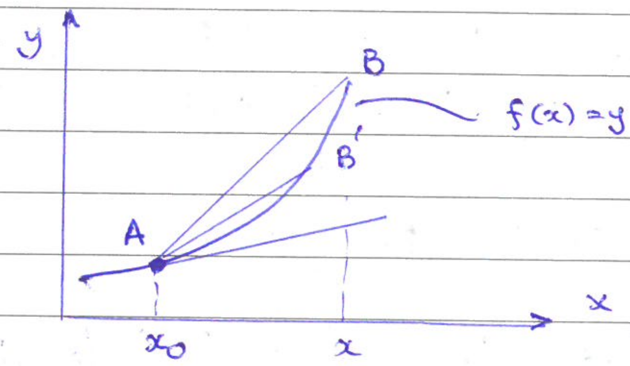
Παράγωγος Συνάρτησης

Βασική ιδέα: Εφαπτόμενη σε γραφική παράσταση ως όριο κλίσης "χορδής"



$$\text{κλίση "χορδής"} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \rightarrow \text{κλίση εφαπτόμενης καθώς } x \rightarrow x_0$$

Ορισμός: Έστω $f:(\alpha,\beta)\rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο x_0 αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{x\rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} := f'(x_0)$$

που είναι η παράγωγος της f στο x_0. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη αν $f'(x)$ είναι καλά ορισμένη $\forall x_0 \in (\alpha,\beta)$ και η συνάρτηση $f':(\alpha,\beta)\rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται παράγωγος της f. Ισοδύναμα, θέτοντας $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Αν $f:[\alpha,\beta]\rightarrow \mathbb{R}$ μπορούμε να ορίσουμε

$$f'(\alpha) = \lim_{x\rightarrow \alpha^+} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, \quad f'(\beta) = \lim_{x\rightarrow \beta^-} \frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}.$$

Αν $x_0 \in (\alpha,\beta)$ η $x_0 \in [\alpha,\beta]$ και εσωτερικό σημείο μπορούμε επίσης να ορίσουμε τις $f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ ως πλευρικά όρια (αν υπάρχουν).

Παραδείγματα

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0$$

(και $f' = 0$).

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

(και $f' = 1$).

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} x + x_0$$

$$= 2x_0$$

και γενικά $f' = 2x$.

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h} \cdot 2 \sin \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\underbrace{\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\downarrow \; 1} \cdot \underbrace{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}_{\downarrow \text{ συνέχεια cos} \; \cos x} \right) = \cos x.$$

Άσκηση: Δείξτε ότι $(\cos x)' = -\sin x$.

Θεώρημα. Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα του $\mathbb{R}$ και $f: I \to \mathbb{R}$, έστω $x_0 \in I$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f είναι συνεχής στο x_0

Απόδειξη. Το x_0 είναι σ.σ. του I. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Για $x \neq x_0$ γράφουμε:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Έχουμε: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ (f παραγωγίσιμη στο x_0).

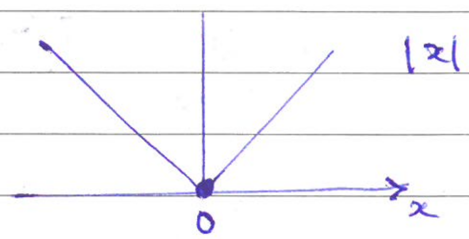
$\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$

Άρα: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$

Δηλαδή $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. □

Παρατήρηση: Το αντίστροφο δεν ισχύει, π.χ αν $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Τα πλευρικά όρια είναι:



$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1, \text{ και}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1,$$

και άρα η $f'(0)$ δεν ορίζεται.

Κανόνες παραγώγισης

Πρόταση: Έστω $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Τότε:

(α) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

(β) $(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(γ) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$

(δ) Αν $g \neq 0$ σε περιοχή του x_0, τότε

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Ειδικά:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Απόδειξη

(γ): $$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0+h) + f(x_0) g(x_0+h) - f(x_0) g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \cdot g(x_0+h) + f(x_0) \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \downarrow f'(x_0)$

$g(x_0+h) \downarrow g(x_0)$ (g συνεχής στο x_0)

$\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} \downarrow g'(x_0)$ (g παραγωγίσιμη στο x_0).

f, g συνεχής στο x_0 $\Rightarrow$

$\Uparrow$

f, g παραγωγίσιμη στο x_0

Άρα $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$.

(δ) $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{h\cdot g(x_0+h)\,g(x_0)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\cdot\frac{1}{g(x_0+h)\,g(x_0)}\right)$$

$$= -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Επίσης:

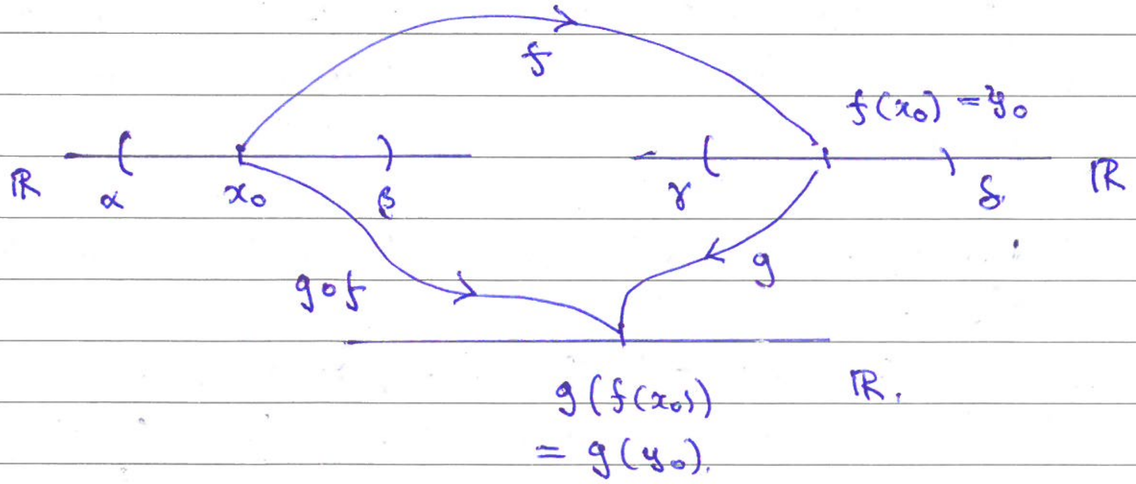
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

προκύπτει από τό παραπάνω (δ) καί (γ).

Θεώρημα : (κανόνας αλυσίδας).

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$ και $g:(\gamma,\delta)\to\mathbb{R}$. Ορίζουμε την σύνθεση $g\circ f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στό x_0 και:

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$



"Απόδειξη"

$$\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

όπου $y=f(x)$, $y_0=f(x_0)$. Στό όριο $x\to x_0$ έχουμε $y\to y_0$ (η f είναι συνεχής στό x_0) καί

$$\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}\longrightarrow g'(y_0)=g'(f(x_0))$$

(g παραγωγίσιμη στό $y_0=f(x_0)$)

και

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\longrightarrow f'(x_0)$$ (η f παραγωγίσιμη στό x_0)

από όπου προκύπτει το αποτέλεσμα.

Πρόβλημα με την απόδειξη: Δεν ξέρουμε ότι "κοντά" στό x_0 ισχύει $x\neq x_0$ καί δεν μπορούμε να διαιρέσουμε

Παρατήρηση Καραθεοδωρή: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(\alpha,\beta)$. Τότε:

$$\exists f'(x_0)\iff\exists\,\psi:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}\text{ συνεχής στό }x_0$$

τ.ω. $\psi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},\ x\neq x_0$

Απόδειξη παρατήρησης Καραθεοδωρή:

($\Rightarrow$): Ορίζουμε την $\psi(x)$ ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ &= f'(x_0), & x = x_0 \end{aligned}\right\}.$$

Τότε η ψ είναι συνεχής στο x_0

($\Leftarrow$): Το όριο:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \psi(x) = \psi(x_0)$$

(ψ συνεχής στο x_0)

υπάρχει, άρα $\exists f'(x_0) = \psi(x_0)$.

Απόδειξη (κανόνα αλυσίδας)

Θέλουμε νά δείξουμε ότι

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} \quad \left(= (g \circ f)'(x_0) \right).$$

Θέτουμε $f(x_0) = y_0$ καί ορίζουμε $\psi : (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} \psi(y) &= \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{αν } y \neq y_0 \\ &= g'(y_0) & \text{αν } y = y_0 \end{aligned}\right\}.$$

Τότε η ψ είναι συνεχής στο y_0 (και σε όλο το (γ, δ)).

Ισχυρισμός: $\forall x \in (\alpha, \beta)$, $x \neq x_0$.

$$(*) \quad \frac{g(f(x)) - g(\overbrace{f(x_0)}^{y_0})}{x - x_0} = \psi(f(x)) \cdot \frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{y_0}}{x - x_0}.$$

– Αν $f(x) \neq y_0$: $\psi(f(x)) = \dfrac{g(f(x)) - g(y_0)}{f(x) - y_0}$

και δεξιό μέλος της $(*)$ =

$$= \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{\cancel{f(x) - y_0}} \cdot \frac{\cancel{f(x) - y_0}}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(y_0)}{x - x_0}$$

= αριστερό μέλος της $(*)$.

– Αν $f(x) = y_0$: $\psi(f(x)) = g'(y_0)$ και η $(*)$ γράφεται

$$0 = g'(y_0) \cdot 0 \qquad \text{που ισχύει.}$$

~~Αρα~~

Στο όριο $x \to x_0 \Rightarrow f(x) \to f(x_0)$ (f παραγωγίσιμη στο x_0, και άρα συνεχής στο x_0)

- $\dfrac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \longrightarrow (g \circ f)'(x_0)$.
- $\psi(f(x)) \longrightarrow g'(f(x_0))$
- $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \longrightarrow f'(x_0)$

και επομένως:

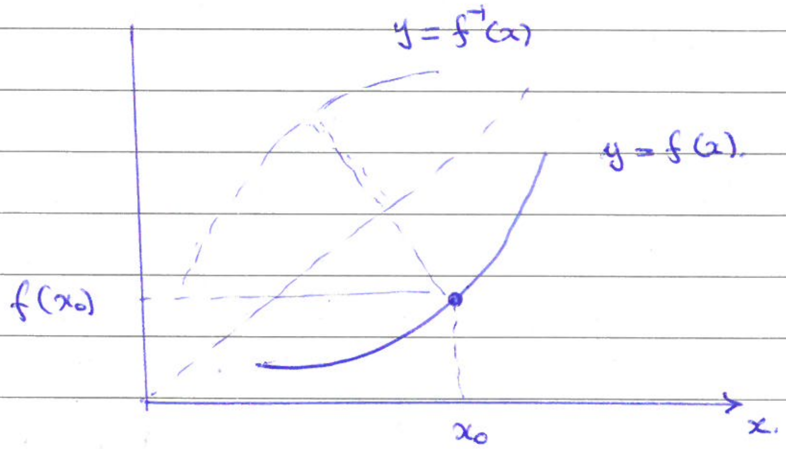
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \qquad \square$$

Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to(\gamma,\delta)$ συνεχής, "1-1" και επί.
Ξέρουμε ότι η $f^{-1}:(\gamma,\delta)\to(\alpha,\beta)$ ορίζεται και είναι συνεχής.

Θεώρημα: Αν $\exists f'(x_0)$ γιά κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$, τότε και $f'(x_0)\neq 0$,

$$\exists (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (\cancel{f'(x_0)\neq 0})$$



"Απόδειξη" $(f^{-1}\circ f)(x) = x$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$(f^{-1})'(f(x))\cdot f'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

αν $f'(x)\neq 0$. Πρόβλημα με την "απόδειξη": Δεν έχουμε δείξη ότι $(f^{-1})'$ υπάρχει. Για την Απόδειξη δες σημειώσεις.

Παραγώγιση κλασσικών συναρτήσεων

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Η f είναι παραγωγίσιμη καί $(x^n)' = n x^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη επαγωγικά: (α) $x' = 1 = x^0$ (το έχουμε ήδη αποδείξει). Έστω ότι ισχύει γιά $n \in \mathbb{N}$. Τότε για $n+1$: $(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = n x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 =$
$= (n+1) x^n$.

Επίσης $(x^{-n})' = -n x^{-n-1}$. $(n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.
$\left((x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1} \right)$.

(2) Πολυωνυμικές συναρτήσεις: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ $(a_i \in \mathbb{R})$. Η $p(x)$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και
$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$

(3) Ρητές συναρτήσεις: $f: \mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\} \to \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ είναι παραγωγίσιμες σε όλο το πεδίο ορισμού τους καί

$$f'(x) = \frac{p'(x) q(x) - p(x) q'(x)}{q^2(x)}.$$

(4) Τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ καί $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

είναι διαφορίσιμες σε όλο το $\mathbb{R}$ και $(\sin x)' = \cos x$,
$(\cos x)' = -\sin x$ (το έχουμε ήδη αποδείξει).

Επίσης: $\tan^2 \cancel{y}\, x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = y^2 \Rightarrow \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = y^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = y^2 + 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}$$

Άρα:

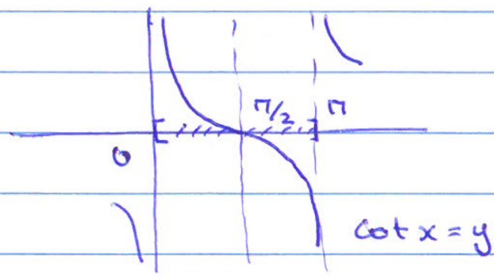
$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2}, \quad y \in \mathbb{R}$$

Ισοδύναμα:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δ $\cot : (0,\pi) \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$.



$y = \cot x \Longleftrightarrow x = \operatorname{arccot} y$ και

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-1}{\sin^2 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\operatorname{arccot} y)' = \frac{1}{(\cot x)'} = -\sin^2 x$$

$$y^2 = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{1+y^2} \quad \text{και}$$

$$(\operatorname{arccot} y)' = -\frac{1}{1+y^2} \quad y \in \mathbb{R}$$

Ισοδύναμα με αλλαγή μεταβλητής

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

5 Εκθετική συνάρτηση:

$\exp(x) = e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και $(e^x)' = e^x$. Πρέπει νά δείξουμε ότι:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$$

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

Έχουμε:

$$\left| \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right| = \frac{1}{|h|} \left| e^h - 1 - h \right| = \frac{1}{|h|} \left| \cancel{1} + \cancel{h} + \frac{h^2}{2!} + \cdots - \cancel{1} - \cancel{h} \right|$$

$$\leq \left[\frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + \cdots + \frac{|h|^n}{(n+1)!} \right] \leq 1 + \frac{|h|}{2} + \frac{|h|^2}{2^2} + \cdots - 1$$

(αν $|h|<2$)

$$= \frac{1}{1 - \frac{|h|}{2}} - 1 = \frac{2}{2-|h|} - 1 = \frac{2-2+|h|}{2-|h|} = \frac{|h|}{2-|h|}$$

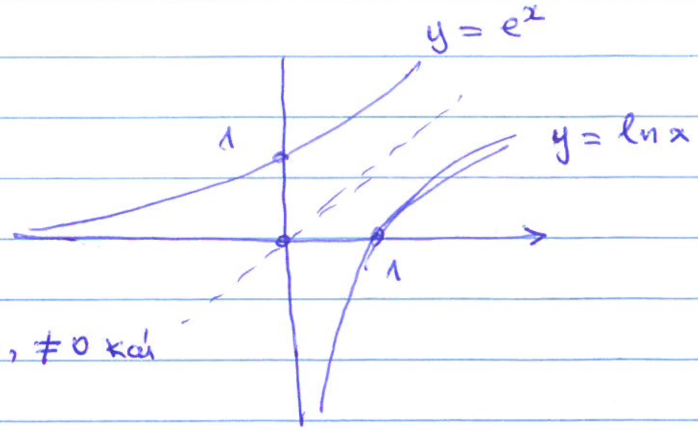
Και επομένως (αν $|h|<2$)

$$\frac{|h|}{2-|h|} < \varepsilon \Leftrightarrow |h| < 2\varepsilon - \varepsilon|h| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\varepsilon)|h| < 2\varepsilon \Leftrightarrow |h| < \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} (< 2)$$

Άρα αν επιλέξουμε $\delta = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$ έχουμε ότι γιά κάθε $|h|<\delta \Rightarrow \left| \frac{e^h - 1}{h} \right| < \varepsilon$

Λογαριθμική συνάρτηση



$e^x : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$\ln x : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

Η e^x είναι γνησίως αύξουσα, $\neq 0$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα η $\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο $(0,\infty)$

$$y = e^x \iff x = \ln y \,, \quad (\ln y)' = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Άρα

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \qquad y \in (0,\infty).$$

Με αλλαγή μεταβλητών: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$.

Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ορισμός: Έστω $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, f παραγωγίσιμη $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Η $f' : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ λέγεται η "πρώτη" παράγωγος της f.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε $f'' := (f')' : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι η δεύτερη παράγωγος της f.

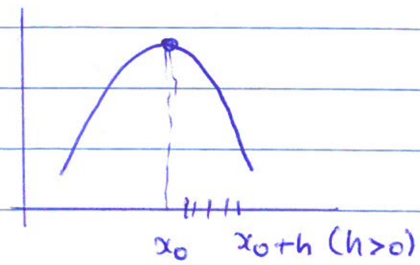
Επαγωγικά, αν $f^{(n)} : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι καλά ορισμένη, τότε $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ είναι η $n+1$ παράγωγος της f.

Αν $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ είναι απειρόριστα παραγωγίσιμη σε $x_0 \in (\alpha,\beta)$ αν $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Βασικά Θεωρήματα Διαφορικού Λογισμού

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Αν η f έχει μέγιστο ή ελάχιστο σημείο στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

<u>Απόδειξη:</u>



Έστω ότι f έχει μέγιστο σημείο στο x_0.
Τότε γιά $h>0$ (και $x_0+h<\beta$):

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\le 0$$

Γιά $h<0$ (καί $x_0+h>\alpha$)

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geqslant 0$$

Όμως, εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τα δύο πλευρικά όρια πρέπει να είναι ίσα και επομένως

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

(Παρόμοια απόδειξη γιά ελάχιστο σημείο). □

<u>Ορισμός:</u> Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ καί $x_0\in(\alpha,\beta)$.

(α) Η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 αν $\exists\,\delta>0$, τ.ω.

$$x\in(\alpha,\beta) \text{ με } |x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)\le f(x_0)$$

(β) Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 αν $\exists\,\delta>0$, τ.ω

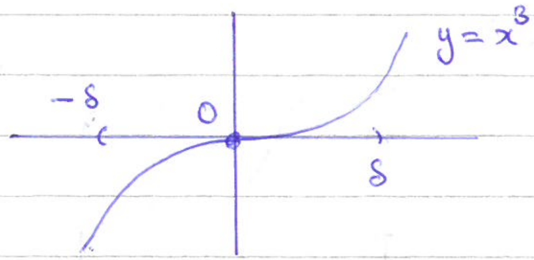
$x \in (\alpha,\beta)$ με $|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

Λέμε ότι η f έχει τοπικό ακρότατο στό x_0 αν έχει τοπικό μέγιστο η τοπικό ελάχιστο στο x_0.

Θεώρημα (Fermat): Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικό μέγιστο η τοπικό ελάχιστο στο $x_0\in(\alpha,\beta)$ και είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε $f'(x_0)=0$.

Απόδειξη: Απόδειξη μέ το προηγούμενο Θεώρημα. (αρκεί να πάρουμε $|h|<\delta$).

Παρατήρηση: Το αντίστροφο του Θεωρήματος δεν ισχύει. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3$. Έχουμε $f'(0)=3x^2|_0=0$ αλλά το $x=0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.



Ορισμός: Έστω διάστημα $I\subseteq\mathbb{R}$ και $f:I\to\mathbb{R}$. Ένα εσωτερικό σημείο $x_0\in I$ λέγεται "κρίσιμο" σημείο της f αν $f'(x_0)=0$.

Παρατήρηση: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $[\alpha,\beta]$. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στό (α,β), τότε:

$$x_0 \in \operatorname{argmax}(f) := \{x\in[\alpha,\beta] : f(x)=\max(f)\}$$

$$\Leftrightarrow (x_0=\alpha \text{ ή } x_0=\beta \text{ ή } f'(x_0)=0).$$

<u>Παράδειγμα:</u> Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.
Έχουμε $f'(x)=3x^2-3$. Άρα

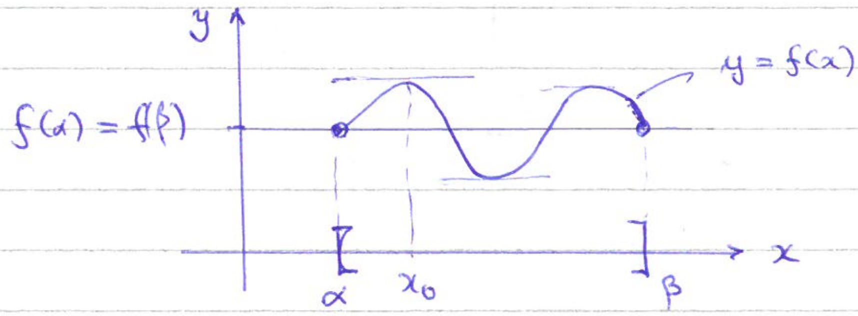
$$f'(x)=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=-1\notin[0,2] \text{ ή } x=1.$$

Επομένως η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε ένα από τα σημεία:

$$\left.\begin{array}{ll} x=0, & f(0)=1 \\ x=1, & f(1)=-1 \\ x=2, & f(2)=3 \end{array}\right\}$$

Άρα $\max(f)=3$, $\min(f)=-1$, και $\operatorname{argmax}(f)=\{0\}$, $\operatorname{argmin}(f)=\{1\}$.

<u>Θεώρημα (Rolle)</u>: Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στό $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στό (α,β) καί $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $\exists x_0\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f'(x_0)=0$



<u>Απόδειξη:</u> Αν η f είναι σταθερή ($f(x)=f(\alpha)$ $\forall x\in[\alpha,\beta]$) τότε $f'(x)=0$ γιά κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και μπορούμε να επιλέξουμε ως x_0 οποιοδήποτε από αυτά τα σημεία.

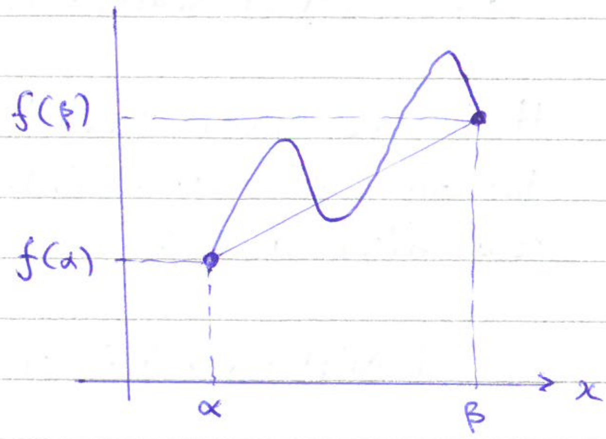
Αν η f δέν είναι σταθερή τότε είτε $\max(f)>f(\alpha)=f(\beta)$ είτε $\min(f)<f(\alpha)=f(\beta)$. (Τα $\min(f)$ και $\max(f)$ υπάρχουν γιατί η f είναι ~~σταθερ~~ συνεχής σε κλειστό διάστημα).
Επίσης ένα τουλάχιστον από τα $\max(f)$, $\min(f)$ παίρνεται σε σε εσωτερικό σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Σέ κάθε περίπτωση η f έχει (ολικό) ακρότατο σε κάποιο $x_0\in(\alpha,\beta)$. Αφού υπάρχει $f'(x_0)$ από το Θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_0)=0$. □

Θεώρημα (Μέσης Τιμής)

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β). Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω.

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Απόδειξη



Ορίζουμε $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$

$$h(x)=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)$$

και θεωρούμε:

$$g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$$

$$g(x)=f(x)-h(x)=f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha).$$

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $g(\alpha)=g(\beta)=0$. Από το Θεώρημα Rolle:

$$\exists\,\xi\in(\alpha,\beta) \text{ τ.ω. } g'(\xi)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(\xi)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0 \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

$\square$

Θεώρημα (Γενικευμένο Θεώρημα Μέσης Τιμής Cauchy – ΓΘΜΤ)

Έστω $f,g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και διαφορίσιμες στο (α,β). Τότε $\exists\,\xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω.:

$$(g(\beta)-g(\alpha))f'(\xi)=(f(\beta)-f(\alpha))g'(\xi).$$

Σχόλιο: Γιά $g(x)=x$ έπεται ότι $\exists\, \xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $(\beta-\alpha) f'(\xi) = f(\beta)-f(\alpha)$ που είναι το κλασσικό Θεώρημα Μέσης Τιμής.

Απόδειξη (ΓΘΜΤ) :

Ορίζουμε: $h: [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$

$$h(x) = (g(\beta)-g(\alpha))(f(x)-f(\alpha)) - (f(\beta)-f(\alpha))(g(x)-g(\alpha))$$

Η h είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και διαφορίσιμη στό (α,β). Επίσης, $h(\alpha)=0=h(\beta)$. Από το Θεώρημα Rolle $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $h'(\xi)=0$, δηλ.

$$(g(\beta)-g(\alpha))f'(\xi) - (f(\beta)-f(\alpha))g'(\xi) = 0. \quad \square$$

Μια άλλη διατύπωση του ΓΘΜΤ είναι η εξής:

Θεώρημα (ΓΘΜΤ - II) : Έστω $f,g: [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β). Υποθέτουμε επίσης ότι:

(α) f' καί g' δεν εχουν κοινή ρίζα στο (α,β)

(β) $g(\beta)-g(\alpha)\neq 0$

Τότε, $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Απόδειξη: Από το ΓΘΜΤ $\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ τ.ω

$$(g(\beta)-g(\alpha))f'(\xi) = (f(\beta)-f(\alpha))g'(\xi) \quad (*)$$

Παρατηρούμε ότι $g'(\xi) \neq 0$ (Αν είχαμε $g'(\xi) = 0$, τότε $(g(\beta) - g(\alpha)) f'(\xi) = 0 \Rightarrow f'(\xi) = 0$ Ε. και το ξ θα ήταν κοινή ρίζα των g' και f').

Από την (*) έχουμε:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)}$$

Απροσδιόριστες μορφές - Κανόνας l' Hospital

Πολλές φορές θέλουμε να υπολογίσουμε όριο της μορφής

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

γνωρίζοντας ότι ισχύει:

$$\text{(i)} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

ή όριο της μορφής:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

όταν ισχύει:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \to \infty} g(x)$$

Λέμε ότι οι περιπτώσεις αντιστοιχούν σε απροσδιόριστες μορφές: "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" ή "$0 \cdot \infty$".

Ⓐ Περίπτωση απροσδιόριστης μορφής "$\frac{0}{0}$":

Θεώρημα (l' Hospital): Έστω $f, g : (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x)$

(β) $g(x) \neq 0$ καί $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

Τότε, αν υπάρχει τό όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$$

υπάρχει και τό όριο

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

και είναι ίσο με ℓ.

Παραδείγματα

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ Έχουμε $f = \sin x$, $g = x$ καί

• $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim_{x \to 0} x = 0$

• $x \neq 0$ στό $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

• $x' = 1 \neq 0$

• $\frac{(\sin x)'}{(x)'} = \frac{\cos x}{1} \longrightarrow 1$ καθώς $x \to 0$

Από το Θεώρημα: $\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ Έχουμε:

- $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$
- $1-\cos x \neq 0$, $x \in (-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi)$
- $x^2 \neq 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)'}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = \dfrac{1}{2}$

Άρα $\exists \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Απόδειξη:

Επεκτείνουμε τις f, g στο (α, β) ορίζοντας $f(x_0) = 0$ και $g(x_0) = 0$. Τότε, αφού $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, οι f και g γίνονται συνεχείς στο x_0 και άρα σε όλο το (α, β).

Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \exists \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

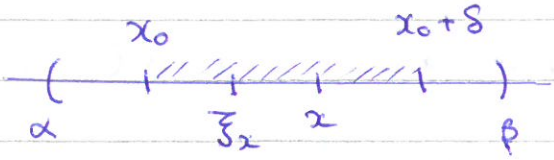
τότε $\exists\, \delta > 0$ τ.ω:

$$x_0 < y < x_0 + \delta \Rightarrow \left| \frac{f'(y)}{g'(y)} - \ell \right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Έστω $x \in (x_0, x_0+\delta)$, $x_0 + \delta < \beta$. Οι f και g είναι συνεχείς στο $[x_0, x]$ και διαφορίσιμες στο (x_0, x). Επίσης οι υποθέσεις του ΓΘΜΤ-ΙΙ ικανοποιούνται:

• $g'(y) \neq 0$ στό $(x_0,x) \Rightarrow f', g'$ δεν έχουν κοινή ρίζα στό $(x_0,x) \Rightarrow$ (α)

• $g(x_0) = 0 \neq g(y) \quad \forall y \in (x_0, x]$.



Από το ΓΘΜΤ-ΙΙ : $\exists\, \xi_x \in (x_0, x)$ τ.ω.:

$$\frac{f(x) - \overbrace{f(x_0)}^{0}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{0}} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Από την $(*)$ $\xrightarrow[\xi_x \in (x_0, x_0+\delta)]{}$ $\left| \dfrac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} - \ell \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| < \varepsilon$

Και επομένως: $\displaystyle \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

Με παρόμοιο τρόπο:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

Και επομένως

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad \square$$

<u>Παραλλαγές του Θεωρήματος l'Hospital</u>

"Αν $\displaystyle \lim_{x \to ⓐ} f(x) = \lim_{x \to ⓐ} g(x) = ⓑ$ και $\displaystyle \lim_{x \to ⓐ} \frac{f'(x)}{g'(x)} = ⓒ$

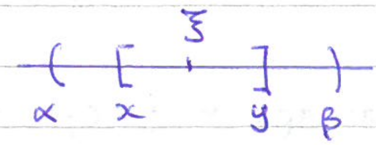
τότε $\displaystyle \lim_{x \to ⓐ} \frac{f(x)}{g(x)} = ⓒ$

(α)	(β)	(γ)
x_0	$+\infty(-\infty)$	ℓ
$x_0^+(x_0^-)$	0	ℓ
x_0	0	$+\infty(-\infty)$
$+\infty(-\infty)$	0	ℓ
$+\infty(-\infty)$	0	$+\infty(-\infty)$.

Θεώρημα (Παράγωγος και μονοτονία):
Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.
(α) Αν $f'\geq 0$ στό (α,β) τότε f είναι αύξουσα
(β) Αν $f'\leq 0$ στό (α,β) τότε f είναι φθίνουσα
(γ) Αν $f'>0$ στό (α,β) τότε f είναι γνησίως αύξουσα.
(δ) Αν $f'<0$ στό (α,β) τότε f είναι γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη (του (α)):
Έστω $x<y$ στο (α,β). Η f είναι συνεχής στό $[x,y]$ (f παραγωγίσιμη στό $(\alpha,\beta)\Rightarrow f$ συνεχής στό $(\alpha,\beta)\Rightarrow f$ συνεχής στό $[x,y]\subseteq(\alpha,\beta)$). Από το ΘΜΤ $\exists\,\xi\in(x,y)$ τ.ω.

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(\xi)\geq 0$$



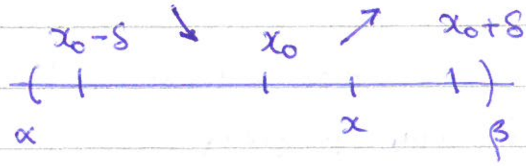
από τό (α) και αφού $y>x$ πρέπει να έχουμε $f(y)-f(x)\geq 0$ $\Rightarrow f(y)\geq f(x)$. Αφού x,y τυχόντα σημεία στό (α,β), η f είναι αύξουσα. Παρόμοια γιά τό (β), (γ) και (δ). ∎

Θεώρημα: Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $x_0\in(\alpha,\beta)$ τ.ω. $f'(x_0)=0$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει η $f''(x_0)$.
(α) Αν $f''(x_0)>0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0.
(β) Αν $f''(x_0)<0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0.
Αν $f''(x_0)=0$ τότε δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα.

Απόδειξη:

(α) Έχουμε ότι:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - \overbrace{f'(x_0)}^{0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = \ell > 0$$



Επομένως $\exists \delta > 0$ τ.ω. αν $0 < |x - x_0| < \delta$, τότε $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

- Αν $x \in (x_0, x_0+\delta)$, τότε $x - x_0 > 0$ και $f'(x) > 0$
- Αν $x \in (x_0-\delta, x_0)$, τότε $x - x_0 < 0$ και $f'(x) < 0$

Από το ΘΜΤ η f είναι γνησίως φθίνουσα στό $(x_0-\delta, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_0+\delta)$. Άρα,

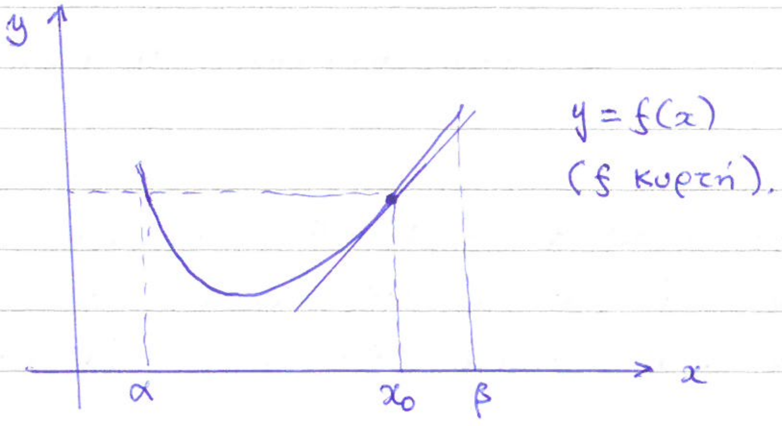
$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \ : \ f(x_0) \leq f(x)$$

και άρα η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0. Παρόμοια αποδεικνύεται και το (β). $\square$

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

Έστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Λέμε ότι η f είναι κυρτή αν για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ η εφαπτόμενη στό γράφημα της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι παντού στό (α, β) κάτω από την f, δηλ. $\forall x_0 \in (\alpha, \beta)$ καί $\forall x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε:

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Η f είναι κοίλη αν γιά κάθε $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και κάθε $x \in (\alpha,\beta)$ έχουμε:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

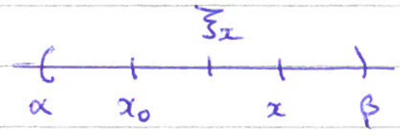
<u>Θεώρημα 1</u>: Έστω $f:(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη:

(α) Αν η f' είναι αύξουσα στό (α,β) τότε η f είναι κυρτή.

(β) Αν η f' είναι φθίνουσα στό (α,β) τότε η f είναι κοίλη.

<u>Απόδειξη</u>: (α) Έστω $x_0 \in (\alpha,\beta)$ και $x \in (\alpha,\beta)$. Ζητάμε $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

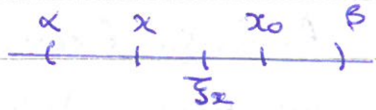
- Αν $x = x_0$ η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.
- Έστω $x > x_0$. Από το ΘΜΤ στό $[x_0, x]$ βρίσκουμε $\xi_x \in (x_0, x)$ τ.ω. $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x-x_0)$. Όμως η f είναι αύξουσα και επομένως $\xi_x > x_0 \Rightarrow f'(\xi_x) \geq f'(x_0)$ και $x - x_0 > 0$, άρα:



$$f'(\xi_x)(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0)$$

Συνεπώς: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x-x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0)$

Έστω $x < x_0$. Ομοίως, $\exists\, \xi_x \in (x, x_0)$ τ.ω



$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(\xi_x)}_{\leq f'(x_0)} \underbrace{(x-x_0)}_{<0} \geq f'(x_0)(x-x_0)$$

και συνεπώς η f είναι κυρτή. Παρομοίως αποδεικνύεται το (β). $\square$

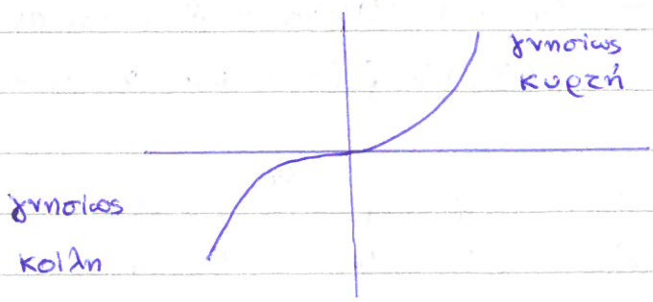
<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη.
(α) Αν η $f''\geq 0$ στο (α,β) τότε η f είναι κυρτή.
(β) Αν η $f''\leq 0$ στο (α,β) τότε η f είναι κοίλη.

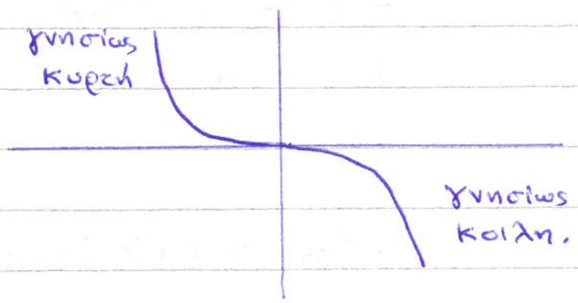
<u>Απόδειξη:</u> (α) $f''=(f')'\geq 0 \overset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} f'$ αύξουσα.
$\overset{\Theta_1}{\Longrightarrow} f$ κυρτή.

(β) $f''\leq 0 \overset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} f'$ φθίνουσα $\overset{\Theta_1}{\Longrightarrow} f$ κοίλη. $\square$

<u>Σημείο καμπής</u>

Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Λέμε ότι η f έχει σημείο καμπής στο σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$ αν
- $\exists\, \delta>0$ τ.ω. η f είναι γνησίως κυρτή στό $(x_0-\delta,x_0)$ και γνησίως κοίλη στο $(x_0,x_0+\delta)$, ή
- $\exists\, \delta>0$ τ.ω. η f είναι γνησίως κοίλη στό $(x_0-\delta,x_0)$ και γνησίως κυρτή στό $(x_0,x_0+\delta)$.





<u>Θεώρημα:</u> Έστω $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η f έχει σημείο καμπής στό $x_0\in(\alpha,\beta)$ και $\exists\, f''(x_0)$, τότε $f''(x_0)=0$.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω ότι x_0 σημείο καμπής από κυρτή σε κοίλη συνάρτηση. Τότε $\lim_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=f''(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=0.$ $\square$