7.5 Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης

7.5.1 Πίνακας βασικών ολοκληρωμάτων

Προκειμένου να υπολογίσουμε το $\int_a^b f(x)dx$ αρκεί να βρούμε μια παράγουσα της f, δηλαδή μια συνάρτηση G για την οποία $G'(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$. Στη συνέχεια, δίνουμε έναν πίνακα βασικών ολοκληρωμάτων, όπου η συνάρτηση δεξιά είναι μια παράγουσα της συνάρτησης κάτω από το ολοκλήρωμα αριστερά.

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq -1$,

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$,

$\int e^x dx = e^x$,

$\int \sin x dx = -\cos x$,

$\int \cos x dx = \sin x$,

$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$,

$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x$,

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$,

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$.

Ο υπολογισμός ενός ολοκληρώματος δεν είναι μια απλή διαδικασία. Οι δύο πιο κλασσικές μέθοδοι, όπου με τη χρήση βασικών ολοκληρωμάτων υπολογίζονται πιο περίπλοκα, είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη και η ολοκλήρωση με αντικατάσταση.

7.5.2 Ολοκλήρωση κατά μέρη

<u>Θεώρημα 7.20</u> Έστω $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[a,b]$. Αν οι f' και g' είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

<u>Απόδειξη</u>: Η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Δεδομένου ότι οι $f'g$ και fg' είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a,b]$ (?), το ίδιο ισχύει για την $(fg)'$. Οπότε, από τις Προτάσεις 7.7-7.8 και το Θεώρημα 7.19,

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \int_a^b [(fg)'(x) - f'(x)g(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b (fg)'(x)\,dx - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

$$= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

<u>Παραδείγματα</u>: (α) $\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x(e^x)'\,dx$

$$= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 (x)'e^x\,dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \int_0^1 e^x\,dx = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1.$$

(β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx = x(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x)'(-\cos x\,dx)$

$$= \frac{\pi}{2}\underbrace{\left(-\cos\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - 0(-\cos 0) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

(γ) $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1\cdot \ln x\,dx = \int_1^e (x)'\ln x\,dx$

$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x(\ln x)'dx = e\ln e - 1\cdot\ln 1 - \int_1^e x\frac{1}{x}dx$

$= e - \int_1^e dx = e-(e-1) = e-e+1 = 1.$

(δ) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x\cdot\frac{1}{x}dx = \int_1^e \ln x(\ln x)'dx$

$= (\ln x)^2\Big|_1^e - \int_1^e (\ln x)'\ln x\,dx = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2 - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot\ln x\,dx$

$= 1 - \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx \Longrightarrow 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = 1 \Longrightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}.$

(ε) $\int e^x\sin x\,dx = \int (e^x)'\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x(\sin x)'dx$

$= e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - \int (e^x)'\cos x\,dx$

$= e^x\sin x - e^x\cos x + \int e^x(\cos x)'dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) + \int e^x(-\sin x)dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) - \int e^x\sin x\,dx$

$\Longrightarrow 2\int e^x\sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x)$

$\Longrightarrow \int e^x\sin x\,dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}.$

7.5.3 Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Θεώρημα 7.21 Έστω $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, ενώ η g' είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Αν η συνάρτηση $f: g([a,b]) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $g([a,b])$, τότε

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς, αν F είναι μια παράγουσα της f, τότε το δεξιό μέλος

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

$F'(g(x))$

Τώρα, για την F ισχύει, από το Θεώρημα 5.3,

$$(F\circ g)'(x) = (F'\circ g)(x)\cdot g'(x) = (f\circ g)(x)\cdot g'(x) \quad \forall x \in [a,b],$$

δηλαδή η $F\circ g$ είναι μια παράγουσα της $(f\circ g)\cdot g'$, οπότε

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_a^b (f\circ g)(x)g'(x)\,dx = (F\circ g)(b) - (F\circ g)(a)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Τα βήματα της μεθόδου ολοκλήρωσης με αντικατάσταση είναι:

(1) Θέτουμε $u = g(x)$, οπότε $du = g'(x)\,dx$, με σκοπό να οδηγηθούμε σε ολοκλήρωμα (μόνο) ως προς u, με όρια $g(a)$ και $g(b)$. Προφανώς, μπορεί να απαιτούνται κατάλληλες τροποποιήσεις. Για παράδειγμα, αν $g(a) > g(b)$, τότε $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = -\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)\,du$. (Άσκηση)

(2) Βρίσκουμε μια παράγουσα για τη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα ως προς u.

(3) Αν το ολοκλήρωμα είναι αόριστο, (ξανα)αντικαθιστούμε $u = g(x)$.

Παραδείγματα: (α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x\,dx$.

Θέτουμε $u=\sin x \Longrightarrow du=\cos x\,dx$, οπότε,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\cos x\,dx=\int_{\sin 0}^{\sin\frac{\pi}{2}} u^4\,du=\int_0^1 u^4\,du=\frac{u^5}{5}\Big|_0^1=\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{1}{5}.$$

(β) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx.$

Θέτουμε $u=\cos x \Longrightarrow du=-\sin x\,dx$, οπότε,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=-\int_{\cos 0}^{\cos\frac{\pi}{4}} \frac{1}{u}\,du=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{u}\,du=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{u}\,du$$

$1>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$=\ln u\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\ln 1-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\ln 2}{2}.\ (?)$$

(γ) $\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$.

Θέτουμε $u=\ln x \Longrightarrow du=\frac{1}{x}dx$, οπότε,

$$\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln e}\frac{1}{u}\,du=\int_{\ln 2}^1\frac{1}{u}\,du=\ln u\Big|_{\ln 2}^1=\ln 1-\ln(\ln 2)$$

$$=-\ln(\ln 2).$$

(δ) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Θέτουμε $u=1+x^2 \Longrightarrow du=2x\,dx \Longrightarrow x\,dx=\frac{du}{2}$, οπότε,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx=\int_{1+0^2}^{1+1^2}\frac{1}{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int_1^2\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 1)=\frac{\ln 2}{2}.$$

(ε) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx.$

Θέτουμε $u = x+1 \Rightarrow du = dx$, οπότε,

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{1}{u^2+1}\,du = \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan u = \arctan(x+1).$$

Παράγουσα

(στ) $\displaystyle\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx.$

Θέτουμε $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$, οπότε,

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1-u}{1+u}\,\frac{du}{u} = \int \frac{1-u}{u(1+u)}\,du.$$

Δεδομένου ότι

σταθερές

$$\frac{1-u}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+Bu}{u(1+u)} = \frac{(A+B)u+A}{u(1+u)}$$

Εφόσον θέλουμε να ισχύει $\forall u$ θα πρέπει $\begin{matrix} A+B=-1 \\ A=1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} A=1 \\ B=-2 \end{matrix}.$

Συνεπώς,

$$\frac{1-u}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}.$$

Έτσι

$$\int \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{1+u}\right) du = \int \frac{1}{u}\,du - 2\int \frac{1}{1+u}\,du$$

$$= \ln u - 2\ln(1+u) \text{ (άλλη μία αντικατάσταση?)}$$

$$= \ln e^x - 2\ln(1+e^x) = \ln\left[\frac{e^x}{(1+e^x)^2}\right].$$