Ασκήσεις για το μάθημα «Ανάλυση Ι και Εφαρμογές»

Κεφάλαιο 8: Τεχνικές ολοκλήρωσης

Α΄ Ομάδα

1. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx\ , \qquad \int \frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2}dx\ , \qquad \int \frac{3x^2+3x+1}{x^3+2x^2+2x+1}dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \frac{2x}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x}{(x+1)^2+1}\,dx$$

και χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση $y = x+1$.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα. Ζητάμε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

Ελέγξτε ότι $a = 1$, $b = 1$ και $c = 1$.

(γ) Παρατηρούμε ότι $x^3+2x^2+2x+1 = (x+1)(x^2+x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

2. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{dx}{x^4+1}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\ , \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ , \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}\ .$$

Υπόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι $x^4+1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ και κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt[6]{x}$ προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du = \int \frac{6u^3}{u+1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα (μπορείτε να κάνετε τη νέα αντικατάσταση $y = u+1$).

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x^2-1}$ έχουμε $\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{u^2+1}$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(\sqrt{x^2-1}) + c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+e^x}$ έχουμε $du = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx = \frac{u^2-1}{2u}\,dx$, οπότε προκύπτει το ολοκλήρωμα $\int \frac{2du}{u^2-1}$, το οποίο υπολογίζεται εύκολα με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

3. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \cos^3 x\,dx\ , \quad \int \cos^2 x \sin^3 x\,dx\ , \quad \int \tan^2 x\,dx\ , \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x}\ , \quad \int \sqrt{\tan x}\,dx\ .$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \cos^2 x \cos x\, dx = \int (1-\sin^2 x)(\sin x)' dx$$

και θέτουμε $u = \sin x$.

(β) Γράφουμε

$$\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx = \int \cos^2 x (1-\cos^2 x)(-1)(\cos x)' dx$$

και θέτουμε $u = \cos x$.

(γ) Γράφουμε

$$\int \tan^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c.$$

(δ) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\cos^4 x} dx &= \int (\tan x)' \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' dx \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \tan x \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} - \int \frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos^4 x}\, dx \\
&= \frac{\tan x}{\cos^2 x} - 2\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$3\int \frac{1}{\cos^4 x}\, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + 2\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{\tan x}{\cos^2 x} + \tan x + c.$$

(ε) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{\tan x}$ παίρνουμε

$$du = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} (\tan^2 x + 1)\, dx = \frac{u^4+1}{2u}\, dx,$$

οπότε θεωρούμε το

$$\int \frac{2u^2}{u^4+1}\, du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

4. Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη, δείξτε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}\ .$$

Υπόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n} &= \int (x)' \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx - 2n \int \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\
&= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

5. Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$\int \frac{x^2}{(x^2-4)(x^2-1)}\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx\ , \qquad \int x\log x\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx\ , \qquad \int e^x \sin x\,dx\ , \qquad \int x\sin^2 x\,dx$$

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx\ , \qquad \int \frac{x+4}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$$

$$\int \frac{x}{1+\sin x}\,dx\ , \qquad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx\ , \qquad \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}\ .$$

Υπόδειξη. (α) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x\log x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2)'\log x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2\log x}{2} - \frac{x^2}{4} + c.$$

(δ) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)'\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + c.$$

(ε) Ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\begin{aligned} I = \int e^x\sin x\,dx &= \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \\ &= e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx \\ &= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x-\cos x) - I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2} + c.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ παίρνουμε

$$\int x\sin^2 x\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \int x\frac{\cos(2x)}{2}\,dx.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση $u = 2x$ και ολοκλήρωση κατά μέρη όπως στο (δ).

(ζ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int \log(x+\sqrt{x})\,dx = \int (x)'\log(x+\sqrt{x})\,dx = x\log(x+\sqrt{x}) - \int \frac{x}{x+\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx.$$

Κατόπιν, εφαρμόστε την αντικατάσταση $u=\sqrt{x}$.

(η) Με την αντικατάσταση $u=\sqrt{1-x^2}$ βλέπουμε ότι $\frac{dx}{x} = \frac{u\,du}{u^2-1}$, οπότε καταλήγουμε στο

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ϑ) Ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(ι) Θέτουμε $y = \tan\frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$ και $\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
\int 2\arctan y\frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2}{1+y^2}\,dy &= 4\int \arctan y\frac{1}{(1+y)^2}\,dy \\
&= 4\int \arctan y\left(-\frac{1}{1+y}\right)'dy \\
&= -4\frac{\arctan y}{1+y} + 4\int \frac{1}{(1+y^2)(1+y)}\,dy.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(κ) Γράφουμε

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}(\sin x)'dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \sin x$.

(λ) Αντικατάσταση $y = x+1$.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \sin(\log x)\,dx\ , \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Αν θέσουμε $u = \log x$, τότε $dx = e^u du$ και καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα

$$\int e^u \sin u\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\log(1-x)\,dx &= -2\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\log(1-x)\,dx \\
&= -\frac{2\log(1-x)}{\sqrt{x}} - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{1-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$.

7. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx\ , \qquad \int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\arctan x\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Για το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(β) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,dx &= -\int \left(\frac{1}{1+x}\right)' xe^x\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(xe^x)'dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(1+x)e^x\,dx \\ &= -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + c.\end{aligned}$$

8. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\ , \qquad \int \frac{\log(\tan x)}{\cos^2 x}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $u = e^x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του ολοκληρώματος ρητής συνάρτησης.

(β) Με την αντικατάσταση $u = \tan x$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \log u\,du = u\log u - u + c.$$

9. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}dx \quad , \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}dx$$

$$\int_0^5 x\log\left(\sqrt{1+x^2}\right)\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\,dx.$$

Υπόδειξη. Υπολογίστε πρώτα τα αόριστα ολοκληρώματα:

(α) Γράφουμε

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\tan x - \int \tan x\,dx = x\tan x + \log(\cos x) + c.$$

(β) Γράφουμε

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos^6 x}\,dx$$

και κάνουμε την αντικατάσταση $u = \cos x$.

(γ) Με την αντικατάσταση $u = \sqrt{1+x^2}$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int u\log u\,du,$$

το οποίο υπολογίζεται με ολοκλήρωση κατά μέρη.

(δ) Γράφουμε

$$\int x\tan^2 x\,dx = \int x\frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int x\,dx.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στο (α).

10. Υπολογίστε τα ακόλουθα εμβαδά:

(α) Του χωρίου που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=x-2$ και από τον x-άξονα.

(β) Του χωρίου που φράσσεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\cos x$ και $g(x)=\sin x$ στο διάστημα $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$.

Υπόδειξη. (α) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_0^2 \sqrt{x}\,dx+\int_2^4(\sqrt{x}-x+2)\,dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

(β) Το εμβαδόν είναι ίσο με

$$\int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin x-\cos x)\,dx.$$

Εξηγήστε γιατί και υπολογίστε το.

Β′ Ομάδα

11. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int\frac{1+\sin x}{1-\cos x}\,dx\ ,\quad \int\frac{1}{\sin x}\,dx\ ,\quad \int\frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx\ ,\quad \int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx\ ,\quad \int x\arctan x\,dx\ ,\quad \int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\ ,\quad \int\sqrt{x^2-1}\,dx.$$

Υπόδειξη. (α) Θέτουμε $y=\tan\frac{x}{2}$. Ελέγξτε ότι $dx=\frac{2}{1+y^2}dy$, $\cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}$ και $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$. Αναγόμαστε έτσι στο ολοκλήρωμα

$$\int\frac{(1+y)^2}{y^2(1+y^2)}\,dy,$$

το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(β) Γράφουμε

$$\int\frac{1}{\sin x}\,dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx$$

και κάνοντας την αντικατάσταση $u=\cos x$ αναγόμαστε στο $\int\frac{1}{u^2-1}\,du$, το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

(γ) Με την αντικατάσταση $u=x^2+1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{2u}+c.$$

(δ) Με την αντικατάσταση $x=\sin u$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int\frac{1}{\sin u}\,du,$$

το οποίο υπολογίστηκε στο (β).

(ε) Χρησιμοποιούμε τον αναγωγικό τύπο της Άσκησης 4.

(στ) Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\int x\arctan x\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\arctan x+c.$$

Για την τελευταία ισότητα παρατηρήστε ότι

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

(ζ) Με την αντικατάσταση $u = x^2+1$ αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + c.$$

(η) Θέτουμε $x^2 - 1 = (x-t)^2$. Ισοδύναμα, $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Τότε, $dx = \frac{t^2-1}{2t^2}\,dt$ και $x - t = \frac{1-t^2}{2t}$, οπότε αναγόμαστε στον υπολογισμό του

$$\int \frac{-(t^2-1)^2}{4t^3}\,dt.$$

12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Υπόδειξη. Με την αντικατάσταση $y = \pi - x$ παίρνουμε

$$I = \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - y)\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy = \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy - I,$$

δηλαδή

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}\,dy.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u = \cos y$.

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\,dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{2} - x$ δίνει (εξηγήστε γιατί)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos y}{\cos y+\sin y}\,dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

Αφού

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

14. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\,dx.$$

Υπόδειξη. Η αντικατάσταση $y = \frac{\pi}{4} - x$ δίνει

$$I = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan(\pi/4 - y))\,dy.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = \frac{1-\tan y}{1+\tan y},$$

άρα,

$$1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\frac{2}{1+\tan y}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I=\int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)\,dx &= \int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan y}\right)\,dy \\ &= \int_0^{\pi/4}\left(\log 2-\log(1+\tan y)\right)\,dy \\ &= \frac{\pi(\log 2)}{4}-I. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$I=\frac{\pi(\log 2)}{8}.$$

15. Δείξτε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\infty} x^p dx$$

δεν είναι πεπερασμένο για κανένα $p\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις: αν $p>-1$ τότε

$$\int_1^{\infty} x^p dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M x^p dx=\lim_{M\to+\infty}\frac{M^{p+1}-1}{p+1}=+\infty.$$

Αν $p<-1$ τότε

$$\int_0^1 x^p dx=\lim_{\delta\to 0^+}\int_\delta^1 x^p dx=\lim_{\delta\to 0^+}\frac{1-\delta^{p+1}}{p+1}=+\infty.$$

Τέλος, αν $p=-1$ τότε

$$\int_1^{\infty} x^p dx=\lim_{M\to+\infty}\int_1^M \frac{1}{x}dx=\lim_{M\to+\infty}\log M=+\infty.$$

Σε κάθε περίπτωση, έπεται ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^p dx$ απειρίζεται.

16. Υπολογίστε τα ακόλουθα γενικευμένα ολοκληρώματα:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx\ ,\quad \int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad \int_0^1\log x\,dx\ .$$

Υπόδειξη. (α) Για κάθε $M>0$ έχουμε

$$\int_0^M xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^M=\frac{1-e^{-M^2}}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x^2}dx=\lim_{M\to\infty}\frac{1-e^{-M^2}}{2}=\frac{1}{2}.$$

(β) Για κάθε $s\in(0,1)$ έχουμε

$$\int_0^s\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^s=\arcsin s-\arcsin 0=\arcsin s.$$

Έπεται ότι

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{s\to 1^-}\int_0^s\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{s\to 1^-}\arcsin s=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

Λόγω συμμετρίας,
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$
(γ) Για κάθε $\delta \in (0,1)$ έχουμε
$$\int_{\delta}^{1} \log x\, dx = x\log x - x\Big|_{\delta}^{1} = -1 - \delta\log\delta + \delta.$$
Έπεται ότι
$$\int_0^1 \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_{\delta}^{1} \log x\, dx = \lim_{\delta\to 0^+} (-\delta\log\delta + \delta - 1) = -1.$$
17. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx = n!$$
Υπόδειξη. Με επαγωγή: για $n = 0$ έχουμε
$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1.$$
Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $M > 0$ έχουμε
$$\int_0^{M} e^{-x}x^n dx = \int_0^{M} (-e^{-x})' x^n dx = -e^{-x}x^n\Big|_0^{M} + n\int_0^{M} e^{-x}x^{n-1}dx.$$
Αφήνοντας το $M \to \infty$ βλέπουμε ότι
$$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x}x^n dx = n\int_0^{\infty} e^{-x}x^{n-1}dx = nI_{n-1}.$$
Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $I_{n-1} = (n-1)!$, τότε $I_n = n\cdot(n-1)! = n!$.

18. Βρείτε τα όρια
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2} dt\ , \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt.$$
Υπόδειξη. (α) Με την αντικατάσταση $y = x^3$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το
$$\lim_{y\to+\infty} ye^{-y^2}\int_0^{y} e^{t^2} dt.$$
Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:
$$\frac{\left(\int_0^y e^{t^2} dt\right)'}{(e^{y^2}/y)'} = \frac{e^{y^2}}{2e^{y^2} - e^{y^2}/y^2} = \frac{1}{2-y^{-2}} \to \frac{1}{2}$$
όταν $y \to +\infty$. Άρα,
$$\lim_{x\to+\infty} x^3 e^{-x^6}\int_0^{x^3} e^{t^2} dt = \frac{1}{2}.$$
(α) Με την αντικατάσταση $y = x^2$ βλέπουμε ότι αρκεί να υπολογίσουμε το
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\int_0^{y} e^t \sin t\, dt.$$
Εφαρμόζουμε τον κανόνα του L' Hospital:
$$\frac{\left(\int_0^y e^t \sin t\, dt\right)'}{(y^2)'} = \frac{e^y \sin y}{2y} \to \frac{1}{2}$$
όταν $y \to 0^+$. Άρα,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4}\int_0^{x^2} e^t \sin t\, dt = \frac{1}{2}.$$