $[0,\pi/2]$ σε n ίσα υποδιαστήματα μήκους $\pi/(2n)$. Δείξτε ότι

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) = \frac{\pi(f(\pi/2) - f(0))}{2n} = \frac{\pi}{2n} \to 0.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,\pi/2]$.

6. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες στο $[0,2]$ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα τους (αν υπάρχει):

(α) $f(x) = x + [x]$.

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς.

Υπόδειξη. (α) $f(x) = x + [x]$. Η f είναι αύξουσα στο $[0,2]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Μπορείτε να γράψετε

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xdx + \int_0^2 [x]dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ίσο με 2 και το δεύτερο ίσο με 1 (εξηγήστε γιατί).

(β) $f(x) = 1$ αν $x = \frac{1}{k}$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$, και $f(x) = 0$ αλλιώς. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η f είναι φραγμένη.

(ii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας στο $[b,2]$ (είναι ακριβώς τόσα όσοι είναι οι φυσικοί k για τους οποίους $1/k \geq b$).

(iii) Αν $0 < b < 2$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,2]$ (από την σημείωση μετά την Άσκηση 3).

(iv) Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$ (από την Άσκηση 2).

7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Έστω ότι $\int_a^b f(x)dx = 0$. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) > 0$. Λόγω συνέχειας, η f παίρνει θετικές τιμές σε μια (αρκετά μικρή) περιοχή του x_0, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $a < x_0 < b$ (ότι $x_0 \neq a$ και $x_0 \neq b$).

Επιλέγουμε $\varepsilon = f(x_0)/2 > 0$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας: μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ (και αν χρειάζεται να το μικρύνουμε) ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και, για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} \quad \Longrightarrow \quad f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a,b]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_0-\delta} f(x)dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + \int_{x_0+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx + 0 \geq 2\delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} = \delta f(x_0) > 0. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Ο αντίστροφος ισχυρισμός ισχύει προφανώς.

8. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Υπόδειξη. Θεωρώντας την $h = f - g$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: αν $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και $\int_a^b h(x)dx = 0$, τότε υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $h(x_0) = 0$.

Ας υποθέσουμε ότι $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, είτε $h(x) > 0$ παντού στο $[a,b]$ ή $h(x) < 0$ παντού στο $[a,b]$ (αν η h έπαιρνε και αρνητικές και θετικές τιμές στο $[a,b]$ τότε, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, θα υπήρχε σημείο στο οποίο θα μηδενιζόταν).

Έστω λοιπόν ότι $h(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Η h παίρνει ελάχιστη θετική τιμή στο $[a,b]$: υπάρχει $y \in [a,b]$ ώστε $h(x) \geq h(y) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,

$$\int_a^b h(x)dx \geq h(y)(b-a) > 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Ομοίως καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

9. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Η f είναι συνεχής, μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την υπόθεση για την $g = f$. Τότε, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$. Η f^2 είναι συνεχής και μη αρνητική. Από την Άσκηση 7 συμπεραίνουμε ότι $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

10. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $g(a) = g(b) = 0$, ισχύει

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ ώστε $f(x_0) > 0$. Όπως στην Άσκηση 1 (στ), μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $a < x_0 - \delta < x_0 + \delta < b$ και $f(x) > f(x_0)/2 > 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$.

Ορίζουμε μια συνεχή συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ως εξής: θέτουμε $g(x) = 0$ στα $[a, x_0 - \delta]$ και $[x_0 + \delta, b]$, ορίζουμε $g(x_0) = f(x_0)$, και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[x_0 - \delta, x_0]$ και $[x_0, x_0 + \delta]$. Αφού $g(a) = g(b) = 0$, από την υπόθεση πρέπει να ισχύει $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Όμως,

$$0 = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)dx$$

και η fg είναι μη αρνητική στο $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Από την Άσκηση 7, έχουμε $f(x)g(x) = 0$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Ειδικότερα, $0 = f(x_0)g(x_0) = f^2(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο.

11. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)dx\right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx\right).$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$P(t) = \int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx.$$

Η P ορίζεται καλά: αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, η $tf+g$ (άρα και η $(tf+g)^2$) είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι η P είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού:

$$P(t) = t^2 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) + 2t \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) + \left(\int_a^b g^2(x)dx \right).$$

Αφού $P(t) \geq 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσα είναι μη αρνητική:

$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \cdot \left(\int_a^b g^2(x)dx \right) \leqslant 0.$$

12. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\left(\int_0^1 f(x)dx \right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με τυχόν διάστημα $[a,b]$;

Υπόδειξη. Εφαρμόστε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την f και τη σταθερή συνάρτηση $g \equiv 1$:

$$\left(\int_0^1 f(x) \cdot 1 \, dx \right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right) \left(\int_0^1 1^2 dx \right) = \int_0^1 f^2(x)dx.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[0,1]$ με οποιοδήποτε διάστημα $[a,b]$ που έχει μήκος μικρότερο ή ίσο του 1 (αν όμως πάρετε σαν $[a,b]$ το $[0,2]$ και σαν f τη σταθερή συνάρτηση $f(x)=1$, τότε η ανισότητα παίρνει τη μορφή $4 \leqslant 2$, άτοπο).

13. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$. [*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του Riemann.]

Υπόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία διαμερίσεων $P^{(n)} = \left\{ 0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1 \right\}$ και την επιλογή σημείων $\Xi^{(n)} = \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 \right\}$. Αφού το πλάτος της διαμέρισης $P^{(n)}$ είναι $\|P^{(n)}\| = \frac{1}{n} \to 0$, από τον ορισμό του Riemann έχουμε

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} \right) = \sum \left(f, P^{(n)}, \Xi^{(n)} \right) \to \int_a^b f(x)\, dx.$$

14. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας το συμπέρασμα της προηγούμενης Άσκησης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ στο $[0,1]$, παίρνουμε

$$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

15. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s \in [a,b]$ ώστε

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε πάντα να επιλέγουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b);

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} g(s) &= \int_a^s f(t)dt - \int_s^b f(t)dt = \int_a^s f(t)dt - \left(\int_a^b f(t)dt - \int_a^s f(t)dt\right) \\ &= 2\int_a^s f(t)dt - \int_a^b f(t)dt. \end{aligned}$$

Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, η g είναι συνεχής. Παρατηρήστε ότι

$$g(a) = -\int_a^b f(t)dt \qquad \text{και} \qquad g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Αφού $g(a)g(b) = -\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leqslant 0$, υπάρχει $s\in[a,b]$ ώστε $g(s)=0$. Για κάθε τέτοιο s ισχύει η

$$\int_a^s f(t)dt = \int_s^b f(t)dt.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε ένα τέτοιο s στο ανοικτό διάστημα (a,b) αν $\int_a^b f(t)dt \neq 0$ (εξηγήστε γιατί). Αν όμως πάρετε την $f(x)=x$ στο $[-1,1]$, τότε τα μόνα σημεία $s\in[-1,1]$ για τα οποία $g(s)=0$ είναι τα $s=\pm 1$ (σε αυτό το παράδειγμα, το ολοκλήρωμα της f στο $[-1,1]$ ισούται με μηδέν).

16. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη και θετική συνάρτηση ώστε $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Δείξτε ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $\{0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1\}$ ώστε $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $F(t)=\int_0^t f(x)dx$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη και θετική, η F είναι συνεχής και αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $\int_0^1 f(x)dx=1$, έχουμε $F(0)=0$ και $F(1)=1$.

Έστω $n\in\mathbb{N}$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, για κάθε $k=1,\dots,n-1$ υπάρχει $t_k\in[0,1]$ ώστε $F(t_k)=\frac{k}{n}$. Θέτουμε $t_0=0$ και $t_n=1$: τότε $F(t_0)=0=\frac{0}{n}$ και $F(t_n)=1=\frac{n}{n}$. Παρατηρήστε ότι $t_k<t_{k+1}$ για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$. Αν για κάποιο k είχαμε $t_k\geq t_{k+1}$, τότε θα παίρναμε

$$\frac{k}{n} = \int_0^{t_k} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx + \int_{t_{k+1}}^{t_k} f(x)dx \geq \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx = \frac{k+1}{n},$$

το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ και

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx = \int_0^{t_{k+1}} f(x)dx - \int_0^{t_k} f(x)dx = \frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$$

για κάθε $k=0,1,\dots,n-1$.

17. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{f(s)}{3}.$$

Υπόδειξη. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού, αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η μη αρνητική συνάρτηση $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει $s\in[0,1]$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(s)\int_0^1 g(x)dx.$$

Εφαρμόστε το παραπάνω για την $g(x)=x^2$.

18. Υποθέτουμε ότι η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ότι

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση έπεται ότι

$$2\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Δηλαδή, η συνάρτηση $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ είναι σταθερή. Αφού η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη και $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αφού η F είναι σταθερή, έχουμε $F' \equiv 0$. Άρα, $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$.

19. Έστω $f, h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι η h είναι συνεχής και η f είναι παραγωγίσιμη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_0^{f(x)} h(t)dt.$$

Δείξτε ότι $F'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x)$.

Υπόδειξη. Αφού η h είναι συνεχής, η συνάρτηση $G(y) = \int_0^y h(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και $G'(y) = h(y)$. Παρατηρήστε ότι $F(x) = G(f(x)) = (G \circ f)(x)$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = h(f(x)) \cdot f'(x).$$

20. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η g είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την g'.

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$g(x) = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)dt = \int_0^{x+\delta} f(t)dt - \int_0^{x-\delta} f(t)dt = H_1(x) - H_2(x),$$

όπου

$$H_1(x) = \int_0^{x+\delta} f(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_2(x) = \int_0^{x-\delta} f(t)dt.$$

Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δείχνει ότι οι H_1, H_2 είναι παραγωγίσιμες, $H_1'(x) = f(x+\delta)$ και $H_2'(x) = f(x-\delta)$ (αν $0 > x+\delta$ ή $0 > x-\delta$, το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει: θυμηθείτε τη σύμβαση $\int_b^a f = -\int_a^b f$). Έπεται ότι $g'(x) = f(x+\delta) - f(x-\delta)$.

21. Έστω $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε

$$G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} t^2 dt.$$

Δείξτε ότι η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και βρείτε την G'.

Υπόδειξη. Γράφουμε
$$G(x)=\int_{h(x)}^{g(x)}t^2dt=\int_0^{g(x)}t^2dt-\int_0^{h(x)}t^2dt.$$
Αφού οι g,h είναι παραγωγίσιμες και η $f(t)=t^2$ είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (δείτε τις προηγούμενες δύο Ασκήσεις) και $G'(x)=g^2(x)g'(x)-h^2(x)h'(x)$.

22. Έστω $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε
$$F(x)=\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)\,dt.$$
Βρείτε την F'.

Υπόδειξη. Θέτουμε $u=\frac{x}{t}$. Τότε, $dt=-\frac{x}{u^2}du$ και
$$F(x)=\int_x^1 -x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du=\int_1^x x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du=x\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du.$$
Άρα,
$$F'(x)=\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du+x\frac{\varphi(x)}{x^2}=\int_1^x\frac{\varphi(u)}{u^2}\,du+\frac{\varphi(x)}{x}.$$

Β′ Ομάδα

23. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας $a_n=\int_0^1 f(x^n)dx$. Δείξτε ότι $a_n\to f(0)$.

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(y)|\leqslant M$ για κάθε $y\in[0,1]$. Έστω $0<\varepsilon<1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0<\delta<1$ ώστε: αν $0\leqslant y\leqslant\delta$ τότε
$$|f(y)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$
Επιλέγουμε $n_0\in\mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n\geq n_0$ ισχύει
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n<\delta.$$
Τότε, για κάθε $n\geq n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0<x<1-\frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n)-f(0)|<\varepsilon/2$)
$$\begin{aligned}|a_n-f(0)| &= \left|\int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}(f(x^n)-f(0))dx+\int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1(f(x^n)-f(0))dx\right|\\ &\leqslant \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}|f(x^n)-f(0)|\,dx+\int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1(|f(x^n)|+|f(0)|)\,dx\\ &\leqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{4M+1}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4M+1}\cdot 2M\\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$
Άρα, $a_n\to f(0)$.

24. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\int_1^n\frac{1}{x}dx$ συγκλίνει.

Υπόδειξη. Η $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι φθίνουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leqslant \frac{1}{k}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leqslant 0,$$

δηλαδή η (γ_n) είναι φθίνουσα. Επίσης,

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1},$$

άρα

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \int_1^n \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n} > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η (γ_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0, συγκλίνει.

25. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|$$

για κάθε $x, y \in [0, 1]$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| dx.$$

Στο διάστημα $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ έχουμε

$$|f(x) - f(k/n)| \leqslant M\left(\frac{k}{n} - x\right),$$

άρα

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} |f(x) - f(k/n)| \leqslant M \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx = M \int_0^{1/n} y\, dy = \frac{M}{2n^2}.$$

Άρα,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{M}{2n^2} = \frac{M}{2n}.$$

26. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)| dt$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a, b]$.

Υπόδειξη. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(t)| \leqslant A$ για κάθε $t \in [a, b]$. Αυτό δείχνει ότι

$$|f(x)| \leqslant M \int_a^x |f(t)| dt \leqslant M \int_a^x A\, dt = MA(x - a)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Εισάγοντας αυτή την εκτίμηση πάλι στην υπόθεση, παίρνουμε

$$|f(x)| \leqslant M\int_a^x |f(t)|dt \leqslant M^2A\int_a^x (t-a)\,dt = \frac{M^2A}{2}(x-a)^2$$

για κάθε $x \in [a,b]$, και επαγωγικά,

$$|f(x)| \leqslant \frac{M^nA}{n!}(x-a)^n$$

για κάθε $x \in [a,b]$ και *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. Όμως,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^nA}{n!}(x-a)^n = 0,$$

άρα $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

27. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι δεν υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2f(x)dx = a^2.$$

Υπόδειξη. Έστω ότι υπάρχει θετική συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις

$$\int_0^1 f(x)dx = 1, \quad \int_0^1 xf(x)dx = a \quad \text{και} \quad \int_0^1 x^2f(x)dx = a^2.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x-a)^2f(x)dx &= \int_0^1 x^2f(x)dx - 2a\int_0^1 xf(x)dx + a^2\int_0^1 f(x)dx \\ &= a^2 - 2a\cdot a + a^2\cdot 1 = 0.\end{aligned}$$

Αφού η $(x-a)^2f(x)$ είναι μη αρνητική και συνεχής, από την Άσκηση 7 βλέπουμε ότι $(x-a)^2f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Όμως η f είναι παντού θετική, άρα $x = a$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αυτό είναι άτοπο.

28. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, μη αρνητική συνάρτηση. Θέτουμε $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Δείξτε οτι η ακολουθία

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n}$$

συγκλίνει, και $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = M$.

Υπόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\gamma_n = \left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \leqslant \left(\int_a^b M^n dx\right)^{1/n} = M(b-a)^{1/n}$$

και $M(b-a)^{1/n} \to M$ όταν $n \to \infty$, άρα υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\gamma_n < M + \varepsilon \quad \text{για κάθε} \quad n \geq n_1.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[a,b]$, παίρνει τη μέγιστη τιμή της: υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε $f(x_0) = M$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει κάποιο διάστημα $J \subset [a,b]$ με μήκος $\delta > 0$ και $x_0 \in J$, ώστε $f(x) > M - \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $x \in J$. Επίσης, αφού $\delta^{1/n} \to 1$, υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_2$,

$$\left(\int_a^b [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(\int_J [f(x)]^n dx\right)^{1/n} \geq \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)\delta^{1/n} > M - \varepsilon.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε

$$|\gamma_n - M| = \left| \left(\int_a^b [f(x)]^n dx \right)^{1/n} - M \right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, $\gamma_n \to M$.

29. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) < b - a$ (εξηγήστε γιατί). Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

Υπόδειξη. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1) - L(f,P_1) < b - a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k) < b - a = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k),$$

υπάρχει $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ώστε $M_k - m_k < 1$. Αν θέσουμε $a_1 = x_k$ και $b_1 = x_{k+1}$, βλέπουμε ότι $a_1 < b_1$, $a_1, b_1 \in [a,b]$, $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leqslant x \leqslant b_1\} = M_k - m_k < 1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2, b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leqslant x \leqslant b_2\} < \frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a_1, b_1]$ με $a_1 < c < d < b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c,d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c,d]$ με $U(f,P_2) - L(f,P_2) < \frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1})$ ώστε $b_n - a_n < 1/n$ και

$$\sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n, b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n, b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a_n, b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \sup\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leqslant x \leqslant b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c,d]\subset[a,b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a,b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a,b]$.

30. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

Υπόδειξη. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει $x_0\in[a,b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0)>0$, υπάρχει διάστημα $J\subseteq[a,b]$ με μήκος $\delta>0$ ώστε: για κάθε $x\in J$ ισχύει $f(x)>f(x_0)/2$. Συνεχίστε όπως στην Άσκηση 7.

31. Έστω $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι, για κάθε $x\in[0,a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du.$$

Υπόδειξη. Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x f(u)u\,du$$

και

$$G(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du=\int_0^x R(u)du,$$

όπου

$$R(u)=\int_0^u f(t)dt.$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $[0,a]$, το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού δείχνει ότι οι F,G και R είναι παραγωγίσιμες. Επίσης,

$$F'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-f(x)x=\int_0^x f(u)du$$

και

$$G'(x)=R(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x f(u)du.$$

Άρα,

$$(G-F)'(x)=G'(x)-F'(x)=\int_0^x f(u)du-\int_0^x f(u)du=0.$$

Έπεται ότι η $G-F$ είναι σταθερή στο $[0,a]$. Παρατηρώντας ότι $F(0)=G(0)=0$, συμπεραίνουμε ότι $G\equiv F$ στο $[0,a]$. Δηλαδή,

$$\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

για κάθε $x\in[0,a]$.

32. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$ και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $k = 0, \ldots, n-1$, η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[x_k, x_{k+1}]$. Από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (για τη συνεχή συνάρτηση f') έχουμε

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)\, dx \right| \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\, dx.$$

Άρα,

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|\, dx = \int_a^b |f'(x)|\, dx.$$

33. Έστω $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ γνησίως αύξουσα, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι, για κάθε $x > 0$,

$$\int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = xf(x).$$

Υπόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $L, R : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ με

$$L(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt \quad \text{και} \quad R(x) = xf(x).$$

Οι L, R είναι παραγωγίσιμες (εξηγήστε γιατί) και $L(0) = 0 = R(0)$. Παρατηρήστε ότι

$$L'(x) = f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) = f(x) + xf'(x) = R'(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Έπεται ότι $L(x) = R(x)$ για κάθε $x \geq 0$.

34. Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 0$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in [0, 1]$ ισχύει

$$|f(x)| \leqslant \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Υπόδειξη. Η f' είναι συνεχής, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Χρησιμοποιώντας την $f(0) = 0$, το δεύτερο θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, για κάθε $x \in [0, 1]$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leqslant \int_0^x |f'(t)| \cdot 1\, dt \\ &\leqslant \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \sqrt{x} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

35. Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$, η οποία ικανοποιεί την

$$f(x)^2 = 2 \int_0^x f(t) dt$$

για κάθε $x \geqslant 0$. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε $x \geqslant 0$.

Υπόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη, τότε παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της

$$(*) \qquad f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt$$

παίρνουμε

$$2f(x)f'(x) = 2f(x)$$

για κάθε $x > 0$, και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) = 1$ για κάθε $x > 0$. Από την $(*)$ βλέπουμε (θέτοντας $x = 0$) ότι $f(0) = 0$, άρα

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x dt = x$$

για κάθε $x \geq 0$. Μένει να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Από την $(*)$ και την $f(x) \neq 0$ έχουμε: για κάθε $x > 0$ ισχύει $\int_0^x f(t)dt > 0$ και

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt} \quad ή \quad f(x) = h(x) := -\sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $(0, +\infty)$, το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής δείχνει ότι είτε $f \equiv g$ στο $[0, +\infty)$ ή $f \equiv h$ στο $[0, +\infty)$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται, αφού η h παίρνει αρνητικές τιμές στο $(0, +\infty)$ και $\int_0^x f(t)dt > 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα,

$$f(x) = g(x) := \sqrt{2}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

για κάθε $x \geq 0$. Αφού η f είναι συνεχής, έπεται ότι η g (δηλαδή, η f) είναι παραγωγίσιμη.

36. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

Υπόδειξη. Αφού η f' είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx &= \int_a^b f(x)\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' dx \\ &= \frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx. \end{aligned}$$

Η f' είναι συνεχής στο $[a, b]$, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f'(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έπεται ότι

$$\left|\frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n}\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n} \to 0$$

και

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|dx \leqslant \frac{M(b-a)}{n} \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0, \quad \text{και όμοια,} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

37. Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις ακολουθίες

$$a_n=\int_0^\pi \sin(nx)dx \quad \text{και} \quad b_n=\int_0^\pi |\sin(nx)|dx.$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$a_n=\int_0^\pi \sin(nx)dx=\int_0^\pi \left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)' dx=\frac{\cos 0-\cos(n\pi)}{n}.$$

Άρα, $|a_n|\leqslant 2/n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $a_n\to 0$ καθώς το $n\to\infty$. Για την (b_n) κάνουμε την αντικατάσταση $y=nx$:

$$b_n=\int_0^\pi |\sin(nx)|\,dx=\frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy=\int_0^\pi |\sin y|\,dy$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ (κάντε την αντικατάσταση $y=k\pi+u$). Άρα,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n}\int_0^{n\pi}|\sin y|\,dy=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin y|\,dy \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi |\sin y|\,dy=\int_0^\pi |\sin y|\,dy \\ &= \int_0^\pi \sin y\,dy=\cos(0)-\cos(\pi)=2 \end{aligned}$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Έπεται ότι $b_n\to 2$.

38. Έστω $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχουν συνεχείς, αύξουσες και θετικές συναρτήσεις $g,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ ώστε $f=g-h$.

Υπόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής: αν $g,h:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε οι $\max\{g,h\}$ και $\min\{g,h\}$ είναι συνεχείς. Αυτό έπεται από τις

$$\max\{g,h\}=\frac{g+h+|g-h|}{2} \quad \text{και} \quad \min\{g,h\}=\frac{g+h-|g-h|}{2}.$$

Η $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, άρα οι συναρτήσεις

$$g:=\max\{f',0\} \qquad \text{και} \qquad h:=-\min\{f',0\}$$

είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[0,+\infty)$. Επίσης,

$$g-h=\max\{f',0\}+\min\{f',0\}=f'.$$

Ορίζουμε

$$G_1(x)=\int_0^x g(t)dt \qquad \text{και} \qquad H_1(x)=\int_0^x h(t)dt.$$

Αφού οι g,h είναι συνεχείς και μη αρνητικές, οι G_1,H_1 είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες και $G_1(0)=H_1(0)=0$. Από τον τρόπο ορισμού τους και από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού βλέπουμε ότι

$$G_1(x)-H_1(x)=\int_0^x (g(t)-h(t))\,dt=\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$$

για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε

$$G(x) = 1 + |f(0)| + G_1(x) \qquad \text{και} \qquad H(x) = 1 + |f(0)| - f(0) + H_1(x).$$

Τότε, οι G, H είναι παραγωγίσιμες, αύξουσες, θετικές και

$$G(x) - H(x) = G_1(x) - H_1(x) + f(0) = f(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή, η f γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών, αυξουσών και θετικών συναρτήσεων στο $[0, +\infty)$.

Γ΄ Ομάδα

39. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f έχει συνεχή παράγωγο και ότι $0 < f'(x) \leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι

$$\int_0^1 [f(x)]^3 dx \leqslant \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

40. Έστω $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\, dt \leqslant \frac{a}{2} \int_0^a |f'(t)|^2 dt.$$

41. Έστω $f_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $f_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)\, dt.$$

Δείξτε ότι

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{k-1} dt.$$

42. Έστω $f : [0,\infty) \to (0,\infty)$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty f(x)\, dx$ είναι πεπερασμένο. Δείξτε ότι $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

43. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(a) = f(b) = 0$. Υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και ότι $\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες δείξτε ότι

$$\int_a^b x f(x) f'(x)\, dx = -\frac{1}{2},$$

και, χρησιμοποιώντας το παραπάνω, δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b x^2 [f(x)]^2\, dx \right) \left(\int_a^b [f'(x)]^2 dx \right) \geqslant \frac{1}{4}.$$

44. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{2} \int_a^b \left[\int_a^b (f(y) - f(x))(g(y) - g(x))\, dy \right] dx$$

$$= (b-a) \int_a^b f(x) g(x)\, dx - \left(\int_a^b f(x)\, dx \right) \left(\int_a^b g(x)\, dx \right).$$

Αν οι f και g είναι αύξουσες, χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

45. Έστω $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι, για κάθε $k\in\mathbb{N}$,

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \int_k^{k+1}(k+1-x)f'(x)\,dx.$$

46. (α) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = 0.$$

(β) Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^1 x^{n-1}f(x)\,dx = f(1).$$

47. (α) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/\sqrt{n}} nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$

(β) Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx = f(0).$$