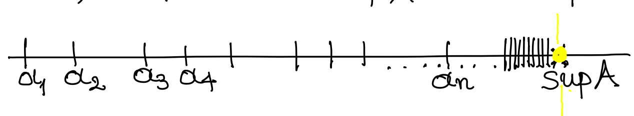
2.4 Μονότονες ακολουθίες

Αν μία ακολουθία είναι μόνο μονότονη ή μόνο φραγμένη, αυτό δεν είναι αρκετό για να αποφασίσουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει. Αν όμως ισχύουν και τα δύο, τότε πιθανότατα μπορούμε. Για παράδειγμα, αν η ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε το σύνολο $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι μη κενό και άνω φραγμένο, επομένως υπάρχει το $\sup A$.



Είναι λογικό να σκεφθούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο $\sup A$. Αντίθετα, αν η ακολουθία είναι αύξουσα, αλλά δεν είναι άνω φραγμένη, τότε οι όροι της αυξάνονται χωρίς όριο, οπότε είναι λογικό να σκεφθούμε ότι τείνει στο $+\infty$.

<u>Θεώρημα 2.12</u> Θεωρούμε την ακολουθία (a_n) και $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$.

(α) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, τότε $a_n \to \sup A$ καθώς $n\to\infty$.

(β) Αν η (a_n) είναι αύξουσα και δεν είναι άνω φραγμένη, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n\to\infty$.

(γ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to \inf A$ καθώς $n\to\infty$.

(δ) Αν η (a_n) είναι φθίνουσα και δεν είναι κάτω φραγμένη, τότε $a_n \to -\infty$ καθώς $n\to\infty$.

<u>Απόδειξη</u>: (α) Κατ' αρχάς, εφόσον η (a_n) είναι άνω φραγμένη, το σύνολο $A=\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$ είναι, προφανώς, μη κενό και άνω

φραγμένο. Επομένως, από την Αρχή της Πληρότητας, υπάρχει το $\sup A$ και έστω $\sup A = \alpha$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον $\alpha - \varepsilon < \alpha$, το $\alpha - \varepsilon$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Επομένως, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_N$$

(βλέπε και Πρόταση 1.5(α)). Τώρα, δεδομένου ότι η (α_n) είναι αύξουσα και το α είναι άνω φράγμα του A, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n > N$, έχουμε

$$\alpha - \varepsilon < \alpha_N \leq \alpha_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon.$$

Συνεπώς, $\forall n > N$ ισχύει ότι $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$, δηλαδή $\alpha_n \to \alpha = \sup A$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Έστω $E > 0$. Εφόσον η (α_n) δεν είναι άνω φραγμένη, το E δεν είναι άνω φράγμα του συνόλου A. Επομένως, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_N > E \text{ (αιτιολογήστε το).}$$

Τώρα, δεδομένου ότι η (α_n) είναι αύξουσα, $\forall n \in \mathbb{N}$ με $n > N$, έχουμε

$$\alpha_n \geq \alpha_N > E.$$

Συνεπώς, $\forall n > N$ ισχύει ότι $\alpha_n > E$ δηλαδή $\alpha_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(γ)–(δ) Η απόδειξη είναι παρόμοια και αφήνεται ως άσκηση.

<u>Παράδειγμα 2.6</u> Θεωρούμε την ακολουθία

$$\alpha_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Κατ' αρχάς,

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} > 0,$$

δηλαδή

$$a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

επομένως, η (a_n) είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον,

$$0 < a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{2^0} \quad \frac{1}{2^1} \qquad \frac{1}{n!} \overset{?}{\leq} \frac{1}{2^{n-1}} \Leftrightarrow 2^{n-1} \leq n!$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

(βλέπε Ασκήσεις 5(iv) και 7, Κεφάλαιο 1), οπότε, η (a_n) είναι, επιπρόσθετα, άνω φραγμένη, συνεπώς, από το (α) του προηγούμενου θεωρήματος, η (a_n) είναι συγκλίνουσα. Θα δούμε ποιό είναι το όριο στην επόμενη παράγραφο.

2.5 Σημαντικές ακολουθίες και κριτήρια σύγκλισης

Οι επόμενες ακολουθίες εμφανίζονται συχνά στην πράξη.

<u>Πρόταση 2.13</u> Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε για την ακολουθία $a_n = a^n$, $n = 1, 2, \dots$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Αν $a > 1$, τότε $a_n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$.

(β) Αν $a = 1$, τότε $a_n \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

(γ) Αν $-1 < a < 1$, τότε $a_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

(δ) Αν $a = -1$, τότε $a_n \to 1$ για n άρτιο και $a_n \to -1$ για n περιττό καθώς $n \to \infty$.

(ε) Αν $a < -1$, τότε $a_n \to +\infty$ για n άρτιο και $a_n \to -\infty$ για n περιττό καθώς $n \to \infty$.

Απόδειξη: (α) Εφόσον $\alpha>1$, $\exists x>0: \alpha=1+x$. Από την ανισότητα του Bernoulli (Άσκηση 8, Κεφάλαιο 1) έχουμε

$$a_n=\alpha^n=(1+x)^n\geq 1+nx \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Από το Θεώρημα Αρχιμήδους–Ευδόξου, με $y=\varepsilon$, μπορούμε να βρούμε $N\in\mathbb{N}: Nx>\varepsilon$. Οπότε, για $n>N$,

$$a_n=\alpha^n\geq 1+nx>1+Nx>Nx>\varepsilon,$$

συνεπώς, η (a_n) τείνει στο $+\infty$ καθώς $n\to\infty$.

(β) Προφανής.

(γ) Έστω, κατ' αρχάς, ότι $0<\alpha<1$, οπότε, $\frac{1}{\alpha}>1$, συνεπώς, όπως στο (α), με $1/\alpha$ στη θέση του α, $\exists x>0: \frac{1}{\alpha}=1+x$ και

$$\frac{1}{\alpha^n}=(1+x)^n\geq 1+nx>nx \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Οπότε,

$$0<a_n=\alpha^n<\frac{1}{nx} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Εφόσον $\frac{1}{nx}\to 0$ καθώς $n\to\infty$ (αποδείξτε το), από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι $a_n\to 0$ καθώς $n\to\infty$.

Αν $\alpha=0$, η απόδειξη είναι προφανής.

Έστω τώρα $-1<\alpha<0$, τότε $0<b=-\alpha<1$, οπότε, όπως δείξαμε προηγουμένως, $b^n\to 0$ καθώς $n\to\infty$, συνεπώς, και $\alpha^n\to 0$ καθώς $n\to\infty$.

(δ)–(ε) Αφήνονται ως άσκηση.

Πρόταση 2.14 Αν $\alpha>0$, τότε η ακολουθία $a_n=\sqrt[n]{\alpha}\to 1$ καθώς $n\to\infty$.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, $a>1$. Τότε $a_n=\sqrt[n]{a}>1$. Θέτουμε $a_n=1+x_n$, $x_n>0$, οπότε, αρκεί να δείξουμε ότι $x_n\to 0$ καθώς $n\to\infty$. Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε

$$a=a_n^n=(1+x_n)^n\geq 1+nx_n>nx_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

οπότε,

$$0<x_n<\frac{a}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

και εφόσον $\frac{a}{n}\to 0$ καθώς $n\to\infty$, από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι $x_n\to 0$ καθώς $n\to\infty$.

Αν τώρα $0<a<1$, τότε $\frac{1}{a}>1$, οπότε, από την προηγούμενη περίπτωση,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1 \text{ καθώς } n\to\infty,$$

το οποίο οδηγεί στην

$$\frac{1}{a_n}\to 1 \text{ καθώς } n\to\infty,$$

συνεπώς, $a_n\to 1$ καθώς $n\to\infty$ (αποδείξτε το).

Πρόταση 2.15 Η ακολουθία $a_n=\sqrt[n]{n}\to 1$ καθώς $n\to\infty$.

Απόδειξη: Δεδομένου ότι $a_n=\sqrt[n]{n}\geq 1$ (αιτιολογήστε το), θέτουμε $a_n=1+x_n$, $x_n\geq 0$, και επομένως αρκεί να δείξουμε $x_n\to 0$ καθώς $n\to\infty$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα, για $x>0$,

$$(1+x)^n\geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2>\frac{n(n-1)}{2}x^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

(βλέπε Άσκηση 9, Κεφάλαιο 1), έχουμε

$$\cancel{n}=a_n^n=(1+x_n)^n>\frac{\cancel{n}(n-1)}{2}x_n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

οπότε,

$$0 \leq x_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}} \text{ για } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

και εφόσον $\sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0$ καθώς $n \to \infty$ (αιτιολογήστε το), από το κριτήριο παρεμβολής, έπεται ότι $x_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

<u>Πρόταση 2.16</u> Η ακολουθία $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει καθώς $n \to \infty$ σε έναν πραγματικό αριθμό μεταξύ 2 και 3, ο οποίος είναι γνωστός ως αριθμός του Euler και συμβολίζεται με e. Έτσι λοιπόν ορίζουμε

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Επιπλέον, ισχύει

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right) = e.$$

<u>Απόδειξη</u>: Στις σημειώσεις.