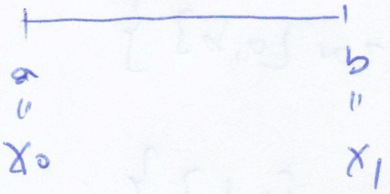
(1) Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Αν $L(f,P) = U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ $\Rightarrow$ f σταθερή.



Έστω η διαμέριση $P = \{x_0 = a < x_1 = b\}$

Τότε
$$\left.\begin{aligned} L(f,P) &= m(b-a) \\ U(f,P) &= M\cdot(b-a) \end{aligned}\right\} (*)$$

όπου
$$m = \inf\{f(x),\ x\in[a,b]\}$$
$$M = \sup\{f(x),\ x\in[a,b]\}$$

(*) Αφού $L(f,P) = U(f,P)$ από την υπόθεση

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $m(b-a) = M(b-a) \Rightarrow \boxed{m = M}$

$\Rightarrow \forall\ x\in[a,b]$ $\quad m \leq f(x) \leq M = m$

$\Rightarrow$ $f(x) = m$. Άρα η f είναι σταθερή

② Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη. Αν υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $L(f,P)=U(f,P)$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$.

$$L(f,P) = \sup\{L(f,P'),\ P' \text{ διαμ. του } [a,b]\}$$

$$\leq \inf\{U(f,P'),\ P' \text{ διαμ. του } [a,b]\}$$

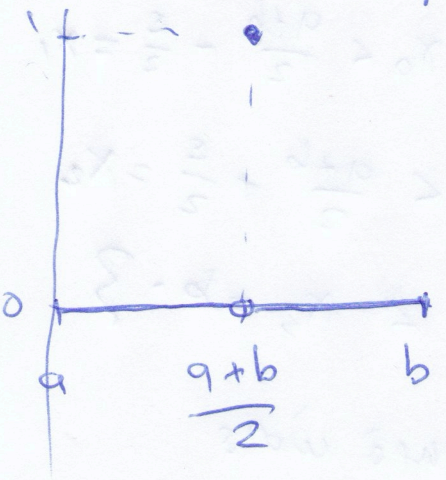
$$\leq U(f,P^{*}) = \cancel{U(f)}\, L(f,P)$$

$$\Rightarrow \sup\{\ldots\} = \inf\{\quad\} = \int_a^b f(x)dx$$

και επομένως η f είναι ολοκληρώσιμη

(5) Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{a+b}{2} \\ 1 & x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$



Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$ και $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

—

Αφού $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in [a,b]$, έχουμε ότι (*)

$0 \overset{(*)}{\leq} L(f,P) \leq U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

—

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P) < \varepsilon$. Γιατί τότε (**)

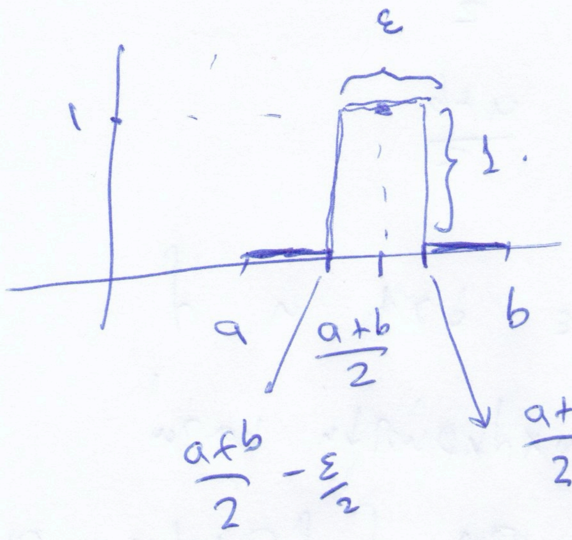
$$0 \leq U(f,P) - L(f,P) \overset{(*)}{\leq} U(f,P) < \varepsilon$$

επομένως η ολοκληρωσιμότητα της f προκύπτει από το κριτήριο Riemann.

Επιπλέον, $0 \leq \int_a^b f(x)\,dx = \inf\{U(f,P),\ P \text{ διαμ. } [a,b]\} < \varepsilon$ για κάθε ε

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

Ας δείξουμε τον ισχυρισμό (∗∗).



έστω $\varepsilon>0$ και η διαμέριση

$$P=\left\{a=x_0<\frac{a+b}{2}-\frac{\varepsilon}{2}=x_1<\frac{a+b}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=x_2<x_3=b.\right\}$$

(εδώ θέλουμε $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό ώστε

$$\frac{a+b}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<b. \quad \text{και} \quad \frac{a+b}{2}-\frac{\varepsilon}{2}>a$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon<b-a$$

Τότε $U(f,P)=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+M_3(x_3-x_2)$

όπου $M_1=\cancel{\inf}\sup\left\{f(x),\ x\in\left[a,\frac{a+b}{2}-\varepsilon/2\right]\right\}=0$

(γιατί $f(x)=0$ $\forall x\in\left[a,\frac{a+b}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right]$)

και όμοια $M_3=0$.

$$\Rightarrow \boxed{U(f,P)=M_2(x_2-x_1)=1\cdot\varepsilon=\varepsilon}$$

$$M_2=\sup\left\{f(x),\ x\in\underbrace{\left[\overset{x_1}{\frac{a+b}{2}-\frac{\varepsilon}{2}},\ \overset{x_2}{\frac{a+b}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}\right]}_{\frac{a+b}{2}\in}\right\}=1$$

και $x_2-x_1=\varepsilon$

⑨ $f, g : [0,\infty) \to [0,\infty)$

f συνεχής, g παραγωγίσιμη

ορίζουμε $F(x) = \int_0^{g(x)} f(t)\,dt$.

Να δείξετε ότι $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Η F γράφεται σαν σύνθεση των

συναρτήσεων $H(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $\left\}\begin{array}{l} \text{Δηλαδή} \\ F(x) = (H \circ g)(x) \\ \quad = H(g(x)). \end{array}\right.$

και g.

Επομένως $F'(x) = H'(g(x)) \cdot g'(x)$.

όμως $H'(x) = f(x)$

$\Rightarrow F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

✓

(10) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής και ισχύει ότι

(*) $$\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt \quad \text{για κάθε } x\in[a,b]$$

Δείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$

Παραγωγίζοντας τη σχέση (*) : Αφού

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$$ και

$$\int_x^b f(t)\,dt = -\int_b^x f(t)\,dt \to \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'$$

$$= -\left(\int_b^x f(t)\,dt\right)'$$

$$= -f(x)$$

Διαφορετικά

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt$$

$$\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = -f(x)$$

$$\Uparrow$$

$$\hookrightarrow 0 = (\ \cdots\ )' = \left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' + \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)' = f(x) + \left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'$$

Συνεπώς, λόγω της (*) έχουμε

$$\underbrace{\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'}_{f(x)} = \underbrace{\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'}_{-f(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$$

---

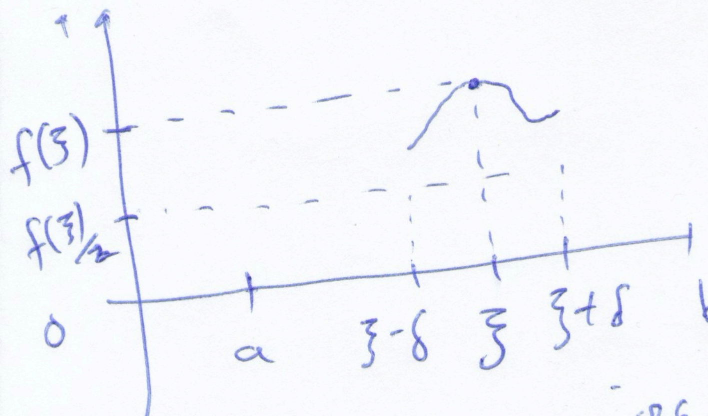
(11) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[a,b]$ με $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$ αν και μόνο αν $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$

$f(x)=0 \ \forall\ x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b 0\,dx = 0 = \int_a^b f(x)\,dx$ ✓

Έστω $\int_a^b f(x)\,dx=0$, και ότι δεν ισχύει ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δηλαδή, υπάρχει $\xi\in[a,b]$ ώστε $f(\xi)>0$

(υπενθ., ~~η~~ υποθέτουμε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$.



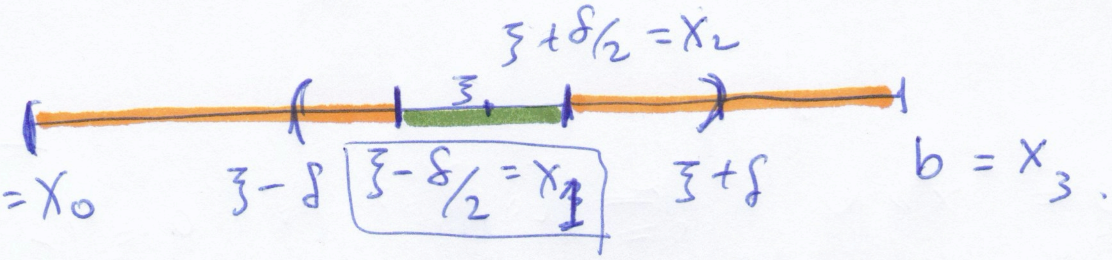
Εφαρμόζουμε τον ορισμό της συνέχειας στο ξ, για $\varepsilon = \frac{f(\xi)}{2}$.

$\Rightarrow$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$

$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon \Rightarrow \boxed{f(x) > \frac{f(\xi)}{2}}$ (*)

Ας θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P = \{ x_0 = a < x_1 = \xi - \tfrac{\delta}{2} < \xi + \tfrac{\delta}{2} = x_2 < x_3 = b \}$$



Τότε.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{x_1} f(x)\,dx}_{\geq 0} + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \underbrace{\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx}_{\geq 0}$$

μαζί $f(x) \geq 0$ μαζί $f(x) \geq 0$

$$\geq \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \geq \delta \cdot \frac{f(\xi)}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx > 0$$

που είναι άτοπο

$$f(x) \geq \frac{f(\xi)}{2}$$

στο $[x_1, x_2] = [\xi - \frac{\delta}{2}, \xi + \frac{\delta}{2}]$