Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η Μαθηματική Επαγωγή και Στοιχεία Συνδυαστικής

1.1 Η Μαθηματική Επαγωγή-Βασικές Παραδοχές

Το σύνολό των ακεραίων αριθμών συμβολίζεται με $\mathbb{Z}$. Δηλαδή
$$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$
Οι μη αρνητικοί ακέραιοι ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**[1] και το σύνολό τους συμβολίζεται με $\mathbb{N}$. Δηλαδή
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$
Οι ακέραιοι αριθμοί περιέχονται γνήσια στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των **ρητών αριθμών**, οι οποίοι είναι τα κλάσματα με αριθμητή και παρονομαστή ακεραίους. Δηλαδή
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \;\middle|\; \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } \beta \neq 0 \right\}.$$
Οι ρητοί αριθμοί περιέχονται γνήσια στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Το $\mathbb{R}$ περιέχει τους ρητούς και τους μη ρητούς, δηλαδή τους **άρρητους αριθμούς**. Για παράδειγμα, οι αριθμοί $\sqrt{2}$, π, $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ κτλ είναι άρρητοι αριθμοί.
Τέλος, οι πραγματικοί αριθμοί περιέχονται γνήσια στο σύνολο $\mathbb{C}$ των **μιγαδικών αριθμών**, δηλαδή το σύνολο
$$\mathbb{C} = \{\alpha + \beta\mathbf{i} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \text{ όπου } \mathbf{i}^2 = -1.$$
Για το σύνολο των μιγαδικών θα μιλήσουμε εκτενέστερα στο $2^{\text{ο}}$ κεφάλαιο. Έχουμε επομένως
$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$
Στο σύνολο των ακεραίων αριθμών δεχόμαστε τις ακόλουθες παραδοχές, οι οποίες είναι άμεση συνέπεια των αξιωμάτων θεμελίωσης των φυσικών αριθμών κατά Peano:

ΠΑΡΑΔΟΧΗ 1^{η}: Υποθέτουμε ότι $A \subseteq \mathbb{Z}$. Αν $n_0 \in A$ και με την υπόθεση ότι $n \in A$ προκύπτει ότι και $n+1 \in A$, τότε $\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \geq n_0\} \subseteq A$.
ΠΑΡΑΔΟΧΗ 2^{η}: Υποθέτουμε ότι $A \subseteq \mathbb{Z}$. Αν $n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots, n_0+k-1 \in A$, όπου k θετικός ακέραιος και, με την υπόθεση ότι $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1 \in A$ προκύπτει ότι και $n+k \in A$, τότε $\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \geq n_0\} \subseteq A$.
ΠΑΡΑΔΟΧΗ 3^{η}: Υποθέτουμε ότι $A \subseteq \mathbb{Z}$. Αν $n_0 \in A$ και με την υπόθεση ότι $m \in A$, για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ με $n_0 \leq m < n$ προκύπτει ότι και $n \in A$, τότε $\{n \in \mathbb{Z} \mid \; n \geq n_0\} \subseteq A$.
ΠΑΡΑΔΟΧΗ 4^{η}: Υποθέτουμε ότι $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{Z}$, το οποίο είναι κάτω φραγμένο στο $\mathbb{R}$. Τότε το A έχει ένα $\big($μοναδικό$\big)$ ελάχιστο στοιχείο n_0.

[1] Ορισμένοι θεωρούν ως φυσικούς τους θετικούς ακέραιους και εξαιρούν το μηδέν.

Αποδεικνύεται ότι οι δύο τελευταίες παραδοχές είναι ισοδύναμες. Επίσης, εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι η 4^{η} παραδοχή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη: Αν $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{Z}$, το οποίο είναι άνω φραγμένο στο $\mathbb{R}$, τότε το A έχει ένα $\big($μοναδικό$\big)$ μέγιστο στοιχείο n_0. $\big($Αρκεί να θεωρήσει κανείς το σύνολο $-A = \{-n \mid n \in A\} \subseteq \mathbb{Z}\big)$.
Στις αμέσως επόμενες υποπαραγράφους δίνουμε παραδείγματα για το πώς οι προηγούμενες βασικές παραδοχές αποτελούν ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο.

1.1.1 Συνέπειες της $1^{\eta\varsigma}$ Παραδοχής

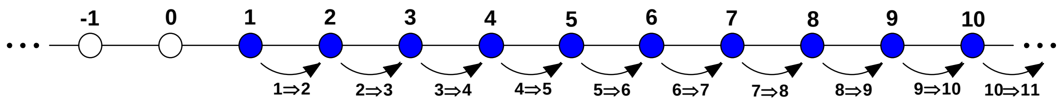
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.1. Υποθέτουμε ότι μία πρόταση-ιδιότητα, ας την πούμε q, ισχύει για έναν ελάχιστο ακέραιο n_0. Επίσης υποθέτουμε ότι αν η q ισχύει για κάποιον ακέραιο n, τότε ισχύει και για τον αμέσως επόμενό του $n+1$. Το συμπέρασμα είναι ότι η πρόταση q ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$.
Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{ η πρόταση } q \text{ ισχύει για τον ακέραιο } n\}$. Τότε $n_0 \in A$ και άρα $A \neq \varnothing$. Από την υπόθεση, αν η πρόταση q ισχύει για κάποιον ακέραιο n, τότε ισχύει και για τον $n+1$, δηλαδή αν $n \in A$, τότε και $n+1 \in A$. Με βάση την 1^{η} παραδοχή, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \subseteq A$. Επομένως η πρόταση q ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$. ■

Για να κάνουμε το πράγμα πιο «χειροπιαστό», ας δούμε το επόμενο παράδειγμα.

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε το εξής: Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ο τύπος
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
1^{o} βήμα: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για τον ελάχιστο δυνατό ακέραιο $n_0 = 1$. Πράγματι, για $n = 1$ το άθροισμα του πρώτου μέλους της αποδεικτέας σχέσης περιέχει μόνον το 1. Άρα το πρώτο μέλος ισούται με 1.
Από την άλλη μεριά, για $n = 1$, το 2^{o} μέλος ισούται με $\dfrac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$. Άρα για $n = 1$ η πρόταση είναι αληθής.
2^{o} βήμα: Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε αποδείξει τη σχέση $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ για κάποιον θετικό ακέραιο n. Με δεδομένη τη σχέση $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει η αντίστοιχη σχέση για τον επόμενο του n ακέραιο, δηλαδή τον $n+1$. Πρέπει επομένως να δείξουμε ότι $1+2+3+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\Big($με την υπόθεση φυσικά ότι ισχύει η σχέση $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}\Big)$.
Πράγματι, αν προσθέσουμε και στα δύο μέλη της σχέσης $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, **την οποία επαναλαμβάνουμε ότι θεωρούμε δεδομένη**, το $n+1$ θα πάρουμε:
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$
Ας δούμε τώρα τι πετύχαμε.

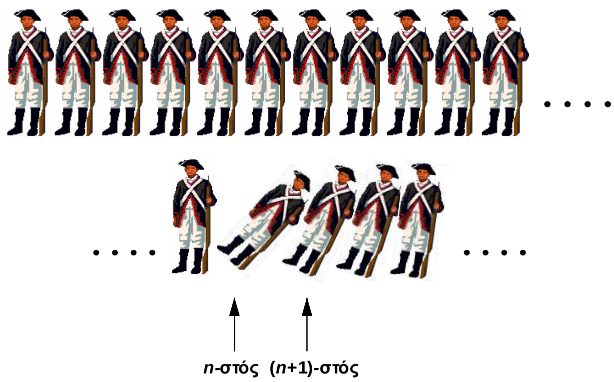
Με βάση το 1^{o} βήμα η πρόταση ισχύει για $n = 1$.
Όμως, αφού ισχύει για $n = 1$, τότε σύμφωνα με το 2^{o} βήμα η πρόταση θα ισχύει και για

$n = 1 + 1 = 2$.
Αφού ισχύει για $n = 2$, σύμφωνα πάλι με το 2^o βήμα θα ισχύει και για $n = 3$.
Αφού ισχύει για $n = 3$, σύμφωνα πάλι με το 2^o βήμα θα ισχύει και για $n = 4$.
Αφού ισχύει για $n = 4$, σύμφωνα πάλι με το 2^o βήμα θα ισχύει και για $n = 5$.
....
Προφανώς αυτή η διαδικασία δεν σταματά. Μπορούμε έτσι να αποδείξουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει π.χ. για $n = 1000000$, ξεκινώντας από το 1^o βήμα και εφαρμόζοντας το 2^o βήμα (το οποίο ονομάζεται και **επαγωγικό βήμα**) 999999 φορές. Είναι λογικό λοιπόν να συμπεράνουμε ότι η πρόταση θα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n, οσοδήποτε μεγάλος και αν είναι αυτός ο ακέραιος n. Κάποια στιγμή, ξεκινώντας από την αρχική τιμή και εφαρμόζοντας το επαγωγικό βήμα θα τον «φτάσουμε». Η παραπάνω διαδικασία αποδίδεται σχηματικά ως ακολούθως:



Σχήμα 1

Η διαδικασία αυτή θυμίζει λίγο το παιχνίδι του «ντόμινο». Σ' αυτό το παιχνίδι τοποθετούμε διαδοχικά διάφορα αντικείμενα (συνήθως πλάκες) κατά τέτοιο τρόπο ώστε αν πέσει κάποιο αντικείμενο, τότε αυτό θα συμπαρασύρει και το επόμενο, και το επόμενο,...κ.ο.κ. Μέχρι να πέσουν όλα.
Στο επόμενο σχήμα δεν έχουμε τοποθετήσει πλάκες αλλά στρατιωτάκια.



Σχήμα 2

Αν ρίξουμε το n-στό στρατιωτάκι αυτό θα συμπαρασύρει και το επόμενο, το $(n+1)$-στό. Αν λοιπόν ρίξουμε π.χ. το πέμπτο, αυτό θα συμπαρασύρει όλα τα υπόλοιπα και τελικά **όλα** τα στρατιωτάκια από το 5^o και μετά θα πέσουν. (Αν δεν πέσουν όλα αυτό σημαίνει ότι κάποιο έπεσε αλλά όχι το επόμενό του, δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή ***n*-στό** $\Rightarrow$ **(*n*+1)-στό**).

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

(iii) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Απόδειξη: **(i)** Η σχέση ισχύει για $n = 1$, γιατί και τα δύο μέλη δίνουν 1.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ και προσθέτουμε και στα δύο μέλη το $(n+1)^2$. Έχουμε:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + (n+1)^2 =$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \quad \text{(από την επαγωγική υπόθεση)}$$
$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right) = \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+4n+3n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2n(n+2)+3(n+2))}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}.$$

Η απόδειξη της σχέσης (i) ολοκληρώθηκε.

(ii) Η σχέση ισχύει για $n = 1$ (και τα δύο μέλη δίνουν 1).

Υποθέτουμε ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Τότε $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4} + n + 1\right) =$
$= \dfrac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Η απόδειξη της σχέσης (ii) ολοκληρώθηκε.

(iii) Η σχέση ισχύει για $n = 1$ $\left(\text{και τα δύο μέλη δίνουν } \dfrac{1}{2}\right)$. Υποθέτουμε ότι $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} +$ $+ \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{n+1}\left(n + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+1}\,\frac{n^2+2n+1}{n+2} =$$
$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}.$$
Η απόδειξη της (iii) είναι πλήρης. ■

2. (Ανισότητα Bernoulli) Αν $\varepsilon > -1$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει η σχέση
$$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon.$$

Απόδειξη: Για $n = 0$ η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα: $(1+\varepsilon)^0 = 1 = 1 + 0\cdot\varepsilon$.
Προκειμένου να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$, για κάποιο φυσικό αριθμό n. Επίσης, και αυτό είναι πολύ σημαντικό, παρατηρούμε ότι $1+\varepsilon > 0$. Μπορούμε λοιπόν να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης $(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$ με $1 + \varepsilon > 0$, χωρίς να αλλάξει φορά η ανισότητα.
Παίρνουμε λοιπόν: $(1+\varepsilon)^{n+1} \geq (1+\varepsilon)(1+n\varepsilon) = 1 + n\varepsilon + \varepsilon + n\varepsilon^2 = 1 + (n+1)\varepsilon + n\varepsilon^2 \underset{\varepsilon^2 \geq 0}{\geq}$
$\geq 1 + (n+1)\varepsilon$. ■

Παρατήρηση: Αν $\varepsilon \neq 0$, τότε στην ανισότητα Bernoulli θα έχουμε $(1+\varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon$, για κάθε $n = 2, 3, \ldots$, όπως προκύπτει από το επαγωγικό βήμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Έστω n ακέραιος με $n \geq 0$. Ορίζουμε τον αριθμό $n!$ ο οποίος καλείται ***n*-παραγοντικό** ως εξής:

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdots n & \text{αν } n \geq 1 \\ 1 & \text{αν } n = 0 \end{cases}$$

Ο κάπως παράδοξος ορισμός $0! = 1$ θα δικαιολογηθεί στη συνέχεια. Έτσι, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 2 \cdot 3 = 6$ (ο παράγοντας 1 προφανώς δεν παίζει ρόλο), $4! = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ κ.ο.κ. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $0 \leq k < n$ τότε $n! = k!(k+1)(k+2)\cdots n$. Π.χ. $7! = 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$.

3. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 4$ ισχύει $n! > n^2$.
Απόδειξη: Για $n = 4$ έχουμε $4! = 24 > 16 = 4^2$. Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 4$.
Υποθέτουμε τώρα ότι $n! > n^2$, για κάποιον ακέραιο $n \geq 4$. Τότε $(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2$. Αλλά $(n+1)n^2 > (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2 > n+1 \Leftrightarrow n(n-1) > 1$, η οποία ισχύει γιατί $n(n-1) \geq 4 \cdot 3 = 24 > 1$. Επομένως $(n+1)! > (n+1)^2$ και τελειώσαμε. ■

4. (i) Δείξτε ότι $\sqrt{n^n} < n!$, για κάθε $n \geq 3$.
(ii) Δείξτε ότι $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$, για κάθε $n \geq 2$.

Απόδειξη: (i) Για $n = 3$ έχουμε: $\sqrt{3^3} = 3\sqrt{3}$ και $3! = 6$. Αλλά $3\sqrt{3} < 6 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Leftrightarrow 3 < 4$, δηλαδή η πρόταση είναι αληθής για $n = 3$. Υποθέτουμε ότι $n! > \sqrt{n^n}$, για κάποιο $n \geq 3$. Θα αποδείξουμε ότι $(n+1)! > \sqrt{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow ((n+1)!)^2 > (n+1)^{n+1}$. Από τη σχέση $n! > \sqrt{n^n}$ παίρνουμε $(n!)^2 > n^n$. Επομένως $((n+1)!)^2 = (n+1)^2(n!)^2 > (n+1)^2 n^n$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $(n+1)^2 n^n \geq (n+1)^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)n^n \geq (n+1)^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \geq \dfrac{1}{n+1} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq \dfrac{1}{n+1}$. Πράγματι, από την ανισότητα Bernoulli, αφού $-\dfrac{1}{n+1} > -1$, παίρνουμε $\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^n \geq 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

(ii) Για $n = 2$ έχουμε $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 > 2 \Leftrightarrow 9 > 4 \cdot 2 = 8$, η οποία είναι αληθής. Υποθέτουμε ότι $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n > n!$, για κάποιον ακέραιο $n \geq 2$. Τότε $\left(\dfrac{n+2}{2}\right)^{n+1} = \dfrac{n+2}{2} \cdot \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \underset{\substack{\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση}}}{>} \dfrac{n+2}{2} \cdot \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot n! = \dfrac{n+2}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^n \cdot n! \underset{\substack{\text{ανισότητα} \\ \text{Bernoulli}}}{>} \dfrac{n+2}{2} \cdot \left(1 + \dfrac{n}{n+1}\right) \cdot n! = \dfrac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)} \cdot n!$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)} \geq n+1$. Η ανισότητα αυτή είναι γνήσια, όπως θα διαπιστώσουμε: $\dfrac{(n+2)(2n+1)}{2(n+1)} > n+1 \Leftrightarrow (n+2)(2n+1) > 2(n+1)^2 \Leftrightarrow 2n^2 + 5n + 2 > > 2n^2 + 4n + 2 \Leftrightarrow n > 0$. ■

5. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$.

Απόδειξη: Για $n = 1$ το πρώτο μέλος ισούται με $\dfrac{1}{2}$ και το δεύτερο με $2 - \dfrac{1+2}{2^1} = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$.

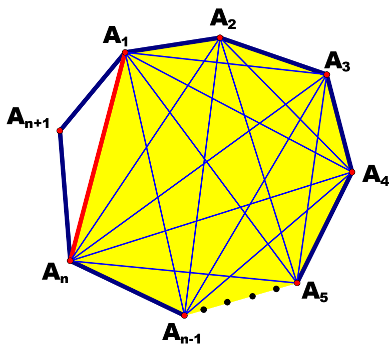
Άρα η πρόταση είναι αληθής για $n=1$.
Υποθέτουμε ότι $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.
Τότε: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{2n+4}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-$
$-\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$ και η ζητούμενη σχέση αποδείχθηκε. ■

6. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ο αριθμός $3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 17.

Απόδειξη: Για $n=1$ έχουμε: $3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2}=3\cdot 5+2=15+2=17=1\cdot 17$.
Υποθέτουμε ότι για κάποιο θετικό ακέραιο n ο αριθμός $3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2}$ είναι πολλαπλάσιο του 17, δηλαδή $3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2}=17\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{Z}$.
Τότε για $n+1$ θα έχουμε: $3\cdot 5^{2(n+1)-1}+2^{3(n+1)-2}=3\cdot 5^{2n-1}\cdot 5^2+2^{3n-2}\cdot 2^3=3\cdot 5^{2n-1}\cdot 25+2^{3n-2}\cdot 8=$
$=3\cdot 5^{2n-1}\cdot(17+8)+2^{3n-2}\cdot 8=3\cdot 5^{2n-1}\cdot 17+3\cdot 5^{2n-1}\cdot 8+2^{3n-2}\cdot 8=3\cdot 5^{2n-1}\cdot 17+8\cdot(3\cdot 5^{2n-1}+2^{3n-2})=$
$=17\cdot 3\cdot 5^{2n-1}+17\cdot 8\lambda=17(3\cdot 5^{2n-1}+8\lambda)$. Προφανώς ο αριθμός $3\cdot 5^{2n-1}+8\lambda$ είναι ακέραιος και κατά συνέπεια $3\cdot 5^{2(n+1)-1}+2^{3(n+1)-2}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 17. ■

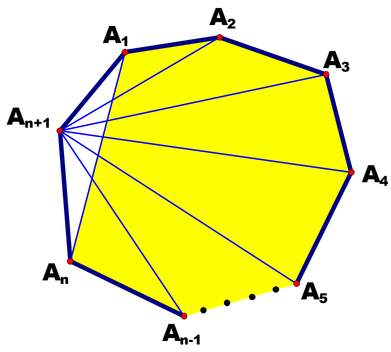
7. Κάθε κυρτό πολύγωνο με n κορυφές έχει $\frac{n(n-3)}{2}$ διαγωνίους.

Απόδειξη: Κατ' αρχάς σημειώνουμε ότι $n\geq 3$. Για $n=3$ το τρίγωνο δεν έχει διαγωνίους ή ισοδύναμα έχει 0 διαγωνίους. Όμως $\frac{3(3-3)}{2}=0$ και άρα ο τύπος $\frac{n(n-3)}{2}$ δουλεύει για $n=3$. Υποθέτουμε τώρα ότι κάθε κυρτό πολύγωνο με n κορυφές έχει $\frac{n(n-3)}{2}$ διαγωνίους, όπου το $n\geq 3$ είναι ακέραιος.
Με αυτό ως δεδομένο, θεωρούμε ένα κυρτό πολύγωνο $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ με $n+1$ κορυφές.



Σχήμα 3

Ενώνουμε την κορυφή A_n με την κορυφή A_1, οπότε παίρνουμε το πολύγωνο $A_1A_2A_3\ldots A_n$.
Προφανώς κάθε διαγώνιος του $A_1A_2A_3\ldots A_n$ είναι και διαγώνιος του $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$.
Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι το πλήθος των διαγωνίων του $A_1A_2A_3\ldots A_n$ ισούται με $\frac{n(n-3)}{2}$.
Απομένουν οι διαγώνιοι του $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ που δεν είναι διαγώνιοι του $A_1A_2A_3\ldots A_n$.
Ποιες και πόσες το πλήθος είναι αυτές;
Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα αυτές είναι όλες οι διαγώνιοι που ξεκινούν από το A_{n+1} συν τη διαγώνιο A_nA_1, η οποία είναι πλευρά του $A_1A_2A_3\ldots A_n$ και δεν μετρήθηκε προηγουμένως.
Οι διαγώνιοι που ξεκινούν από το A_{n+1} είναι όσες και τα σημεία $A_2,A_3,A_4,\ldots,A_{n-1}$. (Τα σημεία A_1 και A_n εξαιρούνται).



Σχήμα 4

Επομένως έχουμε $(n-1)-2+1=n-2$ διαγωνίους συν την διαγώνιο A_nA_1. Σύνολο $n-1$ επιπλέον διαγώνιοι. Κατά συνέπεια ο συνολικός αριθμός των διαγωνίων του $A_1A_2A_3\ldots A_nA_{n+1}$ ισούται με: $\dfrac{n(n-3)}{2}+n-1=\dfrac{n^2-3n}{2}+n-1=\dfrac{n^2-3n+2n-2}{2}=\dfrac{n^2+2n+1-3n-3}{2}=$ $=\dfrac{(n+1)^2-3(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)((n+1)-3)}{2}$, δηλαδή προκύπτει ο ίδιος τύπος με $n+1$ στη θέση του n. ■

8. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ταυτότητα:

$$\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-3}\beta^2+\cdots+\alpha^2\beta^{n-3}+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$$

Απόδειξη: Για $n=1$ έχουμε $\alpha^1-\beta^1=(\alpha-\beta)\alpha^0\beta^0$ $\big($το άθροισμα της παρένθεσης ισούται με $\alpha^0\beta^0\big)$ και άρα ο τύπος ισχύει σ' αυτή την περίπτωση.

Υποθέτουμε ότι $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$. Τότε έχουμε:

$$\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}=\alpha^{n+1}-\alpha^n\beta+\alpha^n\beta-\beta^{n+1}=\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta(\alpha^n-\beta^n).$$

Αλλά $\alpha^n-\beta^n=(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Επομένως

$$\begin{aligned}\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}&=\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta(\alpha-\beta)(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1})=\\&=(\alpha-\beta)\left(\alpha^n+\beta(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}\right)=\\&=(\alpha-\beta)(\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n)\end{aligned}$$

και άρα ο τύπος ισχύει και για $n+1$. ■

9. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n\geq 2$ ισχύει: $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

Απόδειξη: Για $n=2$ έχουμε: $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}+1>2\Leftrightarrow\sqrt{2}>1$, που ισχύει.

Υποθέτουμε ότι, για κάποιο n ισχύει ότι $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

Θα αποδείξουμε ότι $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}$.

Πράγματι, $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>$ $>\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

Αρκεί να δείξουμε ότι $\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\geq\sqrt{n+1}$. Θα δείξουμε την «ισχυρότερη» ανισότητα

$$\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1}.$$

Πράγματι, $\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)}+1>n+1 \Leftrightarrow \sqrt{n(n+1)}>n \Leftrightarrow n^2+n>$
$>n^2 \Leftrightarrow n>0.$ ■

10. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 3$ ισχύει: $n^{n+1}>(n+1)^n$.
Απόδειξη: Για $n=3$ η αποδεικτέα σχέση γίνεται $3^4>4^3 \Leftrightarrow 81>64$, η οποία είναι προφανώς αληθής.
Υποθέτουμε ότι, για κάποιο n ισχύει $n^{n+1}>(n+1)^n$. Θα δείξουμε ότι $(n+1)^{n+2}>(n+2)^{n+1}$.
Έχουμε:

$$(n+1)^{n+2}=\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}n^{n+1} \underset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{>} \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}(n+1)^n=\frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{n+1}}=\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(\dfrac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1}>(n+2)^{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{(n+1)^2}{n}>n+2 \Leftrightarrow n^2+2n+1>$
$>n^2+2n \Leftrightarrow 1>0$, η οποία ισχύει. ■

11. (Ανισότητα Cauchy ή Caushy-Schwarz-Bunyakovsky) Αν $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ και $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2\right)\left(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2\right) \geq \left(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n\right)^2$$

Απόδειξη: Για $n=1$ παίρνουμε την ισότητα $\alpha_1^2\beta_1^2=\alpha_1^2\beta_1^2$.
Υποθέτουμε ότι $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2) \geq (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)^2$.
Τότε $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2+\alpha_{n+1}^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2+\beta_{n+1}^2)=(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2)+$
$+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2)+\alpha_{n+1}^2\beta_{n+1}^2 \geq \underbrace{(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)^2}_{\text{επαγωγική υπόθεση}}+$

$$+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2)+\alpha_{n+1}^2\beta_{n+1}^2=$$
$$=\underbrace{\left((\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)^2+\alpha_{n+1}^2\beta_{n+1}^2+2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)\alpha_{n+1}\beta_{n+1}\right)}_{\textbf{τέλειο τετράγωνο}}-$$
$$-2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)\alpha_{n+1}\beta_{n+1}+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2)=$$
$$=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots++\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2)\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+$$
$$+\beta_n^2)-2(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)\alpha_{n+1}\beta_{n+1}=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^2+$$
$$\textbf{(τέλεια τετράγωνα)}\begin{cases}+(\alpha_1^2\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2\beta_1^2-2\alpha_1\beta_1\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+\\ +(\alpha_2^2\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2\beta_2^2-2\alpha_2\beta_2\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+\\ +(\alpha_3^2\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2\beta_3^2-2\alpha_3\beta_3\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+\cdots+\\ +(\alpha_n^2\beta_{n+1}^2+\alpha_{n+1}^2\beta_n^2-2\alpha_n\beta_n\alpha_{n+1}\beta_{n+1})=\end{cases}$$
$$=(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^2+(\alpha_1\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_{n+1}-\alpha_{n+1}\beta_2)^2+\cdots+$$
$$+(\alpha_n\beta_{n+1}+\alpha_{n+1}\beta_n)^2 \geq (\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})^2.$$ ■

12. Αν ένα σύνολο Α έχει n στοιχεία, όπου $n \in \mathbb{N}$, τότε $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|=2^n$.
Απόδειξη: Για $n=0$, δηλαδή $\mathrm{A}=\varnothing$, το μοναδικό υποσύνολο του Α είναι το κενό. Επομένως $\mathcal{P}(\mathrm{A})=\{\varnothing\}$ και κατά συνέπεια $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|=1=2^0$. Αν $\mathrm{A}=\{\alpha\}$, μονοσύνολο, τότε $\mathcal{P}(\mathrm{A})=\{\varnothing,\{\alpha\}\}$. Επομένως $|\mathcal{P}(\mathrm{A})|=2=2^1$.
Υποθέτουμε ότι η πρόταση είναι αληθής για κάποιο $n \geq 0$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$.
Έστω Α$=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}\}$ ένα σύνολο με $n+1$ στοιχεία. Χωρίζουμε τα υποσύνολα του Α σε δύο ομάδες: Την ομάδα $\mathcal{D}$, η οποία αποτελείται από τα υποσύνολα του Α **που δεν περιέχουν**

το α_{n+1} και την ομάδα $\mathcal{D}'$, η οποία αποτελείται από τα υποσύνολα του Α **που περιέχουν το α_{n+1}**.
Τα υποσύνολα του Α που δεν περιέχουν το α_{n+1} είναι ακριβώς όλα τα υποσύνολα του $\mathrm{A}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, το οποίο περιέχει ακριβώς n στοιχεία. Δηλαδή $\mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathrm{A}_1)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης αυτά είναι 2^n το πλήθος, δηλαδή $|\mathcal{D}| = 2^n$.
Τώρα, σε κάθε υποσύνολο του Α που δεν περιέχει το α_{n+1} επισυνάπτουμε το α_{n+1} και παίρνουμε έτσι ένα μοναδικό υποσύνολο του Α, το οποίο ανήκει στη συλλογή $\mathcal{D}'$. Ορίζεται λοιπόν μια απεικόνιση $f : \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathrm{A}_1) \to \mathcal{D}'$, με τύπο $f(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \cup \{\alpha_{n+1}\}$, για κάθε $\mathrm{X} \in \mathcal{D}$. Επειδή κάθε σύνολο $\mathrm{Y} \in \mathcal{D}'$ γράφεται κατά τρόπο μοναδικό στη μορφή $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup \{\alpha_{n+1}\}$, όπου $\mathrm{X} = \mathrm{Y} \setminus \{\alpha_{n+1}\} \in \mathcal{D} = \mathcal{P}(\mathrm{A}_1)$, η f είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (1-1 και επί) ανάμεσα στις $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$. Έτσι, $|\mathcal{D}| = |\mathcal{D}'| = 2^n$. Επειδή προφανώς $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \varnothing$ και $\mathcal{P}(\mathrm{A}) = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, έπεται ότι $|\mathcal{P}(\mathrm{A})| = |\mathcal{D}| + |\mathcal{D}'| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. ■

Παρατήρηση: Λόγω της σχέσης $|\mathcal{P}(\mathrm{A})| = 2^{|\mathrm{A}|}$ η οποία συνδέει τον πληθάριθμο ενός συνόλου Α με αυτόν του δυναμοσυνόλου του, πολλές φορές στη βιβλιογραφία το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\mathrm{A})$ του Α συμβολίζεται με 2^{A}, ακόμη και στην περίπτωση που το Α έχει άπειρα στοιχεία.

Από τα προηγούμενα παραδείγματα καθίσταται φανερό ότι η απόδειξη του επαγωγικού βήματος είναι συνήθως το πιο δύσκολο σημείο σε μια επαγωγική απόδειξη[2]. Η αντίληψη αυτή πολλές φορές μας οδηγεί στην εσφαλμένη εντύπωση ότι η επαλήθευση μιας πρότασης για την (ή τις) αρχική(-κές) τιμή(-ές) του n είναι ίσως περιττή. Τούτη όμως η αντίληψη ελοχεύει κινδύνους. Πράγματι, ας παρατηρήσουμε την παρακάτω «απόδειξη»:
Ας υποθέσουμε ότι μας ζητείται να αποδείξουμε ότι $n = n + 2$. (!) Είναι προφανές ότι η σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να ισχύει.
Και όμως· αν υποθέσουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει για κάποιο n, δηλαδή $n = n + 2$, τότε προσθέτοντας και στα δύο μέλη το 1, προκύπτει ότι $n + 1 = (n + 1) + 2$, δηλαδή η πρόταση ισχύει και για $n + 1$.
Είναι όμως προφανές ότι η σχέση $n = n+2$ είναι αδύνατη. Πού βρίσκεται το λάθος; Μα φυσικά στην έλλειψη του $1^{\text{ου}}$ βήματος. Θα έπρεπε να αποδείξουμε ότι $1 = 1+2 = 3$, πράγμα αδύνατον. Και για να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα του ντόμινο στην περίπτωσή μας: Δεν αρκεί να τοποθετήσουμε τα στρατιωτάκια κατά τέτοιον τρόπο ώστε αν πέσει κάποιο, τότε θα πέσει και το επόμενό του. Θα πρέπει να ρίξουμε το πρώτο στρατιωτάκι αλλιώς δεν πέφτει κανένα!

13. (Ορίζουσα Vandermonde) Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ μεταβλητές. Η ορίζουσα

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

ονομάζεται **ορίζουσα του Vandermonde**[3]. Δείξτε ότι $D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$.

Απόδειξη: Για $n = 2$ έχουμε $D(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$. Ο τύπος ισχύει λοιπόν για

[2] Αυτό δεν είναι πάντοτε ο κανόνας.

[3] Όπως αναφέρεται από τους ιστορικούς των Μαθηματικών, ο Vandermonde δεν χρησιμοποίησε ποτέ τη συγκεκριμένη ορίζουσα. Κακώς λοιπόν φέρει το όνομά του.

$n=2$. Τώρα, η ορίζουσα $D(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ γράφεται πιο αναλυτικά ως εξής:

$$D(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Αν αφαιρέσουμε από την τελευταία γραμμή την προτελευταία, πολλαπλασιασμένη επί x_1, θα πάρουμε: $D(x_1,x_2,\ldots,x_n)=$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Αν αφαιρέσουμε από την $(n-1)$-στη γραμμή την $(n-2)$-στη γραμμή, πολλαπλασιασμένη επί x_1, θα πάρουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ 0 & x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-2}-x_1x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-3} & x_2^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-3} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο, μέχρι να αφαιρέσουμε από τη δεύτερη γραμμή την πρώτη, πολλαπλασιασμένη επί x_1, θα καταλήξουμε στη μορφή

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_n-x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-3} & (x_3-x_1)x_3^{n-3} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-3} \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-2} & (x_3-x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_n-x_1)x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_2-x_1)x_2^{n-3} & (x_3-x_1)x_3^{n-3} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-3} \\ (x_2-x_1)x_2^{n-2} & (x_3-x_1)x_3^{n-2} & \cdots & (x_n-x_1)x_n^{n-2} \end{vmatrix}=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-3} & x_3^{n-3} & \cdots & x_n^{n-3} \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots$$

$(x_n-x_1)D(x_2,\ldots,x_n)$.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι ο τύπος ισχύει για $n-1$ μεταβλητές, τότε

$$D(x_2,\ldots,x_n)=\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Επομένως

$$D(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le i<j\le n}(x_j-x_i)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i). \qquad \blacksquare$$

Σημείωση: Εδώ το επαγωγικό βήμα ήταν από $n-1$ σε n. Αυτό βέβαια δεν αλλάζει τίποτα. Είναι θέμα συμβολισμού.

Άλυτες Ασκήσεις

14. Να αποδείξετε ότι $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$.

15. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

16. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$.

17. Δείξτε ότι $1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$.

18. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση:
$$1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}.$$

19. Δείξτε ότι αν α είναι θετικός πραγματικός αριθμός και n θετικός ακέραιος, τότε ισχύει:
$$\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}+\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}+\cdots+\frac{1}{(\alpha+n-1)(\alpha+n)}=\frac{n}{\alpha(\alpha+n)}.$$

20. Αν $x\neq\pm1$ και n μη αρνητικός ακέραιος, τότε ισχύει:
$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\cdots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

21. Δείξτε ότι αν $x\neq 1$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση:
$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}.$$

22. Να δείξετε ότι για κάθε $n\ge 2$ ισχύει: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$.

23. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

24. Αν n θετικός ακέραιος, δείξτε ότι $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}=2^n$.

25. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n\ge 6$ ισχύει: $n!>n^3$.

26. Αν $\alpha,\beta>0$ με $\alpha+\beta=1$, να δείξετε ότι για κάθε μη ανητικό ακέραιο n ισχύει: $\alpha^{2^n}+\beta^{2^n}\ge$ $\ge\dfrac{1}{2^{2^n-1}}$.

27. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο n με $n\ge 3$ ισχύει: $4^n+5^n<6^n$.

28. Δείξτε ότι για κάθε $n\ge 4$ ισχύουν οι σχέσεις: **α)** $3^{n-1}>n^2$ και **β)** $\sqrt[3]{3}>\sqrt[n]{n}$.

29. Δείξτε ότι αν $n>1$, τότε $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n}{n+1}$.

30. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n\ge 2$ ισχύει: $(n!)^3<n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$.

31. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n, ο αριθμός $5^n + 8^{3n-2}$ είναι πολλαπλάσιο του 13.

32. Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ο αριθμός $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 133.

33. Αν x είναι θετικός πραγματικός αριθμός και n ακέραιος με $n \geq 2$, τότε
$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \tfrac{n(n-1)}{2}x^2.$$

34. Να δείξετε ότι αν $\varepsilon > -1$ και $n > 1$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $(1+\varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = 0$. (*Υπόδειξη: Δείτε ξανά το επαγωγικό βήμα στην απόδειξη της ανισότητας Bernoulli*).

35. Αν $0 < \alpha < \frac{1}{n}$, να δείξετε ότι $(1+\alpha)^n < \frac{1}{1-n\alpha}$, για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ (*Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα Bernoulli*).

36. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει:
$$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < 1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}} + \tfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \tfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1.$$

37. Δείξτε ότι αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, τότε ισχύει η ανισότητα: $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n} \leq \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}$.

38. (Ανισότητα Weierstrass ή επί το γερμανικότερον Weierstraß) Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$, τότε
$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) > 1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \text{ για κάθε } n \geq 2.$$

39. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$, δείξτε ότι $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\right) \geq n^2$.

40. (Ανισότητα Chebyshev) Αν $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ και $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$, δείξτε ότι
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) \leq n \cdot (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n).$$

41. Δείξτε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $n = 1, 2, \ldots$, τότε $\frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$.

1.1.2 Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Ο αριθμός
$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$$
λέγεται **αριθμητικός μέσος** των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ και ο αριθμός
$$\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n}$$
λέγεται **γεωμετρικός μέσος** των $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. (Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου) Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε ο αριθμητικός μέσος είναι μεγαλύτερος ή ίσος του γεωμετρικού τους μέσου, δηλαδή
$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$$
Επιπροσθέτως η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. Παρακάτω θα δώσουμε τέσσερις αποδείξεις της ανισότητας αυτής.

1η Απόδειξη: (Αυτή είναι η πιο κλασική απόδειξη και την προτάσσω επειδή την έμαθα τελειώνοντας τη 2α λυκείου). Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν κάποιος από τους $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι μηδέν, τότε το δεύτερο μέλος της αποδεικτέας σχέσης μηδενίζεται. Άρα σ' αυτή την περίπτωση η σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. $\big($Γιατί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \geq 0\big)$. Στην περίπτωση αυτή η σχέση ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Έτσι στα επόμενα, αλλά και στις άλλες αποδείξεις που θα ακολουθήσουν υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ **είναι θετικοί**.

Αποδεικνύουμε πρώτα την ανισότητα στην περίπτωση που το n είναι δύναμη του 2. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n = 2^k$, όπου k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Εφαρμόζουμε επαγωγή επί του k.

Αν $k = 0$, δηλαδή $n = 2^0 = 1$, τότε έχουμε ακριβώς έναν αριθμό $\alpha_1 > 0$ και η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε είναι η $\dfrac{\alpha_1}{1} \geq \sqrt[1]{\alpha_1}$, δηλαδή $\alpha_1 \geq \alpha_1$, η οποία ισχύει βεβαίως ως ισότητα.

Στην περίπτωση που $k = 1$ και άρα $n = 2$ έχουμε δύο αριθμούς α_1 και α_2 και πρέπει να αποδείξουμε ότι $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \geq \sqrt{\alpha_1\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 \geq 2\sqrt{\alpha_1\alpha_2} \Leftrightarrow (\sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\alpha_2})^2 \geq 0$, η οποία είναι αληθής. Ισχύει δε ως ισότητα αν και μόνον αν $\sqrt{\alpha_1} = \sqrt{\alpha_2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα είναι αληθής για κάθε 2^k μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^k}$, δηλαδή

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k}}{2^k} \geq \sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}}. \quad \textbf{(1)}$$

και ότι ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^k}$.

Θεωρούμε τώρα 2^{k+1} μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2^k}, \alpha_{2^k+1}, \alpha_{2^k+2}, \ldots, \alpha_{2^{k+1}}$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k} + \alpha_{2^k+1} + \alpha_{2^k+2} + \cdots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{\dfrac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_{2^k}}{2^k} + \dfrac{\alpha_{2^k+1} + \cdots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \quad \textbf{(2)}$$

Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης οι αριθμοί $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k}}{2^k}$ και $\dfrac{\alpha_{2^k+1} + \alpha_{2^k+2} + \cdots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι των $\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}}$ και $\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}$ αντίστοιχα.

Επομένως

$$\frac{\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k}}{2^k} + \dfrac{\alpha_{2^k+1} + \alpha_{2^k+2} + \cdots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^k}}{2} \geq \frac{\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}} + \sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}}{2} \quad \textbf{(3)}$$

Επειδή όμως δείξαμε η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου ισχύει για δύο αριθμούς $\Big($εδώ μπορούμε να πάρουμε τους $\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}}$ και $\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}\Big)$, θα έχουμε:

$$\frac{\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}} + \sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}}\,\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}} =$$
$$= \sqrt{\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}} = \sqrt[2^{k+1}]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}} \quad \textbf{(4)}$$

Από τις σχέσεις (2), (3) και (4) προκύπτει ότι

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k} + \alpha_{2^k+1} + \alpha_{2^k+2} + \cdots + \alpha_{2^{k+1}}}{2^{k+1}} \geq \sqrt[2^{k+1}]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}} \quad \textbf{(5)}$$

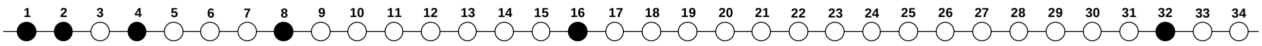
δηλαδή η ανισότητα ισχύει και για $n = 2^{k+1}$. Με βάση την αρχή της μαθηματικής επαγωγής θα ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n ο οποίος είναι δύναμη του 2.

Σημειώνουμε εδώ πως για να ισχύει ως ισότητα η σχέση (3) θα πρέπει
$\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{2^k}}{2^k} = \sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2^k}(= \sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}})$ και

$$\frac{\alpha_{2^k+1}+\alpha_{2^k+2}+\cdots+\alpha_{2^{k+1}}}{2^k}=\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha_{2^k+1}=\alpha_{2^k+2}=\cdots=\alpha_{2^{k+1}}\big(=\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}\big).$$

Επίσης, για να ισχύει ως ισότητα η σχέση (4) θα πρέπει $\sqrt[2^k]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2^k}}=\sqrt[2^k]{\alpha_{2^k+1}\alpha_{2^k+2}\cdots\alpha_{2^{k+1}}}$. Επομένως για να ισχύει ως ισότητα η σχέση (5) θα πρέπει να έχουμε $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2^k}=$ $=\alpha_{2^k+1}=\alpha_{2^k+2}=\cdots=\alpha_{2^{k+1}}$.

Τι γίνεται όμως για εκείνα τα n που δεν είναι δυνάμεις του 2; Αν παρατηρήσουμε το επόμενο σχήμα, θα διαπιστώσουμε ότι δημιουργούνται κενά (άσπρες μπάλλες) μεταξύ των θετικών ακεραίων. Σ' αυτά τα κενά δεν γνωρίζουμε ακόμη αν ισχύει η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.



Σχήμα 5

Θα πάμε ανάποδα: Θα αποδείξουμε ότι αν η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου ισχύει για κάποιον θετικό ακέραιο $n>2$, τότε θα ισχύει και για τον προηγούμενό του $n-1$.

Έτσι, ξέροντας ότι ισχύει για π.χ. $n=16$ θα ισχύει και για $n=15$, αλλά και για $n=14$ κ.ο.κ., κλείνοντας έτσι τα κενά στην απόδειξη. $\big($Είναι προφανές ότι για κάθε θετικό ακέραιο n υπάρχει δύναμη του 2 που τον υπερβαίνει. Π.χ. από την ανισότητα Bernoulli παίρνουμε $2^n=(1+1)^n\geq 1+n>n\big)$.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για οποιουσδήποτε $n>2$ μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Επίσης ισχύει ως ισότητα μόνο στην περίπτωση που όλοι οι αριθμοί είναι ίσοι.

Θεωρούμε τώρα $n-1$ το πλήθος μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$. Οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,$ α_{n-1} και $\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}$ είναι n το πλήθος. Εφόσον η ανισότητα ισχύει για n αριθμούς, θα έχουμε

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}}{n}\geq\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}}{n}\geq\sqrt[n]{\sqrt[n-1]{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})^{n-1}}\cdot\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}}=$$

$$=\sqrt[n]{\sqrt[n-1]{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})^n}}=\sqrt[n(n-1)]{(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})^n}=\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\geq n\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}\geq(n-1)\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}\geq\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}.$$

Επισημαίνουμε εδώ πως η σχέση ισχύει ως ισότητα μόνον όταν $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=$ $=\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

2η Απόδειξη: Υποθέτουμε όπως και προηγουμένως ότι $\alpha_i>0$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$. Πρώτα, αποδεικνύουμε επαγωγικά τον επόμενο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Έστω $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$, έτσι ώστε $x_1x_2\cdots x_n=1$. Τότε

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geq n.$$

Μάλιστα, ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$.

Για $n=1$ έχουμε $x_1=1\geq 1$.

Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει για n θετικούς αριθμούς και ότι ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι (με τη μονάδα).
Έστω τώρα $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} > 0$, έτσι ώστε $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1}$. Τότε $x_{n+1} \geq 1$. Πράγματι, αν όλοι οι αριθμοί $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ ήσαν μικρότεροι της μονάδας, τότε και το γινόμενό τους θα ήταν μικρότερο του 1. Ανάλογα προκύπτει ότι $x_1 \leq 1$.
Η σχέση $x_1 x_2 \cdots x_n x_{n+1} = 1$ γράφεται $(x_1 x_{n+1}) x_2 \cdots x_n = 1$. $\big($Έχουμε αντικαταστήσει τους $n+1$ αριθμούς $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ με τους n αριθμούς $(x_1 x_{n+1}), x_2, \ldots, x_n$, θεωρώντας το γινόμενο $x_1 x_{n+1}$ ως έναν αριθμό$\big)$. Από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $(x_1 x_{n+1}) + x_2 + \cdots + x_n \geq n$, με ισότητα αν και μόνον αν $(x_1 x_{n+1}) = x_2 = \cdots = x_n = 1$.
Παρατηρούμε ότι $x_1 + x_{n+1} \geq x_1 x_{n+1} + 1 \Leftrightarrow x_{n+1}(1 - x_1) + x_1 - 1 = (x_{n+1} - 1)(1 - x_1) \geq 0$, η οποία ισχύει γιατί $x_{n+1} \geq 1$ και $x_1 \leq 1$.
Επομένως $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1} = (x_1 + x_{n+1}) + x_2 + \cdots + x_n \geq x_1 x_{n+1} + 1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n+1$.
Ισότητα θα προκύψει αν έχουμε $(x_1 x_{n+1}) + x_2 + \cdots + x_n = n \Leftrightarrow (x_1 x_{n+1}) = x_2 = \cdots = x_n = 1$ και $(1 - x_1)(x_{n+1} - 1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ ή $x_{n+1} = 1$. Στη δεύτερη περίπτωση, εφόσον $x_1 x_{n+1} = 1$ παίρνουμε και $x_1 = x_{n+1} = 1$.
Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.
Θέτουμε $x_i = \dfrac{\alpha_i}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}}$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.
Παρατηρούμε ότι $x_1 x_2 \cdots x_n = \dfrac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}{(\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n})^n} = 1$.
Με βάση τον ισχυρισμό που αποδείξαμε θα έχουμε: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} +$
$+ \dfrac{\alpha_2}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} + \cdots + \dfrac{\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} \geq n \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$.
Η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha_1}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} = \dfrac{\alpha_2}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} =$
$= \cdots = \dfrac{\alpha_n}{\sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}} = 1 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$. ■

3η Απόδειξη: Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Bernoulli.
Θέτουμε $A_k = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k}{k}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.
Προφανώς $A_k > 0$ $\big($εφόσον, όπως και προηγουμένως έχουμε υποθέσει ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί$\big)$ και $kA_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$ έχουμε:

$$\frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k} = \frac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^{k+1}} \cdot A_k = \frac{\left(\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k + \alpha_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1}}{A_k^{k+1}} A_k = \left(\frac{kA_k + \alpha_{k+1}}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} A_k =$$
$$= \left(\frac{(k+1)A_k + \alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} A_k = \left(1 + \frac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} A_k.$$

Αν $\dfrac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k} \leq -1$, τότε $\alpha_{k+1} - A_k \leq -(k+1)A_k \Leftrightarrow \alpha_{k+1} \leq -kA_k < 0$, άτοπο.
Επομένως $\dfrac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k} > -1$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\frac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k} = 1 + \frac{\alpha_{k+1} - A_k}{A_k} = \frac{A_k + \alpha_{k+1} - A_k}{A_k} = \frac{\alpha_{k+1}}{A_k}.$$

Επομένως $\dfrac{A_{k+1}^{k+1}}{A_k^k} \geq \dfrac{\alpha_{k+1}}{A_k} A_k = \alpha_{k+1}$.

Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και με δεδομένο ότι $A_1 = \dfrac{\alpha_1}{1} = \alpha_1$, παίρνουμε: $A_n^n = \dfrac{A_n^n}{A_{n-1}^{n-1}} \cdot \dfrac{A_{n-1}^{n-1}}{A_{n-2}^{n-2}} \cdots \dfrac{A_3^3}{A_2^2} \cdot \dfrac{A_2^2}{A_1} A_1 \geq \alpha_n \alpha_{n-1} \cdots \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1$, απ' όπου προκύπτει

$$A_n \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1} \alpha_n}.$$

Σημειώνουμε ότι για να προκύψει ισότητα θα πρέπει στην ανισότητα Bernoulli

$$\left(1 + \frac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}\right)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\frac{\alpha_{k+1} - A_k}{(k+1)A_k}$$

να έχουμε $\alpha_{k+1} = A_k$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Άρα $\alpha_2 = A_1 = \alpha_1$, $\alpha_3 = A_2 = \dfrac{2\alpha_1}{2} = \alpha_1$ κ.ο.κ. Δηλαδή $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$. ■

4η Απόδειξη: (**Η απλούστερη γνωστή σε μένα**) Έστω $A = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n}$. Προφανώς, αν $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n (= A)$, τότε $A = \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n}$.
Έστω ότι κάποιος α_i είναι μεγαλύτερος του A. Τότε θα υπάρχει κάποιος $\alpha_j < A$. Γιατί, σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n > nA \Rightarrow A = \dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} > A$, άτοπο.
Έστω $\alpha_i = A + x$ και $\alpha_j = A - y$, όπου $x, y > 0$. Αντικαθιστούμε το α_i με το $\alpha_i' = A$ και το α_j με το $\alpha_j' = A + x - y$. Παρατηρούμε ότι $\alpha_i' + \alpha_j' = 2A + x - y = (A + x) + (A - y) = \alpha_i + \alpha_j$. Επομένως το άθροισμα και άρα ο αριθμητικός μέσος των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_j', \ldots, \alpha_n$ παραμένει ο ίδιος. Από την άλλη μεριά όμως, παρατηρούμε ότι $\alpha_i \alpha_j = (A + x)(A - y) = $ $= A^2 + (x - y)A - xy \underset{xy>0}{<} A^2 + (x - y)A = A(A + x - y) = \alpha_i' \alpha_j'$. Επομένως ο γεωμετρικός μέσος των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_j', \ldots, \alpha_n$ είναι μεγαλύτερος του αρχικού γεωμετρικού μέσου. Αν συνεχίσουμε κατ' αυτόν τον τρόπο, θα αυξάνουμε συνεχώς τον γεωμετρικό μέσο, ενώ ο αριθμητικός μέσος θα παραμένει ο ίδιος. Επιπροσθέτως, με την αντικατάσταση του α_i από το $\alpha_i' = A$ αυξάνουμε το πλήθος των αριθμών που είναι ίσοι με A, τουλάχιστον κατά έναν. (Μπορεί και ο $\alpha_j' = A + x - y$ να γίνει ίσος με A, αν $x = y$). Το βέβαιο είναι ότι αυτή η διαδικασία κάποτε θα σταματήσει, όταν φυσικά όλοι οι αριθμοί γίνουν ίσοι με A, οπότε και θα έχουμε ισότητα μεταξύ αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου. ■

Παρατήρηση: Και στην προηγούμενη 4η απόδειξη υποκρύπτεται μια μορφή επαγωγής, την οποία θα συζητήσουμε αργότερα.

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

42. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} + \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} \geq n$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε:

$$\frac{\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_3} + \cdots + \dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} + \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{\cancel{\alpha_1}}{\cancel{\alpha_2}} \cdot \frac{\cancel{\alpha_2}}{\cancel{\alpha_3}} \cdots \frac{\cancel{\alpha_{n-1}}}{\cancel{\alpha_n}} \cdot \frac{\cancel{\alpha_n}}{\cancel{\alpha_1}}} = \sqrt[n]{1} = 1,$$ απ' όπου προκύπτει η αποδεικτέα σχέση. ■

43. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 3$ ισχύει η σχέση: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} < n - \dfrac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}}$.

Απόδειξη: Η σχέση $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} < n - \dfrac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}}$ ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}} < n - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 1 - 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} + \cdots + \dfrac{n-1}{n}$.
Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε:

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}}{n-1} > \sqrt[n-1]{\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdots \frac{\cancel{n-1}}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}} \Leftrightarrow \frac{n-1}{\sqrt[n-1]{n}} < \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n-1}{n}. \quad \blacksquare$$

44. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \geq 2$ ισχύει η σχέση: $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

Απόδειξη: Η σχέση $n\left(\sqrt[n]{n+1} - 1\right) < 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ ισοδύναμα γράφεται $n\sqrt[n]{n+1} <$
$< 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} + n = (1+1) + \left(\dfrac{1}{2} + 1\right) + \left(\dfrac{1}{3} + 1\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} + 1\right) = \dfrac{2}{1} + \dfrac{3}{2} + \dfrac{4}{3} + \cdots + \dfrac{n+1}{n}$.
Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε:

$$\frac{\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cdots + \frac{n+1}{n}}{n} > \sqrt[n]{\frac{\cancel{2}}{1} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \cdots \frac{n+1}{\cancel{n}}} = \sqrt[n]{n+1} \Leftrightarrow n\sqrt[n]{n+1} < \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n}. \quad \blacksquare$$

Άλυτες Ασκήσεις

45. Στην $1^η$ απόδειξη της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και συγκεκριμένα στην απόδειξη του βήματος από n σε $n-1$, χρησιμοποιήσαμε τον γεωμετρικό μέσο $\sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}$ των αριθμών $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Δείξτε ότι αν αντί του γεωμετρικού μέσου χρησιμοποιήσουμε τον αριθμητικό μέσο $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}}{n-1}$ αυτών, τότε το επιχείρημα εξακολουθεί να δουλεύει.

46. Δείξτε ότι $(n!)^3 < n^n \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$ για κάθε $n = 2, 3, \ldots$

47. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει: $\sqrt[n]{(3n)!} < \dfrac{3n(3n+1)^2}{4}$.

1.1.3 Το Διώνυμο του Newton

Οι ταυτότητες $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ μας είναι ήδη γνωστές. Με προσοχή στις πράξεις μπορεί κανείς να αποδείξει την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$ ή, αν διαθέτει περισσότερη υπομονή (!) την ταυτότητα $(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5$. Γεννάται λοιπόν το ερώτημα: Υπάρχει γενικός τύπος ο οποίος να μας δίνει αμέσως το ανάπτυγμα του $(\alpha + \beta)^n$ για οποιονδήποτε (θετικό) ακέραιο n;

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. Έστω $x \in \mathbb{R}$ και k φυσικός αριθμός. Ορίζουμε:

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}, & \text{αν } k > 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0. \end{cases}$$

Το σύμβολο $\dbinom{x}{k}$ διαβάζεται $\boldsymbol{x}$ **ανά** $\boldsymbol{k}$.

Ο παράγοντας $x-k+1$ στον αριθμητή $x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ του συμβόλου $\binom{x}{k}$ δικαιολογείται αν παρατηρήσουμε ότι $\binom{x}{k}=\dfrac{(x-0)(x-1)(x-2)\cdots(x-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}$. Κοντολογίς, όσοι παράγοντες είναι πάνω είναι και κάτω.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. Αν $x\notin\mathbb{N}$, τότε $\binom{x}{k}\neq 0$.

Απόδειξη: Αν $k=0$, τότε $\binom{x}{k}=1\neq 0$. Έστω $k>0$. Τότε, για να είναι $\binom{x}{k}=$ $=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}=0$, θα πρέπει κάποιος από τους $x,x-1,\ldots,x-k+1$ να είναι μηδέν. Δηλαδή, $x-s=0$, για κάποιο $s=0,1,\ldots,k-1$. Τότε όμως $x=s\in\mathbb{N}$, άτοπο. ■

Στα επόμενα θα ασχοληθούμε με περιπτώσεις στις οποίες το x είναι μη αρνητικός ακέραιος και γι' αυτό προτιμούμε το σύμβολο n αντί του x. Ας υπολογίσουμε τώρα κάποια από τα σύμβολα $\binom{n}{k}$.

(i) $\binom{6}{4}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}=\dfrac{\cancel{6}\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot\cancel{2\cdot3}\cdot4}=\dfrac{5\cdot\cancel{4}\cdot3}{\cancel{4}}=5\cdot3=15.$

(ii) $\binom{7}{3}=\dfrac{7\cdot\cancel{6}\cdot5}{\cancel{1\cdot2\cdot3}}=35.$

(iii) $\binom{12}{5}=\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{2\cdot3\cdot4\cdot5}=\dfrac{12\cdot11\cdot\cancel{10}\cdot9\cdot8}{\cancel{2}\cdot3\cdot4\cdot\cancel{5}}=\dfrac{\cancel{12}\cdot11\cdot9\cdot8}{\cancel{3\cdot4}}=11\cdot72=792.$

Επειδή στο σύμβολο $\binom{x}{k}$ εμφανίζονται γινόμενα πολλών αριθμών, αποφεύγουμε να κάνουμε αμέσως τους πολλαπλασιασμούς αλλά προτιμούμε να απλοποιούμε πρώτα τα κλάσματα. (Όπως έχουμε μάθει να κάνουμε γενικά στα μαθηματικά).

Η επόμενη πρόταση περιγράφει μερικές από τις βασικότερες ιδιότητες του συμβόλου $\binom{n}{k}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7. Υποθέτουμε ότι k και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $k>n$, τότε $\binom{n}{k}=0$. **(ii)** $\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$. **(ii)** $\binom{n}{1}=n$.

(iv) Αν $0\leq k\leq n$, τότε $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$.

Απόδειξη: **(i)** Εφόσον $k>n\Leftrightarrow n-k<0$ και ο $n-k$ είναι ακέραιος, θα έχουμε $n-k+1\leq 0$. Επομένως $n\geq 0\geq n-k+1$ και συνεπώς κάποιος από τους ακεραίους $n,n-1,\ldots,n-k+1$ πρέπει να είναι μηδέν. Άρα ο αριθμητής $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ του $\binom{n}{k}$ είναι μηδέν.

(ii) Η σχέση $\binom{n}{0}=1$ προκύπτει από τον ορισμό του συμβόλου $\binom{n}{k}$.

Τώρα, $\binom{n}{n}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{n!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots1}{n!}=\dfrac{n!}{n!}=1.$

(iii) $\binom{n}{1}=\dfrac{n}{1!}=n.$

(iv) Για $k = 0$ ή $k = n$ έχει αποδειχθεί προηγουμένως. Έστω $1 \leq k \leq n-1$. Τότε έχουμε: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{n!(n-k)!} =$
$\displaystyle = \frac{n!}{n!(n-k)!}$. Από τον τύπο αυτό προκύπτει επίσης ότι $\displaystyle\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} =$
$\displaystyle = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. ■

ΛΗΜΜΑ 1.8. (Ο Τριγωνικός Τύπος του Pascal) Αν $1 \leq k \leq n$, τότε ισχύει ο τύπος

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Αν $k = n$ τότε $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} = 1$ και $\displaystyle\binom{n-1}{k} = 0$ και ο τύπος ισχύει σ' αυτή την περίπτωση.
Υποθέτουμε τώρα ότι $k < n \Leftrightarrow k \leq n-1$.
Έχουμε: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} =$
$\displaystyle = \frac{n}{k}\cdot\binom{n-1}{k-1} = \frac{k+(n-k)}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{n-k}{k}\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{n-k}{k}\cdot$
$\displaystyle\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. ■

Ο τύπος αυτός ορίζει τα σύμβολα $\displaystyle\binom{n}{k}$ κατά τρόπο «αναδρομικό». Με βάση λοιπόν τον τύπο του Pascal παίρνουμε το επόμενο τριγωνικό σχήμα, γνωστό ως **τρίγωνο του Pascal**:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & & & \\
 & & & & & \swarrow & & \searrow & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & & & \\
 & & & & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & & & \\
 & & & \swarrow & \searrow & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow & & & \\
 & & & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & & & \\
 & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & & \binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1 & & \\
 & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & & \\
 & \binom{5}{0}=1 & & \binom{5}{1}=5 & & \binom{5}{2}=10 & & \binom{5}{3}=10 & & \binom{5}{4}=5 & & \binom{5}{5}=1 & \\
\swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \\
\binom{6}{0}=1 & & \binom{6}{1}=6 & & \binom{6}{2}=15 & & \binom{6}{3}=20 & & \binom{6}{4}=15 & & \binom{6}{5}=6 & & \binom{6}{6}=1
\end{array}$$

....

Σχήμα 6: Τρίγωνο του Pascal

Στο τρίγωνο του Pascal κάθε αριθμός ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων που βρίσκονται από πάνω, όπως δείχνουν τα βέλη.
Τώρα είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της

παραγράφου:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.9. (Το Διώνυμο του Newton) Ισχύει η ακόλουθη αλγεβρική ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\beta^k \underset{\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1}{=} \alpha^n+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\binom{n}{3}\alpha^{n-3}\beta^3+\cdots+$$
$$+\binom{n}{n-3}\alpha^3\beta^{n-3}+\binom{n}{n-2}\alpha^2\beta^{n-2}+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}+\beta^n.$$

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε επαγωγή επί του n.

Για $n=1$ έχουμε $(\alpha+\beta)^1=\alpha+\beta=1\cdot\alpha+1\cdot\beta=\binom{1}{0}\alpha+\binom{1}{1}\beta$.

Άρα η πρόταση ισχύει για $n=1$. (Θα μπορούσε κάποιος να ξεκινήσει την επαγωγή από το μηδέν θεωρώντας την προφανή σχέση $(\alpha+\beta)^0=1=\binom{0}{0}\alpha^0\beta^0$).

Υποθέτουμε ότι για κάποιο n ισχύει η σχέση

$$(\alpha+\beta)^n=\alpha^n+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^2+\cdots+\binom{n}{n-2}\alpha^2\beta^{n-2}+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^{n-1}+\beta^n. \quad \textbf{(1)}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με α και παίρνουμε:

$$\alpha(\alpha+\beta)^n=\alpha^{n+1}+\binom{n}{1}\alpha^n\beta+\binom{n}{2}\alpha^{n-1}\beta^2+\cdots+\binom{n}{n-2}\alpha^3\beta^{n-2}+\binom{n}{n-1}\alpha^2\beta^{n-1}+\alpha\beta^n. \quad \textbf{(2)}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) με β και παίρνουμε:

$$\beta(\alpha+\beta)^n=\alpha^n\beta+\binom{n}{1}\alpha^{n-1}\beta^2+\binom{n}{2}\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots+\binom{n}{n-2}\alpha^2\beta^{n-1}+\binom{n}{n-1}\alpha\beta^n+\beta^{n+1}. \quad \textbf{(3)}$$

Αν προσθέσουμε τις (2) και (3) κατά μέλη, τότε στο αριστερό μέλος θα πάρουμε $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^n=$ $=(\alpha+\beta)^{n+1}$. Στο δεξιό μέλος θα πάρουμε:

$$\alpha^{n+1}+\left(1+\binom{n}{1}\right)\alpha^n\beta+\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)\alpha^{n-1}\beta^2+\left(\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right)\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots+$$
$$+\left(\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}\right)\alpha^2\beta^{n-1}+\left(\binom{n}{n-1}+1\right)\alpha\beta^n+\beta^{n+1}=$$
$$=\alpha^{n+1}+\underbrace{\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)}_{\text{τρίγωνο Pascal}}\alpha^n\beta+\underbrace{\left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)}_{\text{τρίγωνο Pascal}}\alpha^{n-1}\beta^2+\underbrace{\left(\binom{n}{2}+\binom{n}{3}\right)}_{\text{τρίγωνο Pascal}}\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots+$$
$$+\underbrace{\left(\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}\right)}_{\text{τρίγωνο Pascal}}\alpha^2\beta^{n-1}+\underbrace{\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)}_{\text{τρίγωνο Pascal}}\alpha\beta^n+\beta^{n+1}=$$
$$=\alpha^{n+1}+\binom{n+1}{1}\alpha^n\beta+\binom{n+1}{2}\alpha^{n-1}\beta^2+\binom{n+1}{3}\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots+$$
$$+\binom{n+1}{n-1}\alpha^2\beta^{n-1}+\binom{n+1}{n}\alpha\beta^n+\beta^{n+1}.$$

Επειδή $\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$, παίρνουμε τελικώς το άθροισμα

$$\binom{n+1}{0}\alpha^{n+1}+\binom{n+1}{1}\alpha^n\beta+\binom{n+1}{2}\alpha^{n-1}\beta^2+\binom{n+1}{3}\alpha^{n-2}\beta^3+\cdots\binom{n+1}{n-1}\alpha^2\beta^{n-1}+$$
$$+\binom{n+1}{n}\alpha\beta^n+\binom{n+1}{n+1}\beta^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\alpha^{n+1-k}\beta^k. \qquad \blacksquare$$

Επειδή $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, το διώνυμο του Newton μπορεί να γραφεί και ως

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} \alpha^{n-k}\beta^k$$

ή καλύτερα, θεωρώντας ως «βωβό» δείκτη το $n-k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, οπότε το k θα αντικατασταθεί από το $n-k$, στη μορφή

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} =$$
$$= \beta^n + \binom{n}{1}\alpha\beta^{n-1} + \binom{n}{2}\alpha^2\beta^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-2}\alpha^{n-2}\beta^2 + + \binom{n}{n-1}\alpha^{n-1}\beta + \alpha^n.$$

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

48. Να βρεθεί το ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^{10}$.

Λύση: Έχουμε: $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2} = 5\cdot 9 = 45$, $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} = 10\cdot 3\cdot 4 =$ $= 120$, $\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 3\cdot \cancel{4}} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210$, $\binom{10}{5} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 4} = 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6 =$ $= 36\cdot 7 = 252$. Οι υπόλοιποι διωνυμικοί συντελεστές είναι συμμετρικά ίσοι με αυτούς που μόλις βρήκαμε. Επομένως
$(\alpha+\beta)^{10} = \alpha^{10} + 10\alpha^9\beta + 45\alpha^8\beta^2 + 120\alpha^7\beta^3 + 210\alpha^6\beta^4 + 252\alpha^5\beta^5 + 210\alpha^4\beta^6 + 120\alpha^3\beta^7 +$ $+45\alpha^2\beta^8 + 10\alpha\beta^9 + \beta^{10}$. ■

49. Να αποδείξετε ότι:

(i) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ **(ii)** $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$

(iii) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$ **(iv)** $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Απόδειξη: **(i)** Στον τύπο του διωνύμου του Newton $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ θέτουμε $\alpha = \beta = 1$. Τότε
$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^0\cdot 1^n + \binom{n}{1}1^1\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{2}1^2\cdot 1^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}1^{n-1}\cdot 1^1 + \binom{n}{n}1^n\cdot 1^0 =$
$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$.

(ii) Στον τύπο του διωνύμου του Newton $(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}$ θέτουμε $\alpha = -1$ και $\beta = 1$. Τότε
$0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \binom{n}{0}(-1)^0 + \binom{n}{1}(-1)^1 + \binom{n}{2}(-1)^2 + \binom{n}{3}(-1)^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} +$
$+\binom{n}{n}(-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \binom{n}{4} - \binom{n}{5} \cdots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n$,
απ' όπου προκύπτει η αποδεικτέα.

(iii) 1ος τρόπος: Έχουμε: $1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}+\binom{n}{n}x^n=(1+x)^n$.
Αν παραγωγίσουμε, θα πάρουμε: $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+\cdots+(n-1)\binom{n}{n-1}x^{n-2}+$
$+n\binom{n}{n}x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$. Τέλος, θέτοντας $x=1$, παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.
2ος τρόπος: Για $k=1,2,\ldots,n$ έχουμε:

$$k\binom{n}{k}=k\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\cdot((n-1)-(k-1))!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$$

Επομένως, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\underset{k\text{ αντί }k-1}{=}n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\underset{\text{σχέση (i)}}{=}n\cdot 2^{n-1}$.

(iv) 1ος τρόπος: Ολοκληρώνουμε στο $[0,1]$ τη σχέση $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=(1+x)^n$. Έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k dx=\int_0^1(1+x)^n dx\Leftrightarrow\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

2ος τρόπος: Για $k=0,1,2,\ldots,n$ έχουμε:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=$$
$$=\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Επομένως $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\underset{k\text{ αντί }k+1}{=}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}=$

$$=\frac{1}{n+1}\left(-1+\binom{n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}\right)=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-1\right)=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

∎

50. Να αποδείξετε ότι:
(i) $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\binom{n}{3}\binom{n}{n-3}+\cdots+\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+\binom{n}{n}\binom{n}{0}=$
$=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\binom{n}{3}^2+\cdots+\binom{n}{n-1}^2+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$.
(ii) Γενικότερα, αν m, n είναι θετικοί ακέραιοι και $0\le r\le m+n$, να αποδείξετε τη σχέση

(Ταυτότητα του Vandermonde) $\displaystyle\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=\binom{m+n}{r}$.

Απόδειξη: **(i)** Εφόσον $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, για κάθε $k=0,1,\ldots,n$, η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα. Θεωρούμε τη σχέση $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$. Ο συντελεστής του x^n στο δεξιό μέλος της ισότητας αυτής είναι $\binom{2n}{n}$. Ο συντελεστής αυτός προκύπτει ως το άθροισμα των γινομένων των συντελεστών των x^i και x^{n-i} στα αναπτύγματα $(1+x)^n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$ των δύο παρενθέσεων στο αριστερό μέλος της ισότητας αυτής. Ο συντελεστής του x^i στο ανάπτυγμα της πρώτης παρένθεσης είναι $\binom{n}{i}$ και ο συντελεστής του x^{n-i} στο ανάπτυγμα της δεύτερης παρένθεσης είναι

$\binom{n}{n-i}$. Το άθροισμά τους για τις διάφορες τιμές του i είναι $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$.

(ii) Αν γράψουμε $(1+x)^{m+n}=(1+x)^m(1+x)^n=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i\cdot\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j$ και παρατηρήσουμε ότι ο συντελεστής του x^r στο αριστερό μέλος της ισότητας είναι $\binom{m+n}{r}$, ενώ στο δεξιό προκύπτει ως το άθροισμα των γινομένων $\binom{m}{i}\binom{n}{j}$ των συντελεστών x^i και x^j, όπου $i+j=r$, δηλαδή $j=r-i$, τότε προκύπτει το συμπέρασμα. ■

Κανονικά θα έπρεπε, αφ' ενός $0\le i\le r$ και $0\le i\le m$, οπότε $0\le i\le \min\{m,r\}$ και αφ' ετέρου $0\le j=r-i\le n\Leftrightarrow r-n\le i\le r$. Τελικώς $\max\{0,r-n\}\le i\le\min\{m,r\}$.Έτσι, πιο σωστά θα μπορούσαμε να γράψουμε $\sum_{i=\max\{0,\,r-n\}}^{\min\{r,\,m\}}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=\binom{m+n}{r}$, αντί $\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}=$ $=\binom{m+n}{r}$. Αυτό βέβαια δεν επηρεάζει τον τύπο γιατί αν $i>m$ ή $r-i>n$, τότε οι αντίστοιχοι διωνυμικοί συντελεστές μηδενίζονται.

Παρατηρούμε ότι στην άσκηση **47** οι διωνυμικοί συντελεστές $1=\binom{10}{0}$, $10=\binom{10}{1}$, $45=$ $=\binom{10}{2}$, $120=\binom{10}{3}$, $210=\binom{10}{4}$, $252=\binom{10}{5}$ βαίνουν αυξανόμενοι, φτάνοντας τη μέγιστη τιμή $252=\binom{10}{5}$. Στη συνέχεια, συμμετρικά βαίνουν μειούμενοι. Αυτό δεν είναι τυχαίο. Η επόμενη άσκηση αναφέρεται στο φαινόμενο αυτό.

51. Αν n θετικός ακέραιος, τότε: $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\binom{n}{2}<\cdots\binom{n}{r}$, όπου $n=2r$, αν το n είναι άρτιος και $n=2r+1$, αν το n είναι περιττός.
Πιο συγκεκριμένα, αν το $n=2r$ είναι άρτιος, τότε το πλήθος των όρων στο ανάπτυγμα του Newton είναι $n+1=2r+1$, περιττό και ο μεγαλύτερος διωνυμικός συντελεστής είναι ο μεσαίος

$$\binom{n}{r}$$

Αν το $n=2r+1$ είναι περιττός, τότε το πλήθος των όρων στο ανάπτυγμα του Newton είναι $n+1=2r+2$, άρτιο και υπάρχουν δύο μεσαίοι διωνυμικοί συντελεστές που είναι οι μεγαλύτεροι. Αυτοί είναι οι

$$\binom{n}{r}\quad \text{και}\quad \binom{n}{r+1}=\binom{n}{n-r}$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Παρατηρούμε ότι αν $k\ge 1$, τότε $\binom{n}{k}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)(n-k+1)}{k!}=$ $=\dfrac{n-k+1}{k}\cdot\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k-1)!}=\dfrac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$. Από αυτό προκύπτει ότι $\binom{n}{k}>$ $>\binom{n}{k-1}\Leftrightarrow n-k+1>k\Leftrightarrow k<\dfrac{n+1}{2}$.
Αν $n=2r$ άρτιος, τότε $k<\dfrac{n+1}{2}=\dfrac{2r+1}{2}=r+\dfrac{1}{2}$. Ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι

μικρότερος του $r + \frac{1}{2}$ είναι ο r.
Αν $n = 2r + 1$ περιττός, τότε $k < \frac{n+1}{2} = \frac{2r+2}{2} = r + 1$. Ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος του $r + 1$ είναι πάλι ο r. ■

1.1.4 Συνέπειες της 2ης Παραδοχής

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.10. Υποθέτουμε ότι μια πρόταση-ιδιότητα q ισχύει για τους k (αρχικούς) διαδοχικούς ακεραίους $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots, n_0 + k - 1$. Αν πάλι με την υπόθεση ότι η πρόταση ισχύει για k διαδοχικούς ακεραίους $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ έπεται ότι η πρόταση q ισχύει και για τον ακέραιο $n + k$, τότε η πρόταση q ισχύει για όλους τους ακεραίους, οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του n_0.
Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid$ η πρόταση q ισχύει για τον ακέραιο $n\}$. Τότε $n_0 \in A$ και άρα $A \neq \varnothing$. Από την υπόθεση, αν η πρόταση q ισχύει για κάποιους διαδοχικούς ακεραίους $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$, τότε ισχύει και για τον n, δηλαδή αν $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1 \in A$, τότε και $n + k \in A$. Με βάση τη 2η παραδοχή, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq n_0\} \subseteq A$. Επομένως η πρόταση q ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$. ■

Για να κάνουμε το πράγμα πιο «χειροπιαστό», ας δούμε την επόμενη άσκηση.

52. (Ακολουθία Fibonacci) Θεωρούμε την ακολουθία $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$ Παρατηρούμε ότι κάθε όρος της ακολουθίας αυτής, από τον 3ο και μετά, ισούται με το άθροισμα των δύο προηγουμένων του. Δηλαδή, αν f_n είναι ο $n-$στος όρος της ακολουθίας αυτής, τότε έχουμε $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Δείξτε ότι ο $n-$στος όρος f_n δίνεται από τον τύπο

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Απόδειξη: Για $n = 1$ έχουμε: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} =$
$= 1 = f_1$. Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 1$.
Για $n = 2$ έχουμε: $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot$
$\frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = f_2$. Άρα η πρόταση ισχύει για $n = 2$.
Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για n και $n+1$, δηλαδή $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$
και $f_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n + 2$.
Έχουμε:

$$\begin{aligned}
f_{n+2} = f_{n+1}+f_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right).$$

Ας δούμε τώρα τι πετύχαμε.
1°: Αποδείξαμε ότι ο ισχυρισμός της άσκησης ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$.
2°: Με την υπόθεση ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάποιους (θετικούς) ακεραίους n και $n + 1$ αποδείξαμε ότι θα ισχύει και για τον αμέσως επόμενο ακέραιο $n + 2$.
Συνδυάζοντας τα παραπάνω παρατηρούμε ότι: Εφόσον ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 1$ και $n = 2$, θα ισχύει και για $n = 3$, Εφόσον πάλι ο ισχυρισμός ισχύει για $n = 2$ και $n = 3$, θα ισχύει και για $n = 4$. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο, συμπεραίνουμε ότι ο ισχυρισμός της άσκησης ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n. ■

Φυσικά δεν είναι δυνατόν να μαντέψει κανείς τον παραπάνω περίεργο τύπο για τους αριθμούς Fibonacci. Υπάρχουν μέθοδοι, για παράδειγμα μέσω διαγωνοποίησης πινάκων ή δυναμοσειρών, οι οποίες οδηγούν σ' αυτό το αποτέλεσμα.

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

53. Δείξτε ότι για κάθε δύο θετικούς ακεραίους m, n με $n \geq 2$, ισχύει η σχέση:
$$f_{m+n} = f_m f_{n-1} + f_{m+1} f_n.$$
Απόδειξη: Αποδεικνύουμε την παραπάνω σχέση με επαγωγή ως προς m.
Για $m = 1$ και οποιονδήποτε θετικό ακέραιο $n \geq 2$, έχουμε: $f_{m+n} = f_{n+1} = f_{n-1} + f_n = = 1 \cdot f_{n-1} + 1 \cdot f_n = f_1 f_{n-1} + f_2 f_n \underset{m=1}{=} f_m f_{n-1} + f_{m+1} f_n$.
Υποθέτουμε ότι $f_{m+n} = f_m f_{n-1} + f_{m+1} f_n$ για κάποιο θετικό ακέραιο m και **για όλους** τους ακεραίους $n \geq 2$. Θα αποδείξουμε ότι $f_{(m+1)+n} = f_{m+1} f_{n-1} + f_{m+2} f_n$ για όλους τους ακεραίους $n \geq 2$.
Πράγματι, $f_{(m+1)+n} = f_{m+(n+1)} = f_m f_{(n+1)-1} + f_{m+1} f_{n+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1}$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Επίσης, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ και συνεπώς $f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_n + + f_{m+1} f_{n-1} = f_{m+1} f_{n-1} + (f_m + f_{m+1}) f_n = f_{m+1} f_{n-1} + f_{m+2} f_n$. ■

54. Δίνεται η ακολουθία των αριθμών $-3, 15, -21, 99, -213, 795, -2061, 6819, -19173, \ldots$ Αν α_n είναι γενικός όρος της ακολουθίας, τότε έχουμε $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 15$, $\alpha_3 = -21$ και κάθε άλλος όρος δίνεται συναρτήσει των τριών προηγούμενών του από τη σχέση:
$$\alpha_{n+3} = 6\alpha_n + 5\alpha_{n+1} - 2\alpha_{n+2}.$$
Θα αποδείξουμε ότι
$$\alpha_n = 2(-1)^n + 2^n + (-3)^n$$
για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$
Απόδειξη: Αρχικώς επαληθεύουμε τον τύπο για $n = 1, n = 2$ και $n = 3$. (Η εκτέλεση των πράξεων είναι θέμα ρουτίνας και παραλείπεται. Ο δύσπιστος αναγνώστης μπορεί να κάνει μόνος του την επαλήθευση).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο τύπος ισχύει για n, $n+1$ και $n+2$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+3$. Έχουμε λοιπόν τις σχέσεις:

$$\alpha_n = 2(-1)^n + 2^n + (-3)^n$$
$$\alpha_{n+1} = 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} + (-3)^{n+1}$$
$$\text{και } \alpha_{n+2} = 2(-1)^{n+2} + 2^{n+2} + (-3)^{n+2}.$$

Τότε θα έχουμε: $\alpha_{n+3} = 6\alpha_n + 5\alpha_{n+1} - 2\alpha_{n+2} = 6\big(2(-1)^n + 2^n + (-3)^n\big) + 5\big(2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} + (-3)^{n+1}\big) - 2\big(2(-1)^{n+2} + 2^{n+2} + (-3)^{n+2}\big) = 12(-1)^n + 6\cdot 2^n + 6(-3)^n + 10(-1)^{n+1} + 5\cdot 2^{n+1} + 5(-3)^{n+1} - 4(-1)^{n+2} - 2^{n+3} - 2(-3)^{n+2} = (-1)^n\big(12 + 10(-1) - 4(-1)^2\big) + 2^n\big(6 + 5\cdot 2 - 2^3\big) + (-3)^n\big(6 + 5(-3) - 2(-3)^2\big) = (-1)^n(12 - 10 - 4) + 2^n(6 + 10 - 8) + (-3)^n(6 - 15 - 18) = -2(-1)^n + 8\cdot 2^n - 27(-3)^n = 2(-1)^3(-1)^n + 2^3\cdot 2^n + (-3)^3\cdot(-3)^n = 2(-1)^{n+3} + 2^{n+3} + (-3)^{n+3}$.
Εφόσον λοιπόν ο τύπος ισχύει για $n = 1$, $n = 2$ και $n = 3$, με βάση τα προηγούμενα θα ισχύει και για $n = 4$. Εφόσον ισχύει για $n = 2$, $n = 3$ και για $n = 4$, θα ισχύει και για $n = 5$. Προφανώς η διαδικασία αυτή δεν σταματά και κατά συνέπεια η απόδειξη θεωρείται πλήρης. ■

55. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Να αποδείξετε ότι ο α_n είναι ακέραιος και μάλιστα πολλαπλάσιο του 2^n.
Απόδειξη: Για $n = 1$ έχουμε $\alpha_1 = (3+\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5}) = 6 = 3\cdot 2^1$. Για $n = 2$ έχουμε $\alpha_2 = (3+\sqrt{5})^2 + (3-\sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 + 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 28 = 7\cdot 2^2$. Άρα η πρόταση είναι αληθής για $n = 1$ και $n = 2$.
Υποθέτουμε ότι οι αριθμοί $\alpha_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ και $\alpha_{n+1} = (3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1}$ είναι ακέραια πολλαπλάσια των 2^n και 2^{n+1}, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι:
$(3+\sqrt{5})\alpha_{n+1} = (3+\sqrt{5})^{n+2} + (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^{n+1} = (3+\sqrt{5})^{n+2} + \big(3^2 - (\sqrt{5})^2\big)(3-\sqrt{5})^n = (3+\sqrt{5})^{n+2} + 4(3-\sqrt{5})^n$ και
$(3-\sqrt{5})\alpha_{n+1} = (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+2} = \big(3^2 - (\sqrt{5})^2\big)(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^{n+2} = 4(3+\sqrt{5})^n + (3+\sqrt{5})^{n+2}$.
Επομένως, προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε: $6\alpha_{n+1} = 4\alpha_n + \alpha_{n+2} \Leftrightarrow \alpha_{n+2} = 6\alpha_{n+1} - 4\alpha_n$.
Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι όλοι οι αριθμοί α_n είναι ακέραιοι.
Υποθέτουμε ότι το α_n είναι πολλαπλάσιο του 2^n και το α_{n+1} πολλαπλάσιο του 2^{n+1}. Τότε το $4\alpha_n = 2^2\alpha_n$ και το $6\alpha_{n+1} = 3\cdot 2\alpha_{n+1}$ είναι πολλαπλάσια του 2^{n+2}. Επομένως το $\alpha_{n+2} = 6\alpha_{n+1} - 4\alpha_n$ είναι πολλαπλάσιο του 2^{n+2}. ■

Άλυτες Ασκήσεις

56. Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες μεταξύ των αριθμών Fibonacci:
(i) $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$
(ii) $f_2 + f_4 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$
(iii) $f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$
(iv) $f_1 - f_2 + f_3 + \cdots + (-1)^{n+1}f_n = (-1)^{n+1}f_{n-1} + 1$, $n \geq 2$
(v) $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, $n \geq 2$
(vi) $f_{n+1}^2 = 4f_nf_{n-1} + f_{n-2}^2$, $n \geq 3$
(vii) $f_n^2 + f_{n-1}^2 = f_{2n-1}$, $n \geq 2$
(viii) $f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n}$, $n \geq 2$
(ix) $f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 = f_{3n}$, $n \geq 2$
(x) $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \cdots + f_n^2 = f_nf_{n+1}$
(xi) $f_1f_2 + f_2f_3 + \cdots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^2$

(xii) $f_1f_2 + f_2f_3 + \cdots + f_{2n}f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$

57. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_n = (3+3\sqrt{2})^n + (3-3\sqrt{2})^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Να αποδείξετε ότι ο α_n είναι ακέραιος και μάλιστα πολλαπλάσιο του 3^n.

58. Η ακολουθία των αριθμών α_n ορίζεται ως εξής: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$ και $\alpha_{n+2} = 3\alpha_{n+1} + 6\alpha_n$. Να δείξετε ότι $\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{33}}\left(\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^n\right)$, για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$

59. Δίνεται η ακολουθία των αριθμών α_n με $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = -7$, $\alpha_3 = -137$ και $\alpha_{n+3} = 19\alpha_{n+1} - 30\alpha_n$. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει ο τύπος: $\alpha_n = 3^{n+1} - 2\cdot 5^n + 2^{n+2}$.

1.1.5 Συνέπειες της 3ης και 4ης Παραδοχής

Πολλές φορές οι προαναφερθείσες επαγωγικές αποδεικτικές μέθοδοι δεν είναι αποτελεσματικές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ενώ μπορούμε να αποδείξουμε ότι μια πρόταση ισχύει για κάποιον ελάχιστο ακέραιο n_0 και ίσως για κάποιους k αρχικούς ακεραίους $n_0, n_0+1, \ldots,$ n_0+k-1, το επαγωγικό βήμα παρουσιάζει δυσκολίες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στην πρώτη μέθοδο υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει **μόνον για τον αμέσως προηγούμενο $n-1$ ενός ακεραίου n** και με βάση αυτό, καλούμαστε να αποδείξουμε ότι ισχύει και για τον n. Στην προηγούμενη υποπαράγραφο αναπτύξαμε μια μέθοδο η οποία βασίζεται στη δυνατότητα που μπορεί να έχουμε, αν μια πρόταση ισχύει για k διαδοχικούς αρχικούς ακεραίους $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1$ και με την υπόθεση ότι αυτή ισχύει για τυχόντες k διαδοχικούς ακεραίους $n, n+1, \ldots, n+k-1$, τότε ισχύει και για τον $n+k$. Αυτό, όπως δείξαμε αρκεί για να αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για κάθε ακέραιο μεγαλύτερο ή ίσο του n_0. Σημειώνουμε ότι για $k=1$ έχουμε την πρώτη μορφή της επαγωγής. Αλλά και πάλι τα περιθώρια είναι δεσμευτικά. Για παράδειγμα, στην ακολουθία Fibonacci αποδείξαμε τον τύπο για τους **δύο** πρώτους όρους. Στη συνέχεια, με την υπόθεση ότι ο τύπος ισχύει για **δύο διαδοχικούς θετικούς ακεραίους n και $n+1$**, αποδείξαμε τον τύπο και για τον $n+2$. Αλλά το δύο (ή το τρία της άσκησης 54) είναι δεσμευτικά. Πολλές φορές δεν ξέρουμε ποιον προηγούμενο ακέραιο μπορούμε να επικαλεστούμε προκειμένου να αποδεί-ξουμε το επαγωγικό βήμα. Τότε, μπορούμε να τους επικαλεστούμε **όλους**. Έχουμε την επόμενη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.11. Υποθέτουμε ότι μια πρόταση-ιδιότητα q ισχύει για έναν ελάχιστο ακέραιο n_0. Αν πάλι με την υπόθεση ότι η πρόταση ισχύει για κάθε ακέραιο m με $n_0 \le m < n$, τότε ισχύει και για τον ακέραιο n, τότε η πρόταση q ισχύει για όλους τους ακεραίους, οι οποίοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του n_0.

1η Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid$ η πρόταση q ισχύει για τον ακέραιο $n\}$. Τότε $n_0 \in A$ και άρα $A \neq \varnothing$. Από την υπόθεση, αν η πρόταση q ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ με $n_0 \le m < n$, τότε ισχύει και για τον n, δηλαδή αν $m \in A$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ με $n_0 \le m < n$, τότε και $n \in A$. Με βάση την 3η παραδοχή, $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge n_0\} \subseteq A$. Επομένως η πρόταση q ισχύει για κάθε ακέραιο $n \ge n_0$.

2η Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \ge n_0$ και η πρόταση q δεν ισχύει για τον ακέραιο $n\}$. Υποθέτουμε ότι $B \neq \varnothing$. Εφόσον $B \subseteq \{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\}$, το B είναι κάτω φραγμένο από το n_0. Με βάση την 4η παραδοχή το B έχει ελάχιστο στοιχείο μ. Αφού $n_0 \notin B$, έπεται ότι $\mu > n_0$ και άρα $\mu - 1 \ge n_0$. Επειδή το μ είναι το ελάχιστο στοιχείο του B, έπεται ότι $\mu - 1 \notin B$, άρα και $m \notin B$, για κάθε ακέραιο m με $n_0 \le m \le \mu - 1$. Κατά συνέπεια, από τον ορισμό του B η πρόταση q ισχύει για κάθε ακέραιο m με $n_0 \le m < \mu$. Αλλά τότε, από την υπόθεση της πρότασης, θα ισχύει και για τον ακέραιο μ, άτοπο. Άρα $B = \varnothing$ και συνεπώς η πρόταση ισχύει για κάθε ακέραιο $n \geq n_0$. ■

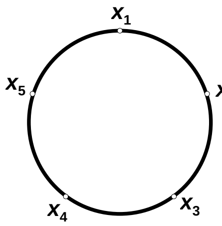
Ας επανέλθουμε στην 4η απόδειξη της ανισότητας Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου. Έστω λοιπόν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Στην 4η απόδειξη της ανισότητας

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \Gamma$$

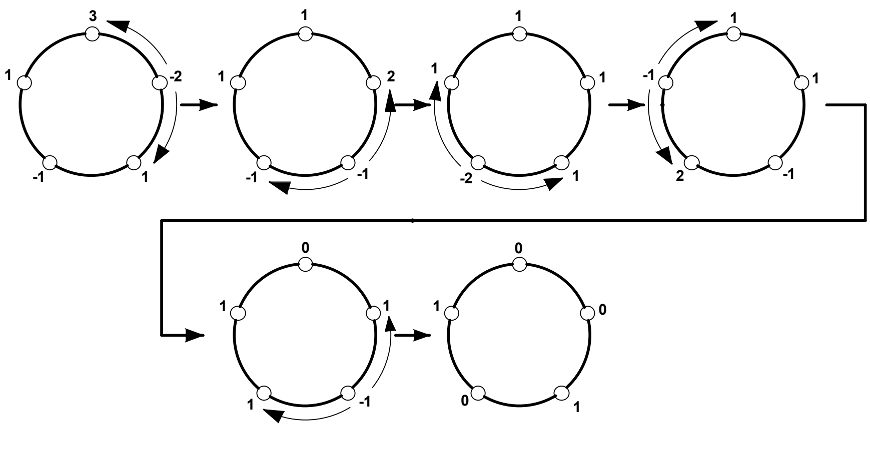
ουσιαστικά εφαρμόσαμε την τελευταία παραλλαγή της επαγωγής επί του ακεραίου $k \geq 0$, όπου k το πλήθος των α_i που δεν είναι ίσα με A. Πράγματι, αν $k = 0$, δηλαδή όλα τα α_i είναι ίσα με A, τότε η ανισότητα ισχύει ως ισότητα.
Υποθέτουμε ότι η ανισότητα ισχύει όταν το πλήθος των α_i που δεν είναι ίσα με A είναι μικρότερο ενός θετικού ακεραίου k. Θα δείξουμε ότι η ανισότητα ισχύει και όταν το πλήθος των α_i που δεν είναι ίσα με A ισούται με k. Με το τέχνασμα της αντικατάστασης του $\alpha_i = A + x$ από το $\alpha_i' = A$ και του $\alpha_j = A - y$ από το $\alpha_j' = A + x - y$, όπου $x, y > 0$ μειώνουμε το πλήθος k των α_i που δεν είναι ίσα με A **τουλάχιστον** κατά 1. $\big($Είναι δυνατόν, αν $x = y$, να έχουμε και $\alpha_j' = A + x - y = A\big)$. Ο αριθμητικός μέσος παραμένει ο ίδιος, ενώ ο νέος γεωμετρικός μέσος Γ' είναι μεγαλύτερος του Γ. Εφόσον η ανισότητα ισχύει για τιμές μικρότερες του k, θα έχουμε $A \geq \Gamma' > \Gamma$.

Η επόμενη άσκηση αποτελεί μιαν ακόμη εφαρμογή της τελευταίας επαγωγικής μεθόδου.

60. (Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα 1986) Ας παρατηρήσουμε τα επόμενα δύο σχήματα:



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Στην περιφέρεια κύκλου είναι τοποθετημένοι πέντε ακέραιοι αριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, των οποίων το άθροισμα είναι θετικό. $\big($Σχήμα 7$\big)$. Επιλέγουμε από αυτούς κάποιον ο οποίος είναι αρνητικός (όποιον θέλουμε, αν φυσικά υπάρχει τέτοιος), τον προσθέτουμε στους δύο γειτονικούς του και στη συνέχεια του αλλάζουμε πρόσημο. Συνεχίζουμε κατ' αυτόν τον τρόπο έως ότου καταλήξουμε στην περίπτωση που όλοι είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός. $\big($Σχήμα 8$\big)$. Τότε σταματάμε. Να αποδείξετε ότι η διαδικασία αυτή κάποτε θα σταματήσει, δηλαδή σίγουρα θα καταλήξουμε κάποια στιγμή σ' ένα σύνολο μη αρνητικών αριθμών, ανεξάρτητα με ποιο τρόπο έχουμε επιλέξει κάθε φορά τον αρνητικό αριθμό. Στο σχήμα 8 έχουμε τοποθετήσει κυκλικά τους ακεραίους 3, -2, 1, -1 και 1. Αυτοί έχουν άθροισμα $2 > 0$. Παρατηρούμε ότι η διαδικασία σταματά μετά από πέντε βήματα.

Απόδειξη: Έστω x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 οι πέντε ακέραιοι τοποθετημένοι κυκλικά στην περιφέρεια κύκλου. Σε τέτοιου είδους προβλήματα προσπαθούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε κατάσταση έναν μη αρνητικό ακέραιο αριθμό ο οποίος συνεχώς θα μειώνεται. Έτσι κάποια στιγμή, εφόσον ο αριθμός αυτός δεν μπορεί να «πέσει» κάτω από το μηδέν, η διαδικασία θα σταματήσει. Η εύρεση της θετικής ακέραιας ποσότητας είναι το μεγάλο πρόβλημα. Στην περίπτωσή μας η ζητούμενη ποσότητα είναι η

$A := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_5)^2 + (x_5 + x_1)^2.$

(Η πρώτη σκέψη που έκανα ήταν να προσπαθήσω να μειώσω την ποσότητα $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$, αλλά δεν δούλεψε). Με αυτόν τον τρόπο ουσιαστικά εφαρμόζουμε επαγωγή επί του A.

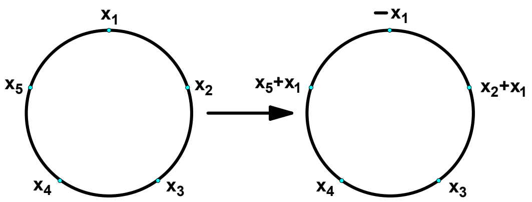
Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η ποσότητα A είναι 3 (ένας ισούται με 1 και οι υπόλοιποι μηδέν). Ας το αποδείξουμε αυτό.

Πράγματι, σ' αυτήν την περίπτωση όλοι οι ακέραιοι είναι μη αρνητικοί και η διαδικασία σταματά προτού καν αρχίσει. Άν τώρα κάποιος ακέραιος x_i έχει απόλυτη τιμή μεγαλύτερη ή ίση του 2, τότε $A \geq x_i^2 \geq 4 > 3$. Άρα όλοι οι ακέραιοι έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη ή ίση του 1. Αν πάλι υπάρχουν απ' αυτούς τέσσερις μη μηδενικοί, τότε ξανά $A > 3$.

Αν υπάρχουν τρεις μη μηδενικοί, τότε κάποιος από αυτούς έχει μια διπλανή θέση μηδενική. (Οι θέσεις είναι πέντε). Αν αυτός είναι ο x_i, τότε το τετράγωνο $x_i^2 = 1$ υπολογίζεται δύο τουλάχιστον φορές στην παράσταση A. Μαζί με τα τετράγωνα των δύο άλλων παίρνουμε $A \geq 1+1+2 = 4 > 3$.

Αν τέλος υπάρχουν δύο μη μηδενικοί, τότε πάλι κάθε ένας από αυτούς έχει μια διπλανή θέση μηδενική. Επομένως το τετράγωνό του, που ισούται με 1, υπολογίζεται τουλάχιστον δύο φορές στην παράσταση A, οπότε $A \geq 2 + 2 = 4 > 3$. Επομένως η περίπτωση $A = 3$, που αναφέρεται στην ελάχιστη τιμή του A, έχει να κάνει με έναν μόνον μη μηδενικό ακέραιο που αναγκαστικά θα ισούται με 1.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο x_1 είναι αρνητικός, τον οποίο προσθέτουμε στους x_5 και x_2 και μετά του αλλάζουμε πρόσημο.



Σχήμα 9

Στο παραπάνω σχήμα οι αριθμοί τώρα είναι: $-x_1, x_1 + x_2, x_3, x_4$ και $x_1 + x_5$ με άθροισμα $-x_1 + (x_1 + x_2) + x_3 + x_4 + (x_1 + x_5) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$, το ίδιο όπως και προηγουμένως. Η ποσότητα A όμως άλλαξε και έγινε $A' = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + (x_1 + x_5)^2 + (-x_1 + x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1 + x_5)^2 + (x_1 + x_5 - x_1)^2 = x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + x_3^2 + x_4^2 + (x_1 + x_5)^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 + (x_4 + x_1 + x_5)^2 + x_5^2$. Επομένως $A - A' = \cancel{x_1^2} + \cancel{x_2^2} + \cancel{x_3^2} + \cancel{x_4^2} + \cancel{x_5^2} + \cancel{(x_1 + x_2)^2} + (x_2 + x_3)^2 + \cancel{(x_3 + x_4)^2} + (x_4 + x_5)^2 + \cancel{(x_5 + x_1)^2} - \cancel{x_1^2} - \cancel{(x_1 + x_2)^2} - \cancel{x_3^2} - \cancel{x_4^2} - \cancel{(x_1 + x_5)^2} - \cancel{x_2^2} - (x_1 + x_2 + x_3)^2 - \cancel{(x_3 + x_4)^2} - (x_4 + x_1 + x_5)^2 - \cancel{x_5^2} = (x_2 + x_3)^2 + (x_4 + x_5)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_4 + x_1 + x_5)^2 = ((x_2 + x_3) - (x_1 + x_2 + x_3))((x_2 + x_3) + (x_1 + x_2 + x_3)) + ((x_4 + x_5) - (x_4 + x_1 + x_5))((x_4 + x_5) + (x_4 + x_1 + x_5)) =$

$= -x_1(x_1+2x_2+2x_3) - x_1(x_1+2x_4+2x_5) = -2x_1(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) > 0$, γιατί $x_1 < 0$ και $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 > 0$. Επομένως $A' < A$ και με βάση την επαγωγική υπόθεση για το A, ξεκινώντας από τη νέα κυκλική μορφή, η διαδικασία κάποτε θα σταματήσει. ■

1.2 Η Επαγωγή και οι Άλλες Αποδεικτικές Μέθοδοι

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι η επαγωγή αποτελεί ισχυρό αποδεικτικό εργαλείο. Συνήθως όμως οι αποδείξεις που βασίζονται στην επαγωγή δεν διακρίνονται για την κομψότητά τους. Επίσης, κατά την επαγωγική διαδικασία θα πρέπει να μαντέψει κάποιος έναν τύπο, μια σχέση κτλ, δοκιμάζοντας για μικρές σχετικά τιμές του n, κάτι το οποίο δεν είναι πάντοτε εύκολη υπόθεση. Με άλλα λόγια, η επαγωγή δεν αποτελεί πάντα ισχυρό **ευρετικό** εργαλείο. Ας δούμε την επόμενη άσκηση:

61. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα
(i) $\mathrm{S}_1 = 1+2+\cdots+n$ και
(ii) $\mathrm{S}_2 = 1^2+2^2+\cdots+n^2$.
(iii) Αν $\mathrm{S}_k = 1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, τότε να αποδείξετε την αναδρομική σχέση

$$\mathrm{S}_{k+1} = \frac{1}{k+2}\left((n+1)\Big((n+1)^{k+1}-1\Big) - \binom{k+2}{2}\mathrm{S}_k - \binom{k+2}{3}\mathrm{S}_{k-1} - \cdots \binom{k+2}{k}\mathrm{S}_2 - \binom{k+2}{k+1}\mathrm{S}_1\right)$$

<u>**Απόδειξη**</u>**: (i) 1^ος^ τρόπος:** Έστω $\mathrm{S}_1 = 1+2+\cdots+n$. Γράφοντας ανάποδα τους προσθεταίους παίρνουμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \mathrm{S}_1 & =1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-3) & + & (n-1) & + & n \\ \mathrm{S}_1 & =n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη και κατά στήλες, θα πάρουμε στο δεύτερο μέλος n αθροίσματα $n+1$, $n-1+2=n+1$, $n-2+3=n+1$, δηλαδή όλα ίσα με $n+1$. Άρα το δεύτερο μέλος της σχέσης που θα προκύψει ισούται με $n(n+1)$. Το πρώτο φυσικά ισούται με $2\mathrm{S}_1$, οπότε $2\mathrm{S}_1 = n(n+1) \Leftrightarrow \mathrm{S}_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2^ος^ τρόπος: Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $(k+1)^2 = k^2+2k+1$. Έχουμε (με πρόσθεση κατά μέλη και διαγραφή εκατέρωθεν):

$$\begin{array}{ccccccc} \cancel{2^2} & = & 1^2 & + & 2\cdot & 1 & +1 \\ \cancel{3^2} & = & \cancel{2^2} & + & 2\cdot & 2 & +1 \\ \cancel{4^2} & = & \cancel{3^2} & + & 2\cdot & 3 & +1 \\ & \vdots & & & & & \\ \cancel{(n-2)^2} & = & \cancel{(n-3)^2} & + & 2\cdot & (n-3) & +1 \\ \cancel{(n-1)^2} & = & \cancel{(n-2)^2} & + & 2\cdot & (n-2) & +1 \\ \cancel{n^2} & = & \cancel{(n-1)^2} & + & 2\cdot & (n-1) & +1 \\ (n+1)^2 & = & \cancel{n^2} & + & 2\cdot & n & +1 \\ \hline \end{array}$$

$$(n+1)^2 = 2\cdot(1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n)+n,$$

δηλαδή $(n+1)^2 = 1+2\mathrm{S}_1+n \Leftrightarrow 2\mathrm{S}_1 = (n+1)^2-(n+1) = (n+1)(n+1-1) = n(n+1)$. Άρα $\mathrm{S}_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3^ος^ τρόπος: Σε μια συγκέντρωση παρευρέθηκαν $n+1$ άτομα. Πόσες χειραψίες ανταλλάχτηκαν; Κάθε ένας από τους $n+1$ παρευρισκόμενους ανταλλάζει n χειραψίες με τους υπόλοιπους n.

Σύνολο λοιπόν $(n+1)n$ χειραψίες. Αλλά όμως, σ' αυτή τη μέτρηση κάθε χειραψία μετριέται δύο φορές. Π.χ. Όταν ο Α και Β χαιρετιούνται, η χειραψία αυτή μετριέται και όταν υπολογίζουμε τις χειραψίες του Α, αλλά και όταν υπολογίζουμε τις χειραψίες του Β. Ο σωστός αριθμός των χειραψιών είναι λοιπόν $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Μπορούμε να μετρήσουμε τις χειραψίες και διαφορετικά: Στην αρχή έρχεται ο πρώτος και δεν βρίσκει κανέναν. Μετά έρχεται ο δεύτερος και χαιρετά τον πρώτο: 1 χειραψία. Μετά έρχεται ο τρίτος και χαιρετά τους δύο πρώτους: άλλες 2 χειραψίες. Μετά έρχεται ο τέταρτος και χαιρετά τους τρεις πρώτους: άλλες 3 χειραψίες. κ.ο.κ. Τελικά θα έρθει και ο τελευταίος, ο $(n+1)-$στος και θα χαιρετήσει τους n που έχουν ήδη έρθει. Σύνολο χειραψιών: $1+2+3+\cdots+n$. Άρα $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Σημείωση: Η τελευταία μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και στην άσκηση 7. Από κάθε κορυφή ξεκινούν $n-3$ διαγώνιοι. Σύνολο διαγωνίων $n(n-3)$. Αλλά κατ' αυτή την μέτρηση κάθε διαγώνιος μετριέται δύο φορές. Για παράδειγμα, η διαγώνιος A_1A_3 μετριέται και όταν υπολογίζουμε τις διαγωνίους που ξεκινούν από το A_1, αλλά και όταν υπολογίζουμε τις διαγωνίους που ξεκινούν από το A_3. Άρα το σωστό πλήθος είναι $\dfrac{n(n-3)}{2}$. Η απόδειξη αυτή είναι προφανώς απλούστερη από την επαγωγική απόδειξη.
(ii) Για το S_2 θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο τρόπο του προηγουμένου ζητήματος. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$ και θα θεωρήσουμε δεδομένο τον τύπο για το S_1. Έχουμε τις σχέσεις:

$$\begin{array}{rcccccccc}
\cancel{2^3} & = & 1^3 & + & 3\cdot & 1^2 & + & 3\cdot 1 & + & 1\\
\cancel{3^3} & = & \cancel{2^3} & + & 3\cdot & 2^2 & + & 3\cdot 2 & + & 1\\
\cancel{4^3} & = & \cancel{3^3} & + & 3\cdot & 3^2 & + & 3\cdot 3 & + & 1\\
 & \vdots & & & & & & & & \\
\cancel{(n-1)^3} & = & \cancel{(n-2)^3} & + & 2\cdot & (n-2)^2 & + & 3\cdot(n-2) & + & 1\\
\cancel{n^3} & = & \cancel{(n-1)^3} & + & 3\cdot & (n-1)^2 & + & 3\cdot(n-1) & + & 1\\
(n+1)^3 & = & \cancel{n^3} & + & 3\cdot & n^2 & + & 3\cdot n & + & 1\\
\hline
\end{array}$$

$$(n+1)^3=1+3\cdot \mathrm{S}_2+3\cdot \mathrm{S}_1+n,$$

δηλαδή

$$3\mathrm{S}_2=(n+1)^3-(n+1)-3\mathrm{S}_1=(n+1)^3-(n+1)-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}=(n+1)\left((n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right)=$$
$$=(n+1)\frac{2n^2+4n+2-2-3n}{2}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Άρα $\mathrm{S}_2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(iii) Χρησιμοποιούμε τον τύπο του διωνύμου του Newton σε συνδυασμό με την προηγούμενη μέθοδο. Έχουμε:

$$\begin{array}{rcllllll}
\cancel{2^{k+2}} & = & 1^{k+2} & +\binom{k+2}{1}\cdot 1^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot 1^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot 1^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}1^1 & +1\\
\cancel{3^{k+2}} & = & \cancel{2^{k+2}} & +\binom{k+2}{1}\cdot 2^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot 2^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot 2^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}2^1 & +1\\
\cancel{4^{k+2}} & = & \cancel{3^{k+2}} & +\binom{k+2}{1}\cdot 3^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot 3^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot 3^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}3^1 & +1\\
 & \vdots & & & & & & & \\
\cancel{(n-1)^{k+2}} & = & \cancel{(n-2)^{k+2}} & +\binom{k+2}{1}\cdot (n-2)^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot (n-2)^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot (n-2)^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}(n-2)^1 & +1\\
\cancel{n^{k+2}} & = & \cancel{(n-1)^{k+2}} & +\binom{k+2}{1}\cdot (n-1)^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot (n-1)^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot (n-1)^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}(n-1)^1 & +1\\
(n+1)^{k+2} & = & \cancel{n^{k+2}} & +\binom{k+2}{1}\cdot n^{k+1} & +\binom{k+2}{2}\cdot n^{k} & +\binom{k+2}{3}\cdot n^{k-1} & +\cdots+ & \binom{k+2}{k+1}n^1 & +1\\
\hline
\end{array}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και διαγράφοντας εκατέρωθεν τους ίσους όρους παίρνουμε:

$$(n+1)^{k+2} = 1 + \binom{k+2}{1}\mathrm{S}_{k+1} + \binom{k+2}{2}\mathrm{S}_k + \binom{k+2}{3}\mathrm{S}_{k-1} + \cdots \binom{k+2}{k+1}\mathrm{S}_1 + n,$$

απ' όπου προκύπτει η αναγωγική σχέση. ■

Στην άσκηση **1 (iii)** αποδείξαμε με επαγωγή ότι $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$ $= \frac{n}{n+1}$. Αν όμως παρατηρήσουμε ότι $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. (Αυτό θυμίζει την τεχνική διάσπασης κλασμάτων κατά τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων), τότε θα πάρουμε $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} +$ $+ \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. ■

Βλέπουμε λοιπόν ότι με τη μέθοδο αυτή υπολογίζουμε κατευθείαν το αποτέλεσμα, χωρίς προηγουμένως να το μαντέψουμε και στη συνέχεια να το επαληθεύσουμε με επαγωγή.

Στην άσκηση **5** αποδείξαμε με επαγωγή ότι $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$. Μπορούμε, χωρίς να καταφύγουμε στην επαγωγή να υπολογίσουμε κάτι γενικότερο.
Έστω το άθροισμα $\mathrm{S} = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3 + \cdots + (n-1)\alpha^{n-1} + n\alpha^n$, όπου $\alpha \neq 1$.
Τότε $\alpha\mathrm{S} = \alpha^2 + +2\alpha^3 + 3\alpha^4 + \cdots + (n-1)\alpha^n + n\alpha^{n+1}$.
Επομένως $(1-\alpha)\mathrm{S} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^n - n\alpha^{n+1} = \alpha(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{n-1}) - n\alpha^{n+1} =$ $= \alpha \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} - n\alpha^{n+1}$.

Άρα
$$(1-\alpha)\mathrm{S} = \frac{\alpha - \alpha^{n+1} - n\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{1-\alpha} = \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{1-\alpha} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{S} = \frac{\alpha - (n+1)\alpha^{n+1} + n\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^2}.$$

Αν θέσουμε $\alpha = \frac{1}{2}$, τότε θα πάρουμε:

$$\mathrm{S} = \frac{\frac{1}{2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4\left(\frac{1}{2} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\right) = 2 - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} +$$
$$+ n\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - (2n+2-n)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$ ■

Θα δώσουμε στη συνέχεια δύο άλλες αποδείξεις (χωρίς επαγωγή) της ανισότητας Caushy-Schwarz-Bunyakovsky:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)^2.$$

ΛΗΜΜΑ 1.12. (Ταυτότητα Lagrange) Ισχύει η σχέση:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq n} \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix}^2.$$

Απόδειξη: Το γινόμενο $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \cdots + \beta_n^2)$ θα μας δώσει το άθροισμα $\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_3^2\beta_3^2 + \cdots + \alpha_n^2\beta_n^2$, όρους δηλαδή με τον ίδιο δείκτη για τα α_i και β_i

συν όλους τους όρους της μορφής $\alpha_i^2\beta_j^2$, όπου $i \neq j$. Για κάθε τέτοιο όρο $\alpha_i^2\beta_j^2$, με $i \neq j$ θεωρούμε τον αντίστοιχο τον $\alpha_j^2\beta_i^2$ και στο τελικό άθροισμα τους προσθέτουμε σε ζεύγη της μορφής $\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2$. Επειδή η παράσταση $\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2$ είναι συμμετρική ως προς τους δείκτες i, j, δεν παίζει ρόλο ποιος είναι ο μεγαλύτερος και πιος ο μικρότερος. Είτε είναι ο i είτε είναι ο j, η τιμή της παράστασης $\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2$ είναι ίδια. Συνοψίζοντας τα προηγούμενα, έχουμε:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2) = \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\beta_n^2 + \sum_{1\le i<j\le n} (\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2). \quad \textbf{(1)}$$

Τώρα, το τετράγωνο $(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \cdots + \alpha_n\beta_n)^2$ θα μας δώσει πάλι το άθροισμα $\alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + +\alpha_3^2\beta_3^2 + \cdots + \alpha_n^2\beta_n^2$ συν όρους της μορφής $\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j = \alpha_i\beta_j\alpha_j\beta_i$, όπου $i \neq j$. Οι τελευταίοι αυτοί όροι εμφανίζονται δύο φορές στο τελικό άθροισμα. Πράγματι, επειδή

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \cdots + \alpha_n\beta_n)^2 =$$
$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \cdots + \alpha_n\beta_n)(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 + \cdots + \alpha_n\beta_n),$$

ο όρος πχ. $\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3$ θα εμφανιστεί αν πάρουμε το $\alpha_2\beta_2$ από την πρώτη παρένθεση και το $\alpha_3\beta_3$ από τη δεύτερη ή το ανάποδο, αν δηλαδή πάρουμε το $\alpha_3\beta_3$ από την πρώτη παρένθεση και το $\alpha_2\beta_2$ από τη δεύτερη. Άρα ο όρος αυτό θα έχει συντελεστή 2 στο τελικό άθροισμα. Γενικά ο όρος $\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j$ θα έχει συντελεστή 2. Επειδή $i \neq j$ κάποιος από τους δείκτες αυτούς είναι ο μικρότερος και ο άλλος ο μεγαλύτερος. Επειδή και οι δύο δείκτες εμφανίζονται συμμετρικά στο γινόμενο $\alpha_i\beta_i\alpha_j\beta_j$, δεν παίζει ρόλο ποιο σύμβολο θα επιλέξουμε για το μικρότερο και ποιο για το μεγαλύτερο. Από τα προηγούμενα προκύπτει λοιπόν ότι

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)^2 = \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\beta_n^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\beta_j\alpha_j\beta_i. \quad \textbf{(2)}$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις **(1)** και **(2)**, θα πάρουμε:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2) - (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n)^2 =$$
$$= \sum_{1\le i<j\le n} (\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_j^2\beta_i^2 - 2\alpha_i\beta_j\alpha_j\beta_i) = \sum_{1\le i<j\le n} (\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix}^2. \quad \blacksquare$$

2η Απόδειξη της ανισότητας Caushy-Schwarz-Bunyakovsky: Επειδή το δεύτερο μέρος της ταυτότητας Lagrange είναι άθροισμα τετραγώνων, το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό, οπότε προκύπτει η ανισότητα Caushy-Schwarz-Bunyakovsky.

Επίσης, για να ισχύει ως ισότητα η ανισότητα Caushy-Schwarz-Bunyakovsky, θα πρέπει όλες οι ορίζουσες στο δεύτερο μέλος της ταυτότητας Lagrange να είναι μηδέν. Σ' αυτή την περίπτωση, αν κάποιο από τα διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ δεν είναι μηδενικό, πχ. το $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, τότε το άλλο είναι πολλαπλάσιο αυτού. Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq \mathbf{0}$, δηλαδή $\alpha_k \neq 0$, για κάποιο k, τότε θέτουμε $\lambda = \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} \Leftrightarrow \beta_k = \lambda\alpha_k$. Τότε, επειδή για κάθε $i \neq k$, θα έχουμε $\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_k & \beta_k \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \alpha_k\beta_i = \alpha_i\beta_k \Leftrightarrow \beta_i = \dfrac{\beta_k}{\alpha_k} \cdot \alpha_i = \lambda\alpha_i$. Επομένως $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. $\blacksquare$

3η Απόδειξη της ανισότητας Caushy-Schwarz-Bunyakovsky: Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε

$$(\alpha_i x - \beta_i)^2 = \alpha_i^2 x^2 - 2\alpha_i\beta_i x + \beta_i^2 \ge 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν αθροίσουμε όλες αυτές τις σχέσεις θα πάρουμε:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right) x + \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \ge 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \mathbf{0}$, δηλαδή $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, τότε η ανισότητα Cauchy ισχύει ως ισότητα. $(0 = 0)$. Και φυσικά σ' αυτή την περίπτωση $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 0 \cdot (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.
Έστω ότι κάποιος α_i δεν είναι μηδέν. Τότε $\mathrm{A} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$. Αν $\mathrm{B} = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i^2$ και $\Gamma = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, τότε επειδή το τριώνυμο $\mathrm{A}x^2 - 2\Gamma x + \mathrm{B}$ είναι μη αρνητικό, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η διακρίνουσά του $\Delta = 4\Gamma^2 - 4\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \leq 0$. Δηλαδή $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \geq \Gamma^2$ και τελειώσαμε. Αν η ανισότητα Caushy-Schwarz-Bunyakovsky ισχύει ως ισότητα, δηλαδή η διακρίνουσα του τριωνύμου $\mathrm{A}x^2 - 2\Gamma x + \mathrm{B}$ είναι μηδέν, τότε η (αναγκαστικά) διπλή ρίζα $\lambda = \dfrac{\Gamma}{\mathrm{A}}$ θα πρέπει να μηδενίζει όλα τα τετράγωνα $(\alpha_i x - \beta_i)^2$. (Γιατί το τριώνυμο είναι το άθροισμά τους). Άρα $\beta_i = \lambda\alpha_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ήτοι $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. ∎

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.13. $\big($**Τριγωνική ανισότητα**$\big)$ Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$.
Τότε ισχύει η σχέση:
$$\sqrt{(\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2}$$
Επίσης η ανωτέρω σχέση ισχύει ως ισότητα αν και μόνον αν κάποιο από τα διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ είναι μη αρνητικό πολλαπλάσιο του άλλου.
<u>**Απόδειξη:**</u> Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με τη σχέση
$$(\alpha_1 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 + \beta_2)^2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)^2 \leq \left(\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2} + \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2}\right)^2,$$
δηλαδή
$$\begin{gathered}\cancel{\alpha_1^2} + \cancel{\beta_1^2} + 2\alpha_1\beta_1 + \cancel{\alpha_2^2} + \cancel{\beta_2^2} + 2\alpha_2\beta_2 + \cdots + \cancel{\alpha_n^2} + \cancel{\beta_n^2} + 2\alpha_n\beta_n \leq \\ \leq \cancel{\alpha_1^2} + \cancel{\alpha_2^2} + \cdots + \cancel{\alpha_n^2} + \cancel{\beta_1^2} + \cancel{\beta_2^2} + \cdots + \cancel{\beta_n^2} + 2\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2}, \\ \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2},\end{gathered}$$
η οποία προκύπτει από την ανισότητα Caushy-Schwarz-Bunyakovsky επειδή
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n \leq |\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n|.$$
Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν
$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_n^2} \geq 0$$
Όπως είδαμε παραπάνω, ένα από τα δύο διανύσματα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ είναι πολλαπλάσιο του άλλου. Θα δείξουμε ότι είναι μη αρνητικό πολλαπλάσιο του άλλου. Αν και τα δύο διανύσματα είναι μηδενικά, μπορούμε να γράψουμε $(0, 0, \ldots, 0) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \lambda \cdot (0, 0, \ldots, 0) = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ για οποιοδήποτε $\lambda \geq 0$.
Αν πάλι κάποιο από τα δύο διανύσματα δεν είναι μηδενικό π.χ. το $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \lambda \cdot (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$. Αλλά $0 \leq \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \lambda(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)$ και επειδή $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 > 0$, έπεται ότι $\lambda \geq 0$. Το αντίστροφο είναι προφανές. ∎

Στη συνέχεια θα δούμε πώς με μεθόδους **Γραμμικής Άλγεβρας** καταλήγουμε στον μάλλον περίεργο τύπο για τους αριθμούς Fibonacci.
Θεωρούμε το διάνυσμα-στήλη $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$. Προφανώς $\mathrm{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Οι σχέσεις
$$\begin{cases} f_{n+2} &= f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} &= f_{n+1} \end{cases}$$
γράφονται σε πινακική μορφή ως εξής: $\mathrm{P}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}_n$.
Επομένως $\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{P}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \mathrm{P}_{n-2} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \mathrm{P}_1$.

Για να υπολογίσουμε τη δύναμη του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ τον διαγωνοποιούμε. Το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι $\phi(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1$, με ρίζες $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\sigma = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho x \\ \rho y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y &= \rho x \\ x &= \rho y \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (\rho+1)y &= \rho^2 y \\ x &= \rho y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\rho^2-\rho-1)y &= 0 \\ x &= \rho y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 &= 0 \\ x &= \rho y \end{cases} \Leftrightarrow x = \rho y$. Για $y = 1$ παίρνουμε το ιδιοδιάνυσμα $\begin{pmatrix} \rho \\ 1 \end{pmatrix}$. Ομοίως, το $\begin{pmatrix} \sigma \\ 1 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή σ.

Έστω $Q = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Τότε $A = Q\begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}Q^{-1}$ και επομένως $A^k = Q\begin{pmatrix} \rho^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}Q^{-1}$, για κάθε φυσικό αριθμό k. Επίσης, $\det Q = \rho - \sigma = \sqrt{5}$ και $\mathrm{adj}Q = \begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ -1 & \rho \end{pmatrix}$ και άρα $Q^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ -1 & \rho \end{pmatrix}$.

Επομένως

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho^{n-1} & 0 \\ 0 & \sigma^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ -1 & \rho \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \rho^n - \sigma^n & \rho\sigma^n - \sigma\rho^n \\ \rho^{n-1} - \sigma^{n-1} & \rho\sigma^{n-1} - \sigma\rho^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \rho^n - \sigma^n + \rho\sigma^n - \sigma\rho^n \\ \rho^{n-1} - \sigma^{n-1} + \rho\sigma^{n-1} - \sigma\rho^{n-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \rho^n(1-\sigma) - \sigma^n(1-\rho) \\ \rho^{n-1}(1-\sigma) - \sigma^{n-1}(1-\rho) \end{pmatrix}.$$

Αλλά $1 - \sigma = \rho \Leftrightarrow 1 - \rho = \sigma$. Επομένως $P_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \rho^{n+1} - \sigma^{n+1} \\ \rho^n - \sigma^n \end{pmatrix}$.

Κατά συνέπεια $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\rho^n - \sigma^n) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. ■

Τελειώνοντας την «κριτική» της επαγωγής ως ευρετικού εργαλείου, ας δούμε ένα άλλο παράδειγμα:

62. Δίνεται η ακολουθία (α_n), με $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{n+1} = \frac{2}{3}\alpha_n + 5$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Λύση: Κατ' αρχάς δεν ξέρουμε αν η ακολουθία (α_n) συγκλίνει. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε τον γενικό τύπο της ακολουθίας αυτής. Θα τον βρούμε κατευθείαν, χωρίς να τον «μαντέψουμε» και μετά να τον επαληθεύσουμε με επαγωγή. Γράφουμε σε στήλη την αναδρομική σχέση $\alpha_{n+1} = \frac{2}{3}\alpha_n + 5$ για τις διάφορες τιμές του n.

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha_1 = 2 & (1)\\
\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_1 + 5 & (2)\\
\alpha_3 = \frac{2}{3}\alpha_2 + 5 & (3)\\
\vdots & \\
\alpha_{n-2} = \frac{2}{3}\alpha_{n-3} + 5 & (n-2)\\
\alpha_{n-1} = \frac{2}{3}\alpha_{n-2} + 5 & (n-1)\\
\alpha_n = \frac{2}{3}\alpha_{n-1} + 5 & (n)
\end{array}\right\}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη $(n-1)$-στή σχέση με $\frac{2}{3}$, την $(n-2)$-στή σχέση με $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ κ.ο.κ. έως την πρώτη σχέση με $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, θα πάρουμε τις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{lcll}
\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\alpha_1} & = & 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} & (1)'\\
\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\alpha_2} & = & \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\alpha_1} + 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} & (2)'\\
\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}\alpha_3} & = & \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\alpha_2} + 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3} & (3)'\\
 & \vdots & & \\
\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\alpha_{n-2}} & = & \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\alpha_{n-3}} + 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2} & (n-2)'\\
\cancel{\frac{2}{3}\alpha_{n-1}} & = & \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\alpha_{n-2}} + 5\cdot\frac{2}{3} & (n-1)'\\
\alpha_n & = & \cancel{\frac{2}{3}\alpha_{n-1}} + 5 & (n)'
\end{array}\right\}$$

και θα οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα: $\alpha_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 5\cdot\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right) =$

$= 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 5\cdot\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 15\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)$. Επομένως $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 15$. ■

Παρόλο που η επαγωγή, ως αποδεικτική μέθοδος μπορεί να υστερεί ως προς την «ευρετικότητά» της και σε πολλές περιπτώσεις να μην παρέχει ιδιαίτερα «κομψές» αποδείξεις, εντούτοις εξακολουθεί να αποτελεί **ισχυρότατο εργαλείο στο οπλοστάσιο του μαθηματικού**. Δεν είναι τυχαίο το γεγονός ότι η πρώτη σκέψη που κάνει ο επίδοξος λύτης μιας άσκησης είναι «μήπως η άσκηση αυτή βγαίνει με επαγωγή». Οι κομψότερες λύσεις είναι συνήθως και οι πιο δύσκολες. Η επαγωγή μπορεί επίσης να συνδυαστεί και με άλλες μεθόδους, ώστε ο λύτης να οδηγηθεί στο σωστό αποτέλεσμα. Η προηγούμενη ενδελεχής αναφορά σε αυτήν καταδεικνύει πόσο πολύτιμο εργαλείο είναι. Και αποτελεί ιδιαίτερο πρόβλημα το γεγονός ότι οι «επαΐοντες»(;) της εκπαίδευσης φρόντισαν (όπως άλλωστε έκαναν και με το μεγαλύτερο μέρος της ύλης των Μαθηματικών) να την εξαφανίσουν κυριολεκτικά από τη μέση εκπαίδευση. Το αν πέτυχαν κάτι καλύτερο, αυτό κρίνεται εκ του αποτελέσματος.

1.3 Βασικές Έννοιες Συνδυαστικής

1.3.1 Η Προσθετική και η Πολλαπλασιαστική Αρχή

Με απλά λόγια, η (απαριθμητική) Συνδυαστική ασχολείται με τις μεθόδους υπολογισμού του πλήθους των στοιχείων ενός ή περισσοτέρων συνόλων. Σε γενικές γραμμές στηρίζεται σε δύο απλές αρχές: Την προσθετική αρχή και την πολλαπλασιαστική αρχή.

Η Προσθετική Αρχή: Με λίγα λόγια η προσθετική αρχή μας λέει το εξής «αυτονόητο»: Αν έχουμε n σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους (δηλαδή $A_i \cap A_j = \varnothing$

για κάθε $i \neq j$), τότε το πλήθος των στοιχείων της ένωσης $\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$ ισούται με το άθροισμα των πληθαρίθμων των επί μέρους συνόλων, δηλαδή

$$|\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n| = |\mathrm{A}_1| + |\mathrm{A}_2| + \cdots + |\mathrm{A}_n|$$

ή πιο σύντομα

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |\mathrm{A}_i|$$

Σημείωση: Αν έχουμε n σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$, τα οποία είναι ανά δύο ξένα, τότε η ένωσή τους λέγεται **ξένη ένωση** και για έμφαση συμβολίζεται με $\mathrm{A}_1 \dot\cup \mathrm{A}_2 \dot\cup \ldots \dot\cup \mathrm{A}_n$ ή πιο σύντομα $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i$.

Παραδείγματα: 1) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο παρέες μαθητών. Η πρώτη αποτελείται από τρεις μαθητές, τους α_1, α_2 και α_3 και η δεύτερη από τους β_1, β_2 και β_3. Θέλουμε να επιλέξουμε δύο μαθητές, οι οποίοι όμως θα πρέπει να ανήκουν στην ίδια παρέα. Έχουμε δύο περιπτώσεις:

α) Οι μαθητές να ανήκουν στην πρώτη παρέα, οπότε και παίρνουμε έτσι το σύνολο $\mathrm{A}_1 = \{\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_1, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}\}$ και

β) οι μαθητές να ανήκουν στην δεύτερη παρέα, οπότε και παίρνουμε έτσι το σύνολο $\mathrm{A}_2 = \{\{\beta_1, \beta_2\}, \{\beta_1, \beta_3\}, \{\beta_2, \beta_3\}\}$.

Κάθε ένα τα δύο σύνολα περιέχει 3 στοιχεία. Άρα το πλήθος των δυνατών περιπτώσεων είναι ίσο με $|\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2| = |\mathrm{A}_1| + |\mathrm{A}_2| = 3 + 3 = 6$.

2) Να βρεθούν όλα τα ζεύγη (x, y) των ακεραίων με την ιδιότητα $x^2 + y^2 \leq 5$. Αν συμβολίσουμε με S_i το σύνολο $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = i\}$, τότε το ζητούμενο πλήθος είναι ο πληθάριθμος της ξένης ένωσης $\mathrm{S}_0 \dot\cup \mathrm{S}_1 \dot\cup \mathrm{S}_2 \dot\cup \mathrm{S}_3 \dot\cup \mathrm{S}_4 \dot\cup \mathrm{S}_5$. Παρατηρούμε ότι $\mathrm{S}_0 = \{(0, 0)\}$, $\mathrm{S}_1 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, $\mathrm{S}_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$, $\mathrm{S}_3 = \varnothing$, $\mathrm{S}_4 = \{(2, 0), (-2, 0), (0, 2), (0, -2)\}$ και $\mathrm{S}_5 = \{(2, 1), (-2, 1), (2, -1), (-2, -1), (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)\}$. Επομένως το ζητούμενο πλήθος είναι $1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$.

Η Πολλαπλασιαστική Αρχή: Η πολλαπλασιαστική αρχή μας λέει το εξής απλό: Υποθέτουμε ότι μια διαδικασία για να πραγματοποιηθεί απαιτεί n διαδοχικά στάδια, τα οποία συμβολίζουμε με $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Αν το στάδιο E_1 μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά k_1 τρόπους, το στάδιο E_2 κατά k_2 τρόπους, ... και τέλος το στάδιο E_n κατά k_n τρόπους, τότε η όλη διαδικασία μπορεί να πραγματοποιηθεί κατά

$$k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$$

τρόπους.

Παράδειγμα: Ένα πλήρες γεύμα σε κάποιο (ίσως καλό) εστιατόριο περιλαμβάνει:

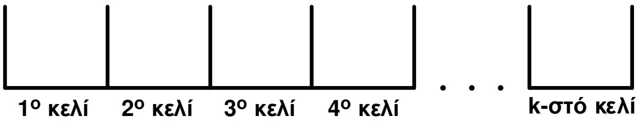
α) ορεκτικό (στάδιο E_1), **β)** το κυρίως πιάτο (στάδιο E_2) και τέλος **γ)** το γλυκό (στάδιο E_3).

Ο πελάτης έχει να επιλέξει ανάμεσα **3** είδη ορεκτικών ($|E_1| = 3$), **5** είδη κυρίως πιάτων ($|E_2| = 5$) και **2** είδη γλυκών ($|E_3| = 2$). Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή το πλήθος των διαφορετικών γευμάτων που προσφέρει το εστιατόριο ισούται με $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

Στη συνέχεια θα μάθουμε πώς να εφαρμόζουμε αυτές τις απλές αρχές και επιπλέον θα γνωρίσουμε και άλλες αρχές το ίδιο απλές αλλά και το ίδιο σημαντικές.

1.3.2 Διατάξεις-Μεταθέσεις-Συνδυασμοί

Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, n διαφορετικά αντικείμενα. ($n \geq 1$). Αν $1 \leq k \leq n$, τότε τίθεται το εξής πρόβλημα: Κατά πόσους τρόπους μπορούμε από τα n αντικείμενα να πάρουμε k και να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά; Το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής: Έχουμε k κελιά. Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε σε αυτά τα κελιά k αντικείμενα από τα n;



Σχήμα 10

Μια τέτοια τοποθέτηση k αντικειμένων από συνολικά n λέγεται **διάταξη n αντικειμένων ανά k**. Το πλήθος των διατάξεων n (αντικειμένων) ανά k ας το συμβολίσουμε με Δ_k^n.
Παρατηρούμε ότι για το $1^{\text{ο}}$ κελί έχουμε n επιλογές. Αφού επιλέξουμε το $1^{\text{ο}}$ απομένουν $n-1$ αντικείμενα. Άρα για το $2^{\text{ο}}$ κελί έχουμε $n-1$ επιλογές. Αφού επιλέξουμε και το $2^{\text{ο}}$ απομένουν $n-2$ αντικείμενα. Άρα για το $3^{\text{ο}}$ κελί έχουμε $n-2$ επιλογές. Τελικά, αν έχουμε επιλέξει τα πρώτα $k-1$ αντικείμενα, τότε απομένουν $n-(k-1)=n-k+1$ αντικείμενα, άρα $n-k+1$ επιλογές για το τελευταίο κελί. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή παίρνουμε

$$\Delta_k^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Αν $k=n$, το πρόβλημα έγκειται στο κατά πόσους τρόπους μπορούμε n διακεκριμένα αντικείμενα να τα τοποθετήσουμε σε μια σειρά. Μια τέτοια διάταξη όλων των n αντικειμένων λέγεται **μετάθεση των n αντικειμένων**. Αν M_n είναι το πλήθος τους, τότε

$$\mathrm{M}_n = \Delta_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Έστω n αντικείμενα και $k \le n$. Τίθεται το ερώτημα: Κατά πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από τα n; (Χωρίς όμως να τα διατάξουμε). Το ερώτημα είναι ισοδύναμο με το ερώτημα:«πόσα υποσύνολα με ακριβώς k στοιχεία έχει ένα σύνολο με n στοιχεία;» Κάθε επιλογή k στοιχείων από n λέγεται **συνδυασμός n στοιχείων ανά k**. Έστω Σ_k^n το πλήθος τους. Για να προσδιορίσουμε το Σ_k^n σκεφτόμαστε ως εξής: Κάθε διάταξη n αντικειμένων ανά k πραγματοποιείται σε δύο φάσεις:
1η φάση: Από τα n στοιχεία επιλέγουμε τα k τα οποία θέλουμε να διατάξουμε. Αυτό γίνεται κατά Σ_k^n τρόπους.
2η φάση: Μεταθέτουμε τα k επιλεχθέντα στοιχεία. Αυτό γίνεται κατά $k!$ τρόπους.
Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος Δ_k^n των διατάξεων n στοιχείων ανά k ισούται με $\Sigma_k^n \cdot k!$. Επομένως

$$\Sigma_k^n = \frac{\Delta_k^n}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Το σύμβολο $\Sigma_k^n \cdot k!$ έχει έννοια ακόμα και αν κάποιο από τα n, k είναι μηδέν ή το k να είναι μεγαλύτερο του n. Αν $k=0$, τότε έχουμε **ακριβώς μία** επιλογή: να μην πάρουμε κανένα στοιχείο. Ισοδύναμα να πάρουμε το $\emptyset$. Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και αν $n=0$. (Το κενό σύνολο έχει ένα ακριβώς υποσύνολο: το ίδιο το κενό). Αυτό συμπίπτει με τον ορισμό του $\binom{n}{0}=1$. Αν τώρα $n<k$, τότε δεν έχουμε **καμία** επιλογή. Δεν μπορούμε από λιγότερα στοιχεία να πάρουμε περισσότερα. Και στην περίπτωση αυτή ο αριθμός Σ_k^n συμπίπτει με το σύμβολο $\binom{n}{k}=0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση

$$\Sigma_k^n = \binom{n}{k}$$

Παρατηρήσεις: 1) Η συνδυαστική ερμηνεία του γεγονότος ότι $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ είναι η εξής:

Όταν από ένα σύνολο A με n στοιχεία θεωρήσουμε ένα υποσύνολό του X με k στοιχεία, τότε αυτομάτως έχουμε ορίσει το συμπλήρωμα $A \setminus X$ του X στο A, το οποίο (είναι μοναδικό) και περιέχει $n-k$ στοιχεία. Ισχύει προφανώς και το αντίστροφο: αν επιλέξουμε ένα υποσύνολο Y του A με $n-k$ στοιχεία, τότε το $X = A \setminus Y$ αποτελείται ακριβώς από k στοιχεία και προφανώς $A \setminus X = A \setminus (A \setminus Y) = Y$.
Αν λοιπόν $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(A)$ είναι η συλλογή των υποσυνόλων του A με k στοιχεία και $\mathcal{B}$ η συλλογή των υποσυνόλων του A με $n-k$ στοιχεία, τότε η απεικόνιση $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, με $f(X) = A \setminus X$ είναι 1-1 και επί. Άρα $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$, δηλαδή

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

2) Στην προηγούμενη παρατήρηση υποκρίπτεται και μια άλλη σημαντική αρχή της Συνδυαστικής: **Η Αρχή της αμφιμονοσήματης αντιστοιχίας**. Με απλά λόγια, αν A και B είναι δύο σύνολα και υπάρχει $f : A \to B$, η οποία είναι 1-1 και επί, τότε $|A| = |B|$. Η αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας εφαρμόζεται όταν δεν μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα το πλήθος των στοιχείων του A, ενώ μπορούμε να υπολογίσουμε πιο εύκολα το πλήθος των στοιχείων του B. Έτσι, μέσω της αντιστοιχίας f το πρόβλημα του υπολογισμού του $|A|$ ανάγεται στο πρόβλημα του υπολογισμού του $|B|$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1.14. (**ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ NEWTON**) Για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η ταυτότητα:

$$(\alpha+\beta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k}$$

Απόδειξη: Γράφουμε το $(\alpha+\beta)^n$ ως εξής:

$$(\alpha+\beta)^n = \underbrace{\overset{1^{\eta}\ \text{παρένθεση}}{(\alpha+\beta)} \quad \overset{2^{\eta}\ \text{παρένθεση}}{(\alpha+\beta)} \quad \overset{3^{\eta}\ \text{παρένθεση}}{(\alpha+\beta)} \quad \cdots \quad \overset{n\text{-στή παρένθεση}}{(\alpha+\beta)}}_{n\ \text{παρενθέσεις}}$$

Όταν εκτελούμε τις πράξεις μεταξύ των παρενθέσεων, με βάση την επιμεριστική ιδιότητα, τότε για να εμφανιστεί ο όρος $\alpha^k\beta^{n-k}$ θα πρέπει κάθε φορά να επιλέγουμε από τις n παρενθέσεις τις k από τις οποίες θα πάρουμε το α. Από τις υπόλοιπες αναγκαστικά θα πάρουμε το β. Από κάθε τέτοια επιλογή παίρνουμε συντελεστή $+1$ που το υπολογίζουμε στον συντελεστή του $\alpha^k\beta^{n-k}$. Εφόσον έχουμε n παρενθέσεις και επιλέγουμε κάθε φορά k από τις οποίες θα πάρουμε το α, αθροίζοντας για όλες αυτές τις επιλογές, ο συντελεστής του $\alpha^k\beta^{n-k}$ στο ανάπτυγμα του $(\alpha+\beta)^n$ θα πρέπει να είναι ίσος με $\binom{n}{k}$. ■

63. Να αποδείξετε συνδυαστικά τον τύπο: $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Απόδειξη: Το πρώτο μέλος μετράει τα υποσύνολα ενός συνόλου με n στοιχεία. Πράγματι, το $\binom{n}{0} = 1$ ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων με 0 στοιχεία (δηλαδή μόνον το κενό), το $\binom{n}{1} = n$ με το πλήθος των υποσυνόλων με ένα στοιχείο (μονοσύνολα), το $\binom{n}{2}$ με το πλήθος των υποσυνόλων με δύο στοιχεία κ.ο.κ. Δηλαδή το πρώτο μέλος ισούται με το πλήθος των υποσυνόλων ενός συνόλου με n στοιχεία. Δηλαδή, αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n\}$, τότε το πρώτο μέλος ισούται με τον πληθάριθμο του $\mathcal{P}(A)$. Για να υπολογίσουμε τον $|\mathcal{P}(A)|$ σκεπτόμαστε ως εξής: Θεωρούμε μια σταθερή διάταξη $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ των στοιχείων του A. Τότε για κάθε υποσύνολο

Χ του Α ορίζουμε ένα διάνυσμα $f(\mathrm{X}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ως εξής: $x_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } \alpha_i \in \mathrm{X} \\ 0, & \text{αν } \alpha_i \notin \mathrm{X} \end{cases}$
Κάθε τέτοιο διάνυσμα με στοιχεία από το $\{0, 1\}$ ορίζει με τη σειρά του ένα μοναδικό υποσύνολο Χ του Α, δηλαδή είναι εικόνα του Χ. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι $\mathrm{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Το διάνυσμα $(1, 1, 0, 1)$ ορίζει το υποσύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$, το διάνυσμα $(0, 0, 0, 0)$ ορίζει το κενό σύνολο, το διάνυσμα $(0, 1, 1, 0)$ ορίζει το υποσύνολο $\{\alpha_2, \alpha_3\}$, το διάνυσμα $(1, 1, 1, 1)$ ορίζει το $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \mathrm{A}$.
Επανερχόμαστε στη γενική περίπτωση: Από τα παραπάνω καθίσταται φανερό (αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας) ότι το πλήθος των υποσυνόλων του Α ισούται με το πλήθος των διανυσμάτων της μορφής $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, όπου $x_i \in \{0, 1\}$. Πόσα είναι αυτά τα διανύσματα; Για το x_1 έχουμε δύο επιλογές (0 ή 1), για το x_2 πάλι δύο επιλογές,... και για το x_n επίσης δύο επιλογές. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n \text{ φορές}} = 2^n$ επιλογές. ■

1.3.3 Επαναληπτικές Διατάξεις-Επαναληπτικοί Συνδυασμοί

Τις **επαναληπτικές διατάξεις** τις έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει στην προηγούμενη εφαρμογή. Μια επαναληπτική διάταξη n αντικειμένων ανά k είναι η τοποθέτηση σε μια σειρά k θέσεων ή ισοδύναμα σε k κελιά κάποιων από τα n αντικείμενα **με δυνατότητα επανάληψης** καθενός από τα αντικείμενα για περισσότερες από μία φορά. Εδώ μπορεί το k να είναι μεγαλύτερο του n.
Έτσι, αν το σύνολο των αντικειμένων είναι π.χ. το $\{1, 2, 3\}$ και $k = 4$, τότε οι τοποθετήσεις 1132, 2221, 3222 είναι κάποιες από τις επαναληπτικές διατάξεις 3 αντικειμένων ανά 4. Δηλαδή οι επαναληπτικές διατάξεις n αντικειμένων ανά k είναι όλες οι πεπερασμένες ακολουθίες μήκους k με όρους-στοιχεία από ένα σύνολο με n στοιχεία. Έστω $\mathbf{E\Delta}_k^n$ το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεων n αντικειμένων ανά k. Για την πρώτη θέση έχουμε n επιλογές, αλλά και για τη δεύτερη, την τρίτη κτλ έχουμε πάλι n επιλογές, γιατί επιτρέπονται επαναλήψεις. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε

$$\mathrm{E\Delta}_k^n = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{k \text{ φορές}} = n^k$$

Τώρα, ένας **επαναληπτικός συνδυασμός** n αντικειμένων ανά k (και εδώ το k μπορεί να είναι μεγαλύτερο του n) είναι μια επιλογή k αντικειμένων από τα n, **με δυνατότητα επανάληψης αλλά χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους**. Έστω $\mathbf{E\Sigma}_k^n$ το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n αντικειμένων ανά k.

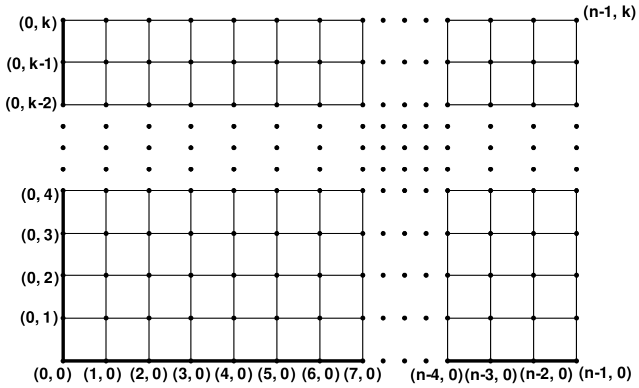
ΠΡΟΤΑΣΗ 1.15. Ισχύει η σχέση: $\mathrm{E\Sigma}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$.

1η Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το σύνολο των n αντικειμένων είναι το $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Αφού επιλέξουμε k αριθμούς, ενδεχομένως με επαναλήψεις, από το σύνολο $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, τους διατάσσουμε κατ' αύξουσα σειρά. Έτσι παίρνουμε ένα **μοναδικό** διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, όπου $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$ και $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \cdots \leq \alpha_k$. Το ίσον (=) στη σχέση $\leq$ επιτρέπει την ενδεχόμενη επανάληψη των αντικειμένων. Από το διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ ορίζεται ένα **μοναδικό** διάνυσμα $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ ως εξής: Θέτουμε $\beta_1 = \alpha_1$, $\beta_2 = \alpha_2 + 1$, $\beta_3 = \alpha_3 + 2$ και τελικώς $\beta_k = \alpha_k + k - 1$. Δηλαδή, $\beta_i = \alpha_i + i - 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$. Παρατηρούμε ότι $\beta_{i+1} - \beta_i = \alpha_{i+1} + (i+1) - 1 - (\alpha_i + i - 1) = \alpha_{i+1} - \alpha_i + 1 \geq 1$, γιατί $\alpha_{i+1} - \alpha_i \geq 0$. Επομένως $\beta_{i+1} > \beta_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $\beta_1 = \alpha_1$ είναι το 1 και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το $\beta_k = \alpha_k + k - 1$ είναι $n + k - 1$. Επειδή στο νέο διάνυσμα $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ δεν έχουμε ισότητες, αυτό καθορίζει έναν **μοναδικό** (απλό) συνδυασμό $n + k - 1$ αντικειμένων, παρμένων από το σύνολο $\{1, 2, 3, \ldots, n + k - 1\}$ ανά k. Ισχύει και το αντίστροφο: Αν $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$ είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί σ' έναν απλό συνδυασμό των $n+k-1$ αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n+k-1$ ανά k, με $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k$, τότε μπορούμε να **ανακτήσουμε** το αρχικό διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ από το σύνολο των αριθμών $1, 2, 3, \ldots, n$, με $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_k$ ως εξής: Θέτουμε $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 - 1$, $\alpha_3 = \beta_3 - 2$ και γενικά $\alpha_i = \beta_i - i + 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Παρατηρούμε ότι $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \beta_{i+1} - (i+1) + 1 - (\beta_i - i + 1) = \beta_{i+1} - \beta_i - 1 \geq 0$, γιατί $\beta_{i+1} > \beta_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, k$. Η ελάχιστη τιμή του $\alpha_1 = \beta_1$ είναι το 1 και η μέγιστη τιμή του $\alpha_k = \beta_k - k + 1$ είναι $(n+k-1) - k + 1 = n$. Άρα όντως το διάνυσμα $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ αντιστοιχεί σε έναν επαναληπτικό συνδυασμό n αντικειμένων ανά k. Σύμφωνα με την αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοιχίας, το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n αντικειμένων ανά k ισούται με το πλήθος των απλών συνδυασμών $n + k - 1$ αντικειμένων ανά k. Επομένως $\mathrm{E\Sigma}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$. ■

<u>2η Απόδειξη:</u> Από όλους τους $\mathrm{E\Sigma}_k^n$ επαναληπτικούς συνδυασμούς των n αντικειμένων $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ υπολογίζουμε πόσες συνολικά φορές εμφανίζεται ένα συγκεκριμένο αντικείμενο, π.χ. το α_1. Έστω λ ο αριθμός αυτός. Λόγω συμμετρίας, ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος για όλα τα n αντικείμενα. Αθροιστικά λοιπόν όλα τα αντικείμενα, σε όλους τους $\mathrm{E\Sigma}_k^n$ επαναληπτικούς συνδυασμούς εμφανίζονται $n\lambda$ φορές. Επειδή σε κάθε έναν από τους $\mathrm{E\Sigma}_k^n$ επαναληπτικούς συνδυασμούς εμφανίζονται (ενδεχομένως με επαναλήψεις) k αντικείμενα, θα έχουμε $n\lambda = k \cdot \mathrm{E\Sigma}_k^n \Leftrightarrow \lambda = \frac{k}{n} \cdot \mathrm{E\Sigma}_k^n$. Αν τώρα από κάθε επαναληπτικό συνδυασμό που περιέχει το α_1 αφαιρέσουμε το στοιχείο αυτό μία μόνον φορά, θα πάρουμε όλους τους επαναληπτικούς συνδυασμούς n αντικειμένων ανά $k - 1$. (Σε αυτούς μπορεί το α_1 να επανεμφανίζεται). Σύμφωνα με το προηγούμενο επιχείρημα, στους τελευταίους αυτούς $\mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n$ επαναληπτικούς συνδυασμούς το α_1 θα εμφανίζεται συνολικά $\lambda' = \frac{k-1}{n} \cdot \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n$ φορές. Επειδή οι $\mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n$ συνδυασμοί προέκυψαν με αφαίρεση ενός α_1, το σύνολο λ των εμφανίσεων του α_1 σε όλους τους $\mathrm{E\Sigma}_k^n$ επαναληπτικούς συνδυασμούς θα ισούται με $\lambda = \lambda' + \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n \Leftrightarrow \frac{k}{n} \cdot \mathrm{E\Sigma}_k^n = \frac{k-1}{n} \cdot \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n + \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n =$ $= \frac{n+k-1}{n} \cdot \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n \Leftrightarrow \mathrm{E\Sigma}_k^n = \frac{n+k-1}{k} \cdot \mathrm{E\Sigma}_{k-1}^n$. Η τελευταία αναδρομική σχέση μας οδηγεί στο αποτέλεσμα $\mathrm{E\Sigma}_k^n = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)}{k(k-2)\cdots 2} \cdot \mathrm{E\Sigma}_1^n$. Αλλά $\mathrm{E\Sigma}_1^n = n$, οπότε

$$\mathrm{E\Sigma}_k^n = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$$ ■

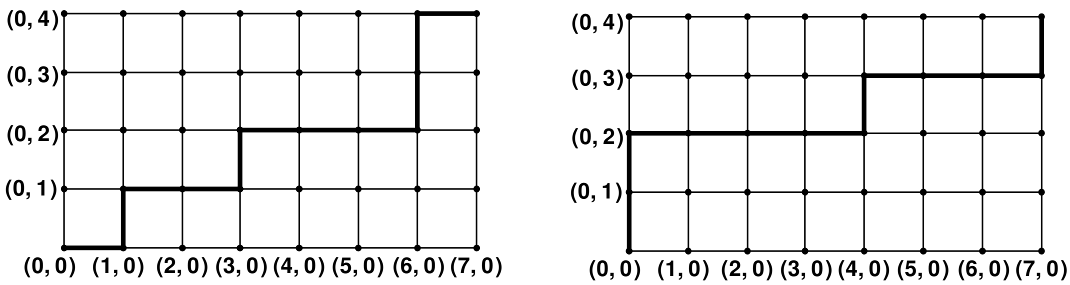
<u>3η Απόδειξη:</u> $\big($**Γεωμετρική**$\big)$: Θεωρούμε το πλέγμα που ορίζεται από τα σημεία του επιπέδου με ακέραιες συντεταγμένες (lattice-points). Θα περιοριστούμε στα σημεία που έχουν τετμημένη από το σύνολο $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ και τεταγμένη από το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$.



Σχήμα 11

Υποθέτουμε ότι ένας δρόμος ξεκινά από το σημείο $(0,0)$ και καταλήγει στο σημείο $(n-1,k)$ περνώντας από τα ενδιάμεσα lattice-points. Κάθε φορά μπορούμε να κινηθούμε είτε δεξιά κατά 1 μονάδα είτε πάνω κατά 1 μονάδα και πάλι. Το ερώτημα είναι: «πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;»

Για παράδειγμα, αν $n=8$ και $k=4$, τότε δύο τέτοιοι δρόμοι απεικονίζονται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 12

Κάθε τέτοιος δρόμος αποτελείται από $n-1$ οριζόντια και k κατακόρυφα μοναδιαία διαστήματα. Συνολικά κάποιος πρέπει να διασχίσει $n+k-1$ μοναδιαία διαστήματα για να βρεθεί από το σημείο $(0,0)$ στο σημείο $(n-1,k)$. Δηλαδή από κάθε σημείο έχει δύο μόνον επιλογές: Ή να κινηθεί δεξιά κατά 1 ή προς τα πάνω κατά 1. Αν θέσουμε 0 για τα οριζόντια διαστήματα και 1 για τα κατακόρυφα, τότε κάθε δρόμος αντιστοιχεί σε μια ακολουθία μήκους $n+k-1$ με στοιχεία 0 ή 1. Έτσι, στο αριστερό σχήμα αντιστοιχεί η ακολουθία 01001000110 και στο δεξιό σχήμα η ακολουθία 11000010001. Γενικά λοιπόν το πρόβλημα ανάγεται στο να επιλέξουμε από τις $n+k-1$ θέσεις της ακολουθίας, αυτές στις οποίες θα βάλουμε 1. Στις υπόλοιπες αναγκαστικά θα βάλουμε 0. Επειδή υπάρχουν k κατακόρυφα τμήματα, είμαστε υποχρεωμένοι να επιλέξουμε από τις $n+k-1$ θέσεις, ακριβώς k θέσεις στις οποίες θα βάλουμε 1. Αυτό γίνεται κατά $\binom{n+k-1}{k}$ τρόπους.

Τώρα θα μετρήσουμε τους δρόμους διαφορετικά. Επιλέγουμε από τις n κατακόρυφες ευθείες με τετμημένες $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ εκείνες στις οποίες υπάρχουν σημεία στα οποία θα κινηθούμε προς τα πάνω. Έτσι, στο αριστερό σχήμα κίνηση προς τα πάνω γίνεται στις τετμημένες $1,3$ και 6. Κάθε φορά που κινούμαστε προς τα πάνω αυτό ισοδυναμεί με την εμφάνιση της ίδιας τετμημένης ακόμα 1 φορά. Έτσι, στο αριστερό σχήμα η τετμημένη 1 εμφανίζεται 1 φορά, η 3 εμφανίζεται 1 φορά και η 6 εμφανίζεται 2 φορές. Αν προσθέσουμε το συνολικό πλήθος των κατακόρυφων κινήσεων θα πάρουμε φυσικά $1+1+2=4$, όσα και τα κατακόρυφα τμήματα. Στο δεύτερο σχήμα η μηδενική τετμημένη εμφανίζεται 2 φορές, η τετμημένη 4 εμφανίζεται 1 φορά και τέλος, η τετμημένη 7 εμφανίζεται 1 φορά. (Και πάλι $2+1+1=4$, αναγκαστικά). Πρόκειται λοιπόν για **το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των $\boldsymbol{n}$ τετμημένων $\boldsymbol{\{0,1,2,\ldots,n-1\}}$ ανά $\boldsymbol{k}$**. Επειδή οι δύο μετρήσεις πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, συνάγουμε ότι το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n αντικειμένων ανά k ισούται με $\binom{n+k-1}{k}$. ■

Συμβολισμός: Το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών n αντικειμένων ανά k συμβολίζεται συνήθως με $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

64. **(i)** Πόσες διατεταγμένες n-άδες $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων υπάρχουν με την ιδιότητα $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$;
(ii) Πόσες διατεταγμένες n-άδες $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ μη αρνητικών ακεραίων υπάρχουν με την ιδιότητα $x_1+x_2+\cdots+x_n\le k$;
(iii) Πόσες διατεταγμένες πεντάδες (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) θετικών ακεραίων υπάρχουν με την ιδιότητα $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=17$;
Λύση: **(i)** Κάθε n-άδα αντιστοιχεί στην εμφάνιση της 1ης θέσης x_1 φορές, της 2ης x_2 φορές, κτλ, και της n-στής θέσης x_n φορές. Πρόκειται λοιπόν για το πλήθος των επαναληπτικών συνδυασμών των n θέσεων ανά k. Το αποτέλεσμα είναι $\binom{n+k-1}{k}$.
(ii) Αν $x_1+x_2+\cdots+x_n\le k$ εισάγουμε μια νέα μεταβλητή $x_{n+1}=k-x_1-x_2-\cdots-x_n\ge 0$. Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό του πλήθους των $(n+1)$-άδων $(x_1,x_2,\ldots,x_n,x_{n+1})$ με $x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}=k$. Αποτέλεσμα: $\binom{n+1+k-1}{k}=\binom{n+k}{k}$.
(iii) Εφόσον $x_i>0$, θα έχουμε $y_i=x_i-1\ge 0$, για κάθε $i=1,2,3,4,5$. Επομένως $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=17 \Leftrightarrow (x_1-1)+(x_2-1)+(x_3-1)+(x_4-1)+(x_5-1)=12 \Leftrightarrow y_1+y_2+y_3+y_4+y_5=12$. Αποτέλεσμα: $\binom{5+12-1}{12}=\binom{16}{12}=\binom{16}{4}=\frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{2\cdot 15\cdot 14\cdot 13}{3}=10\cdot 14\cdot 13=1820$. ■

65. **(i)** Πόσα μονώνυμα στις n μεταβλητές x_1, x_2, …, x_n βαθμού $r\ge 0$ υπάρχουν;
(ii) Πόσα μονώνυμα στις n μεταβλητές x_1, x_2, …, x_n το πολύ βαθμού $r\ge 0$ υπάρχουν;
Λύση: **(i)** Ένα τέτοιο μονώνυμο είναι της μορφής $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_n^{r_n}$, όπου $r_i\ge 0$ και $r_1+r_2+\cdots+r_n=r$. Άρα πρόκειται για επαναληπτικούς συνδυασμούς n αντικειμένων ανά r, δηλαδή $\binom{n+r-1}{r}$.
(ii) **1ος τρόπος:** Τα μονώνυμα είναι βαθμού $s\le r$ είναι $\binom{n+s-1}{s}$ το πλήθος. Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι $\sum_{s=0}^{r}\binom{n+s-1}{s}$. Για $r=0$ παίρνουμε το σταθερό μονώνυμο 1.

Αν $r = 1$ παίρνουμε $1 + \binom{n+1-1}{1} = 1 + n$, για $r = 2$ παίρνουμε $1 + n + \binom{n+2-1}{2} =$
$= n + 1 + \frac{(n+1)n}{2} = (n+1)\left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.
Δημιουργείται η εικασία ότι ο ζητούμενος αριθμός μπορεί να είναι ίσος με

$$\frac{(n+r)(n+r-1)(n+r-2)\cdots(n+1)}{r!} = \binom{n+r}{r}.$$

Μέχρι $r = 2$ το έχουμε αποδείξει. Υποθέτουμε ότι $\sum_{s=0}^{r} \binom{n+s-1}{s} = \binom{n+r}{r}$. Τότε έχουμε:

$$\sum_{s=0}^{r+1} \binom{n+s-1}{s} = \sum_{s=0}^{r} \binom{n+s-1}{s} + \binom{n+r}{r+1} \underset{\substack{\text{επαγωγική} \\ \text{υπόθεση}}}{=} \binom{n+r}{r} + \binom{n+r}{r+1} = \binom{n+r+1}{r+1},$$

από το τρίγωνο του Pascal.

2$^{\text{ος}}$ τρόπος: Όπως είδαμε στο **(ii)** της προηγούμενης άσκησης, ο ζητούμενος αριθμός ισούται με το πλήθος των n-άδων μη αρνητικών ακεραίων με άθροισμα μικρότερο ή ίσο του r και με την εισαγωγή νέας μεταβλητής ο αριθμός αυτός ισούται με το πλήθος των $(n+1)$-άδων με άθροισμα ακριβώς r. Δηλαδή με $\binom{n+r}{r}$. ■

1.3.4 Πολυωνυμικοί Συντελεστές

Οι συντελεστές $\binom{n}{k}$ που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του $(x_1+x_2)^n$ λέγονται διωνυμικοί συντελεστές. Ας γενικεύσουμε το πρόβλημα: Στο ανάπτυγμα του $(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n$ θα εμφανιστούν μονώνυμα της μορφής $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$, όπου $r_1 + r_2 + \cdots r_k = n$. Ποιος είναι ο συντελεστής ενός τέτοιου μονωνύμου;

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.16. Ο συντελεστής του $x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}$ στο ανάπτυγμα του $(x_1 + x_2 + \cdots x_k)^n$ είναι ίσος με

$$\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_k} := \frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!},$$

όπου φυσικά $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

Απόδειξη: Ακολουθούμε την ίδια τακτική με τη συνδυαστική απόδειξη του διωνύμου του Newton. Γράφουμε το $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ ως εξής:

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n =$

$$= \underbrace{\overbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}^{1^{\eta} \text{ παρένθεση}} \overbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}^{2^{\eta} \text{ παρένθεση}} \overbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}^{3^{\eta} \text{ παρένθεση}} \cdots \overbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)}^{n\text{-στή παρένθεση}}}_{n \text{ παρενθέσεις}}.$$

Για να πάρουμε r_1 φορές το x_1 θα πρέπει να επιλέξουμε από τις n παρενθέσεις τις r_1 από τις οποίες θα πάρουμε το x_1. Αυτό γίνεται κατά $\binom{n}{r_1}$ τρόπους. Από τις εναπομείνασες $n - r_1$ παρενθέσεις θα επιλέξουμε τις r_2, από τις οποίες θα πάρουμε το x_2, κατά $\binom{n-r_1}{r_2}$ τρόπους. Από τις εναπομείνασες $n-r_1-r_2$ παρενθέσεις θα επιλέξουμε κατά $\binom{n-r_1-r_2}{r_3}$ τρόπους τις r_3, από τις οποίες θα πάρουμε το x_3. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο, φτάνουμε στο σημείο στο οποίο έχουμε ήδη επιλέξει, κατά $\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-2}}{r_{k-1}}$ τρόπους, από τις $n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-2}$ τις r_{k-1} παρενθέσεις από τις οποίες θα πάρουμε το x_{k-1}. Απομένουν $n-r_1-r_2-\cdots r_{k-1}=r_k$ παρενθέσεις από τις οποίες δεν έχουμε άλλη επιλογή από το να πάρουμε το x_k. Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, ο συντελεστής του $x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}$ είναι

$$\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-2}}{r_{k-1}}=$$

$$=\frac{n!}{r_1!\cancel{(n-r_1)!}}\cdot\frac{\cancel{(n-r_1)!}}{r_2!\cancel{(n-r_1-r_2)!}}\cdots\frac{\cancel{(n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-2})!}}{r_{k-1}!(n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-2}-r_{k-1})!}\underset{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}=r_k}{=}$$

$$=\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}. \qquad \blacksquare$$

Είναι σαφές ότι ο διωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ισούται $\binom{n}{k,n-k}$.

1.3.5 Αρχή του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.17. (Αρχή του Εγκλεισμού) Έστω $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_n$ σύνολα. Τότε ισχύει ο ακόλουθος τύπος για το πλήθος των στοιχείων της ένωσης $\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n$:

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n|&=\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{A}_i|-\sum_{1\le i_1<i_2\le n}|\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}|+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\cap\mathrm{A}_{i_3}|-\cdots+\\&+(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\le n}|\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\cap\cdots\cap\mathrm{A}_{i_{n-1}}|+(-1)^{n-1}|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2\cap\cdots\cap\mathrm{A}_n|.\end{aligned} \tag{1}$$

1η Απόδειξη: Ένα στοιχείο της ένωσης $\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n$ θα ανήκει σε ακριβώς k από τα n σύνολα $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_n$, όπου $1\le k\le n$.

Στο άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{A}_i|$ μετριέται ακριβώς k φορές, στο άθροισμα $\sum_{1\le i_1<i_2\le n}|\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}|$ μετριέται $\binom{k}{2}$ φορές, στο άθροισμα $\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|\mathrm{A}_{i_1}\cap\mathrm{A}_{i_2}\cap\mathrm{A}_{i_3}|$ μετριέται $\binom{k}{3}$ φορές κ.ο.κ.

Άρα στο δεύτερο μέλος της αποδεικτέας σχέσης μετριέται ακριβώς

$$k-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$

φορές. Αλλά $k-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots(-1)^{k-1}\binom{k}{k}=1-1+\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\binom{k}{3}-\cdots(-1)^{k-1}\binom{k}{k}=$ $=1-\left(\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\binom{k}{3}+\cdots(-1)^k\binom{k}{k}\right)=1-(1-1)^k=1$, δηλαδή ακριβώς **μία** φορά. $\blacksquare$

2η Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε επαγωγή επί του n. Για $n=1$ είναι τετριμμένο, ενώ για $n=2$ ο τύπος $|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2|=|\mathrm{A}_1|+|\mathrm{A}_2|-|\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2|$ είναι αληθής γιατί στο άθροισμα $|\mathrm{A}_1|+|\mathrm{A}_2|$ το πλήθος των στοιχείων της τομής $\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_2$ μετριέται δύο φορές και πρέπει να αφαιρεθεί.

Υποθέτουμε ότι ο τύπος (1) ισχύει για n σύνολα. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Έστω λοιπόν $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\ldots,\mathrm{A}_n,\mathrm{A}_{n+1}$, $n+1$ σύνολα. Τότε έχουμε:

$$\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n\cup\mathrm{A}_{n+1}=(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n)\cup\mathrm{A}_{n+1}.$$

Επομένως $|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n\cup\mathrm{A}_{n+1}|=|(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n)\cup\mathrm{A}_{n+1}|=|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n|+|\mathrm{A}_{n+1}|-$ $-|(\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n)\cap\mathrm{A}_{n+1}|=|\mathrm{A}_1\cup\mathrm{A}_2\cup\cdots\cup\mathrm{A}_n|+|\mathrm{A}_{n+1}|-|(\mathrm{A}_1\cap\mathrm{A}_{n+1})\cup(\mathrm{A}_2\cap\mathrm{A}_{n+1})\cup\cdots\cup$

$$\cup(A_n \cap A_{n+1})| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \cdots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap$$
$$\cap\cdots\cap A_n| + |A_{n+1}| - \Big(\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n}|(A_{i_1}\cap A_{n+1})\cap(A_{i_2}\cap A_{n+1})| +$$
$$+ \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|(A_{i_1}\cap A_{n+1})\cap(A_{i_2}\cap A_{n+1})\cap(A_{i_3}\cap A_{n+1})| - \cdots +$$
$$+(-1)^{n-2}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\le n}|(A_{i_1}\cap A_{n+1})\cap(A_{i_2}\cap A_{n+1})\cap\cdots\cap(A_{i_{n-1}}\cap A_{n+1})| +$$
$$+(-1)^{n-1}|(A_1\cap A_{n+1})\cap(A_2\cap A_{n+1})\cap\cdots\cap(A_n\cap(A_{n+1})|\Big) = \sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \Big(\sum_{1\le i_1<i_2\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| +$$
$$+\sum_{i=1}^{n}|A_i\cap A_{n+1}|\Big) + \Big(\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{n+1}|\Big) - \cdots +$$
$$+(-1)^{n-1}\Big(|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| + \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}}\cap A_{n+1}|\Big) +$$
$$+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n\cap A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \sum_{1\le i_1<i_2\le n+1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| +$$
$$+\sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n+1}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| - \cdots + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap A_{n+1}|. \qquad \blacksquare$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.18. (Αρχή του Αποκλεισμού) Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ υποσύνολα ενός βασικού συνόλου Ω με $|\Omega| = N$. Τότε το πλήθος των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν σε κανένα από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ισούται με

$$N - \sum_{i=1}^{n}|A_i| + \sum_{1\le i_1<i_2\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}| - \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| + \cdots +$$
$$+(-1)^{n-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-1}\le n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_{n-1}}| + (-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \qquad \textbf{(2)}$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Άμεση, με βάση το γεγονός ότι το πλήθος των στοιχείων που δεν ανήκουν σε κανένα από τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ισούται με $N - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$. Το αποτέλεσμα προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον τύπο **(1)** του προηγούμενου θεωρήματος. ■

Η Συνδυαστική αποτελεί έναν από τους πιο συναρπαστικούς κλάδους των Μαθηματικών. Μια πολύ καλή εισαγωγή στον κλάδο (κατά τη γνώμη μου-τα γούστα είναι προσωπικά) αποτελεί το βιβλίο των **CHEN Chuan-Chong** και **KOH Khee-Meng *"PRINCIPLES and TECHNIQUES in COMBINATORICS"*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1992.**

Άλυτες Ασκήσεις

66. Σε μια φοιτητική συγκέντρωση μετέχουν 7 αγόρια και 3 κορίτσια. Κατά πόσους τρόπους όλα τα παιδιά μπορούν να στοιχηθούν σε μια γραμμή, αν

(i) Τα 3 κορίτσια μια συνεχή ομάδα (δεν παρεμβάλεται μεταξύ τους αγόρι);

(ii) Στην πρώτη και τελευταία θέση βρίσκονται αγόρια και δεν υπάρχουν δύο κορίτσια το ένα δίπλα στο άλλο;

67. Βρείτε το πλήθος των αρτίων ακεραίων ανάμεσα στο 20000 και 70000 των οποίων κανένα ψηφίο δεν εμφανίζεται παρά μόνον μία φορά.

68. Έστω S το σύνολο των θετικών ακεραίων των οποίων τα ψηφία ανήκουν στο σύνολο $\{1,3,5,7\}$ και κανένα ψηφίο δεν επαναλαμβάνεται.
(i) Βρείτε το πλήθος $|S|$ του συνόλου S.
(ii) Υπολογίστε το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n\in S} n$.

69. Κατά πόσους τρόπους μπορεί να συγκροτηθεί μια πενταμελής επιτροπή από ένα σύνολο 4 καθηγητών και 7 μαθητών, αν
(i) Δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στην επιλογή των ατόμων;
(ii) Η επιτροπή πρέπει να περιλαμβάνει ακριβώς 2 καθηγητές;
(iii) Η επιτροπή πρέπει να περιλαμβάνει τουλάχιστον 3 καθηγητές;
(iv) Ένας συγκεκριμένος καθηγητής και ένας συγκεκριμένος μαθητής δεν μπορούν να μετέχουν **και οι δύο** στην επιτροπή;

70. Έστω $X=\{1,2,3,\dots,n\}$, όπου n θετικός ακέραιος. Δείξτε ότι το πλήθος των συνδυασμών των n στοιχείων του X ανά r, οι οποίοι δεν περιέχουν διαδοχικούς αριθμούς ισούται με $\displaystyle\binom{n-r+1}{r}$, όπου $0\le r\le n-r+1$.

71. Δείξτε ότι το $(4n)!$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του $2^{3n}\cdot 3^n$.

72. Υπολογίστε απευθείας (χωρίς επαγωγή) τα αθροίσματα:
(i) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!$ και
(ii) $\frac{1}{(1+1)!}+\frac{2}{(2+1)!}+\frac{3}{(3+1)!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}$.

73. Έστω $S=\{1,2,3,\dots,n+1\}$, όπου $n\ge 2$ και $T=\{(x,y,z)\in S^3 \mid x<z \text{ και } y<z\}$. Δείξτε ότι $\sum_{k=1}^n k^2=|T|=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$.

74. Έστω r μη αρνητικός ακέραιος τέτοιος, ώστε $\dfrac{1}{\binom{9}{r}}-\dfrac{1}{\binom{10}{r}}=\dfrac{11}{6\binom{11}{r}}$. Υπολογίστε τον r.

75. **(i)** Βρείτε τον συντελεστή του x^{18} στο ανάπτυγμα του $(1+x^3+x^5+x^7)^{100}$.
(ii) Βρείτε τον συντελεστή του x^{29} στο ανάπτυγμα του $(1+x^5+x^7+x^9)^{1000}$.
(iii) Βρείτε τους συντελεστές των x^5 και x^8 στο ανάπτυγμα του $(1+x+x^2+\cdots+x^{10})^3$.

1.4 Λύσεις Ορισμένων Ασκήσεων του Κεφαλαίου 1

14. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\cdots+(2n-1)=2(1+2+3+\cdots+n)-n=$ $=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n=n(n+1)-n=n^2+n-n=n^2$. ■

15. Για $n=1$ έχουμε $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{4}-\frac{1}{2(1+1)(1+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{3}{12}-\frac{1}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, άρα ισχύει για $n=1$. Έστω ότι για κάποιο n ισχύει ότι $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. Τότε

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}=$$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{\cancel{(n+1)}(n+2)}\cdot\frac{\cancel{n+1}}{2(n+3)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$. ■

16. Για $n=1$ και τα δύο μέλη δίνουν $\frac{1}{24}$. Έστω ότι για κάποιον θετικό ακέραιο ισχύει ότι $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+$ $+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}$. Τότε $\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5}+\frac{3}{4\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)(n+4)}=$ $=\frac{n(n+1)}{4(n+2)(n+3)}+\frac{n+1}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\left(\frac{n}{4}+\frac{1}{n+4}\right)=\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{n^2+4n+4}{4(n+4)}=\frac{n+1}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{(n+2)^2}{4(n+4)}=$ $=\frac{(n+1)(n+2)}{4(n+3)(n+4)}$.

Ένας δεύτερος **ευρετικός τρόπος** είναι ο εξής: Ο γενικός όρος είναι της μορφής $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. Γράφουμε $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{\Gamma}{k+2}$, όπου A,B,Γ προσδιοριστέες σταθερές. Επομένως $1=A(k+1)(k+2)+Bk(k+2)+\Gamma k(k+1)=(A+B+\Gamma)k^2+(3A+2B+\Gamma)k+2A$. Η σχέση $1=(A+B+\Gamma)k^2+(3A+2B+\Gamma)k+2A$ αν τη δούμε σαν ισότητα πολυωνύμων ως προς k μας οδηγεί στο σύστημα

$$\begin{cases}A+B+\Gamma=0\\3A+2B+\Gamma=0\\2A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A+B+\Gamma=0\\3A+2B+\Gamma=0\\A=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+B+\Gamma=0\\\frac{1}{2}+2B+\Gamma=0\\A=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}+B+\Gamma=0\\1+B=0\\A=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Gamma=\frac{1}{2}\\B=-1\\A=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}\\
\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}\\
\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}}\\
\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}}\\
&\vdots\\
\frac{1}{(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-2}}-\cancel{\frac{1}{n-1}}+\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}\\
\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot(n+1)}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n-1}}-\cancel{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}\\
\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}&=\cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας κατά μέή και διαγράφοντας στα δεξιά τους όρους που δίνουν μηδέν, παίρνουμε $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=$ $=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. ■

17. Με επαγωγή είναι απλή. Ας δούμε έναν άλλο τρόπο. Έστω $S=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$. Τότε $2S=1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+3\cdot 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$. Άρα $-S=S-2S=2+(2\cdot 2^2-1\cdot 2^2)+$ $+(3\cdot 2^3-2\cdot 2^3)+(4\cdot 2^4-3\cdot 2^4)+\cdots+((n-1)\cdot 2^{n-1}-(n-2)\cdot 2^{n-1})+(n\cdot 2^n-(n-1)\cdot 2^n)-n\cdot 2^{n+1}=$ $=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=2\cdot(1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1})-n\cdot 2^{n+1}=2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}-n\cdot 2^{n+1}=$ $=2^{n+1}-2-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$. Άρα $S=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$. ■

19. Ή με επαγωγή ή χρησιμοποιώντας το τέχνασμα της διάσπασης σε απλά κλάσματα $\frac{1}{(\alpha+k)(\alpha+k+1)}=\frac{A}{\alpha+k}+$ $+\frac{B}{\alpha+k+1}$, όπως στην άσκηση **16** και δείτε μετά τις παραστάσεις ως πολυώνυμα του k. ■

22. Ή με επαγωγή (απλή) ή αλλιώς: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdots\frac{n^2-1}{n^2}=$ $=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\cdot\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\cdots\frac{((n-1)-1)((n-1)+1)}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=$ $=\frac{\cancel{3}}{2\cancel{^2}}\cdot\frac{\cancel{2\cdot 4}}{\cancel{3^2}}\cdot\frac{\cancel{3\cdot 5}}{\cancel{4^2}}\cdot\frac{\cancel{4\cdot 6}}{\cancel{5^2}}\cdots\frac{\cancel{(n-2)}\cdot\cancel{n}}{\cancel{(n-1)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n-1)}(n+1)}{n\cancel{^2}}=\frac{n+1}{2n}$. ■

23. Ή με επαγωγή (απλή) ή αλλιώς: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\cdots+$ $(n+1-1)\cdot n!=2!-1!+3!-2!+4!-3!+\cdots+(n+1)!-n!=2!+3!+4!+\cdots+(n+1)!-1!-2!-3!-\cdots-n!=$ $\cancel{2!+3!+4!+\cdots+n!}-\cancel{(2!+3!+4!+\cdots+n!)}+(n+1)!-1=(n+1)!-1$. ■

24. Με επαγωγή είναι εύκολη. Χωρίς επαγωγή: $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)\cdot2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\cdot2\cdot4\cdot6\cdots(2n)} =$
$= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)\cdot(2\cdot1)(\cdot2\cdot2)(\cdot2\cdot3)\cdots(2\cdot n)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdots(2n)} = \frac{2^n\cdot1\cdot2\cdot3\cdots n\cdot(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n)}{(2n)!} = \frac{2^n\cdot(2n)!}{(2n)!} = 2^n$.

25. Για $n=6$ παίρνουμε $6! = 720 > 216 = 6^3$. Έστω $n! > n^3$, για κάποιο $n \geq 6$. Τότε $(n+1)! > n^3(n+1)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $n^3(n+1) > (n+1)^3 \Leftrightarrow n^4+n^3 > n^3+3n^2+3n+1 \Leftrightarrow n^4 > 3n^2+3n+1$. Πράγματι, $n^4 \underset{n\geq6}{\geq} 6n^3$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $6n^3 > 3n^2+3n+1 \Leftrightarrow 3n^2(n-1)+3n(n^2-1) > 1 \underset{n\geq6}{\Leftrightarrow} 15n^2+105n > 1$, το οποίο προφανώς ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο n. ∎

26. Για $n=0$ έχουμε $\alpha^{2^0}+\beta^{2^0} = \alpha+\beta = 1 = \frac{1}{2^{2^0-1}}$. Για $n=1$ έχουμε $(\alpha+\beta)^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta = 1$. Επίσης $\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta\big(\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq0\big)$. Επομένως $2\alpha^2+2\beta^2+\cancel{2\alpha\beta} \geq 1+\cancel{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2 \geq \frac{1}{2}$, δηλαδή $\alpha^{2^1}+\beta^{2^1} \geq \frac{1}{2^{2^1-1}}$. Έστω $\alpha^{2^n}+\beta^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^n-1}}$. Τότε $\big(\alpha^{2^n}+\beta^{2^n}\big)^2 \geq \frac{1}{(2^{2^n-1})^2} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}} \Leftrightarrow \alpha^{2^{n+1}}+\beta^{2^{n+1}}+2\alpha^{2^n}\beta^{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}}$. Παρόμοια με προηγουμένως, $\alpha^{2^{n+1}}+\beta^{2^{n+1}} \geq 2\alpha^{2^n}\beta^{2^n}\big(\Leftrightarrow(\alpha^{2^n}-\beta^{2^n})\geq0\big)$. Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $2\alpha^{2^{n+1}}+2\beta^{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2^{2^{n+1}-2}} \Leftrightarrow \alpha^{2^{n+1}}+\beta^{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{2^{n+1}-2}} = \frac{1}{2^{2^{n+1}-1}}$. ∎

27. **α)** Για $n=4$ παίρνουμε $3^{4-1}=27$ και $4^2=16$. Επομένως η ανισότητα ισχύει για $n=4$. Έστω τώρα $3^{n-1} > n^2$, για κάποιο $n\geq4$. Τότε $3^n > 3\cdot n^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $3n^2 \geq (n+1)^2 = n^2+1+2n \Leftrightarrow 2n(n-1)\geq1$ και μάλιστα $2n(n-1)>1$, αφού $n\geq4>1$.
β) Γ ια $n=4$, $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 3^2 > 2^3 \Leftrightarrow 9>8$. Έστω $\sqrt[3]{3} > \sqrt[n]{n}$, για κάποιο $n\geq4$, δηλαδή $3^n > n^3$. Θα δείξουμε ότι $3^{n+1} > (n+1)^3$. Πράγματι, από τη σχέση $3^n > n^3$ παίρνουμε $3^{n+1} > 3n^3$. Αρκεί να δείξουμε ότι $3n^3 > (n+1)^3 \Leftrightarrow 3n^3 > n^3+3n^2+3n+1 \Leftrightarrow n^2(n-3)+n(n^2-3)-1>0$. Αλλά $n\geq4$, οπότε $n-3\geq1$ και $n^2-3\geq13$. Άρα $n^2(n-3)+n(n^2-3)-1 \geq n^2+13n-1>0$.
Μια άλλη λύση είναι να δείξουμε ότι για κάθε $n\geq3$ ισχύει $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1} \Leftrightarrow n^{n+1} > (n+1)^n$. Για $n=3$ έχουμε $3^4=81$ και $4^3=64$. Έστω ότι $n^{n+1} > (n+1)^n$, για κάποιο $n\geq4$. Τότε $(n+1)^{n+2} = \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}\cdot n^{n+1} >$
$> \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}\cdot(n+1)^n = \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1} > (n+2)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{n} > n+2$
$\Leftrightarrow (n+1)^2 > n(n+2) \Leftrightarrow n^2+2n+1 > n^2+2n \Leftrightarrow 1>0$. ∎

28. Για $n=2$ έχουμε $1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 15<16$. Έστω ότι για κάποιο $n\geq2$ ισχύει $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} < \frac{2n}{n+1}$. Τότε $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2} = \frac{2n(n+1)+1}{(n+1)^2} = \frac{2n^2+2n+1}{n^2+2n+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{2n^2+2n+1}{n^2+2n+1} < \frac{2(n+1)}{n+2} \Leftrightarrow 2n^3+6n^2+5n+2 < 2n^3+6n^2+6n+2 \Leftrightarrow n>0$. ∎

29. Για $n=2$ έχουμε $(2!)^3 = 8$ και $2^2\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{4} > 8$. Υποθέτουμε ότι $(n!)^3 < n^n\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$, για κάποιον θετικό ακέραιο $n\geq2$, δηλαδή $2^{2n} < \frac{n^n}{n!}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^2$. Τότε $2^{2(n+1)} = 2^{2n}\cdot4 < 4\cdot\frac{n^n}{n!}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$4\cdot\frac{n^n}{n!}\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right)^2 \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}\right)^2 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)^{2n}}{(n!)^2} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!(n+1)}\frac{(n+2)^{2n+2}}{(n!)^2(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4n^n(n+1)^{2n} \leq (n+1)^n\frac{(n+2)^{2n+2}}{(n+1)^2} \Leftrightarrow (2n+2)^2(n^2+n)^n \leq (n^2+4n+4)^n(n+2)^2 \Leftrightarrow \frac{4n^2+8n+4}{n^2+4n+4} \leq \left(\frac{n^2+4n+4}{n^2+n}\right)^n$.
Αλλά $\left(\frac{n^2+4n+4}{n^2+n}\right)^n = \left(1+\frac{3n+4}{n^2+n}\right)^n \underset{\substack{\text{ανισότητα}\\ \text{Bernoulli}}}{\geq} 1+\frac{3n+4}{n+1} = \frac{4n+5}{n+1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{4n^2+8n+4}{n^2+4n+4} \leq \frac{4n+5}{n+1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (n+1)(4n^2+8n+4) \leq (n^2+4n+4)(4n+5) \Leftrightarrow 4n^3+12n^2+12n+4 \leq 4n^3+21n^2+36n+20 \Leftrightarrow$$
$\Leftrightarrow 0 \leq 9n^2+24n+16$. ∎

31. Για $n=0$ έχουμε $11^2+12 = 121+12 = 133$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον μη αρνητικό ακέραιο n ο αριθμός $11^{n+2}+12^{2n+1}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 133, δηλαδή της μορφής $11^{n+2}+12^{2n+1} = 133\lambda$, όπου λ θετικός ακέραιος. Τότε $11^{(n+1)+2}+12^{2(n+1)+1} = 11\cdot11^{n+2}+12^2\cdot12^{2n+1} = 11\cdot11^{n+2}+144\cdot12^{2n+1} =$
$= 133\cdot12^{2n+1}+11\cdot\big(11^{n+2}+12^{2n+1}\big) = 133\cdot\big(12^{2n+1}+\lambda\big)$. ∎

32. Για $n=2$ έχουμε $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 = 1 = 2x+\frac{2\cdot1}{2}x^2$, ισχύει ως ισότητα.
Έστω ότι για κάποιον $n\geq2$ ισχύει $(1+x)^n \geq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$. Τότε $(1+x)^{n+1} \geq (1+x)\left(1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2\right) =$
$= 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x+nx^2+\frac{n(n-1)}{2}x^3 > 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+x+nx^2 = 1+(n+1)x+\frac{n^2-n+2n}{2}x^2 =$
$= 1+(n+1)x+\frac{(n+1)n}{2}x^2$. ∎

34. $\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n = \left(\frac{1+\alpha-\alpha}{1+\alpha}\right)^n = \left(1-\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^n \geq (1-\alpha)^n \underset{-\alpha>-\frac{1}{n}\geq -1}{\geq} 1-n\alpha \underset{0<\alpha<\frac{1}{n}}{>} 0$. Άρα $(1+\alpha)^n < \frac{1}{1-n\alpha}$. ■

35. $2(\sqrt{n+1}-1) = 2\cdot\frac{n+1-1}{\sqrt{n+1}+1} = \frac{2}{\sqrt{n+1}+1} < \frac{2}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n\geq 2}{\leq} 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.
Για τη δεύτερη ανισότητα ας καταφύγουμε στην επαγωγή. Για $n=2$ έχουμε $1+\frac{1}{\sqrt{2}} < 2\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow 2+\frac{1}{\sqrt{2}} <$ $< 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+1 < 4 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} < 3 \Leftrightarrow (2\sqrt{2})^2 < 9 \Leftrightarrow 8 < 9$.
Έστω ότι για κάποιον $n\geq 2$ ισχύει $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$. Τότε $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.
Αρκεί να δείξουμε ότι $2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1}-1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)}+1 < 2(n+1) \Leftrightarrow$ $2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1 \Leftrightarrow 4(n^2+n) < (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \Leftrightarrow 0 < 1$. ■

36. Για $n=1$ ισχύει ως ισότητα. Έστω $n=2$ και α_1,α_2 μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε έχουμε $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1+\alpha_1+\alpha_2} \leq \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2} \Leftrightarrow (\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \leq (1+\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_2)\alpha_1 + (1+\alpha_1+\alpha_2)(1+\alpha_1)\alpha_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha_1+\alpha_1^2+\alpha_2+\alpha_2^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^2 \leq \alpha_1+\alpha_1^2+\alpha_2+\alpha_2^2+4\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_1\alpha_2^2 \Leftrightarrow 0 \leq 2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_1\alpha_2^2$, η οποία προφανώς ισχύει. Έστω ότι η αποδεικτέα ισχύει για κάποιον $n\geq 2$. Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$ μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε έχουμε $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}{1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1}} = \frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\alpha_{n+1}}{1+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\alpha_{n+1}} \underset{\text{ισχύει για } n=2}{=}$ $= \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}+\frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}} \underset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{=} \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}+\frac{\alpha_{n+1}}{1+\alpha_{n+1}}$. Όχι και τόσο ωραία απόδειξη...
Για $n\geq 2$ προφανώς έχουμε $\frac{1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{1+\alpha_i} \geq 1$, για κάθε $i=1,\ldots,n$. Συνεπώς $\sum_{i=1}^n \alpha_i\cdot\frac{1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{1+\alpha_i} \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i$, απ' όπου $\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} \geq \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{1+\alpha_1+\cdots+\alpha_n}$. ■

37. Για $n=2$ έχουμε $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 1+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1\alpha_2 \underset{\alpha_1,\alpha_2>0}{>} 1+\alpha_1+\alpha_2$. Έστω $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n) >$ $1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$, για κάποιον $n\geq 2$. Τότε $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)(1+\alpha_{n+1}) > (1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+$ $\alpha_n)(1+\alpha_{n+1}) = 1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1}+\alpha_{n+1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n) > 1+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1}$. ■

38. Για $n=1$, $\alpha_1\cdot\frac{1}{\alpha_1} = 1 = 1^2$, ισχύει ως ισότητα. Έστω $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right) \geq n^2$. Τότε $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1})\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)+\alpha_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\right.$ $\left.\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)+\frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\alpha_{n+1}\frac{1}{\alpha_{n+1}} \geq n^2+\alpha_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)+\frac{1}{\alpha_{n+1}}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+1 =$ $n^2+\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1}+\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right)+\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right)+\cdots+\left(\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)+1 \geq n^2+2n+1 = (n+1)^2$, γιατί $x+\frac{1}{x}\geq 2$, για κάθε $x>0$. ■

39. Για $n=1$ ισχύει ως ισότητα. Υποθέτουμε ότι για κάθε $2n$ αριθμούς $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\ldots\leq\alpha_n$ και $\beta_1\leq\beta_2\leq\ldots\leq$ $\leq\beta_n$, ισχύει ότι $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n) \leq n\cdot(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)$. Θεωρούμε τώρα $2(n+1)$ αριθμούς $\alpha_1\leq\alpha_2\leq\ldots\leq\alpha_n\leq\alpha_{n+1}$ και $\beta_1\leq\beta_2\leq\ldots\leq\beta_n\leq\beta_{n+1}$. Τότε έχουμε:
$(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\alpha_{n+1})(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n+\beta_{n+1}) = (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+\alpha_{n+1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+$ $\beta_n)+\beta_{n+1}(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\alpha_{n+1}\beta_{n+1} \leq n(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n)+\alpha_{n+1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+\beta_{n+1}(\alpha_1+$ $\alpha_2+\cdots+\alpha_n)+\alpha_{n+1}\beta_{n+1} = (n+1)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+\alpha_{n+1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n)+\beta_{n+1}(\alpha_1+$ $\alpha_2+\cdots+\alpha_n)-n\cdot\alpha_{n+1}\beta_{n+1}-\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2-\cdots-\alpha_n\beta_n = (n+1)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+$ $\alpha_{n+1}((\beta_1-\beta_{n+1})+(\beta_2-\beta_{n+1})+\cdots+(\beta_n-\beta_{n+1}))+\alpha_1(\beta_{n+1}-\beta_1)+\alpha_2(\beta_{n+1}-\beta_2)+\cdots+\alpha_n(\beta_{n+1}-\beta_n) =$ $(n+1)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})+(\beta_{n+1}-\beta_1)(\alpha_1-\alpha_{n+1})+(\beta_{n+1}-\beta_2)(\alpha_2-\alpha_{n+1})+\cdots+$ $(\beta_{n+1}-\beta_n)(\alpha_n-\alpha_{n+1}) \leq (n+1)(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n+\alpha_{n+1}\beta_{n+1})$, γιατί $\beta_{n+1}\geq\beta_i$ και $\alpha_i\leq\alpha_{n+1}$, για κάθε $i=1,2,\ldots,n$. ■

40. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha\geq\beta$. Για $n=1$ ισχύει ως ισότητα. Έστω $\frac{\alpha^n+\beta^n}{2} \geq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^n$, για κάποιον θετικό ακέραιο n. Τότε $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^n+\beta^n}{2} = \frac{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}}{4}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\beta\alpha^n+\beta^{n+1}}{4} \leq \frac{\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}}{2} \Leftrightarrow 2\alpha^{n+1}+2\alpha\beta^n+2\beta\alpha^n+2\beta^{n+1} \leq 4\alpha^{n+1}+4\beta^{n+1} \Leftrightarrow \alpha\beta^n+\beta\alpha^n \leq$ $\leq \alpha^{n+1}+\beta^{n+1} \Leftrightarrow \alpha^n(\alpha-\beta)+\beta^n(\beta-\alpha)\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha^n-\beta^n)(\alpha-\beta)\geq 0$. ■

44. Έστω ότι η ανισότητα ισχύει για κάποιο $n>2$. Ας θεωρήσουμε τους θετικούς αριθμούς $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1}$. Μαζί με τον αριθμητικό τους μέσο $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}$ έχουμε n θετικούς αριθμούς. Εφόσον η ανισότητα ισχύει για n, θα έχουμε $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}+\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{n\alpha_1+n\alpha_2+\cdots+n\alpha_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}}.$$ ■

65. (i) Αν την ομάδα των κοριτσιών τη δούμε ως ένα άτομο, τότε παίρνουμε $8!$ τρόπους παράταξης. Αλλά τα 3 κορίτσια παρατάσσονται μεταξύ τους κατά $3! = 6$ τρόπους. Σύνολο: $6 \cdot 8!$.
(ii) Το πρόβλημα έχει να κάνει με το πώς θα τοποθετήσουμε 10 αντικείμενα σε μια σειρά ή αλλιώς σε 10 κελιά έτσι, ώστε αν σε ένα κελί τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο της κατηγορίας «Κ», τότε στα γειτονικά του πρέπει να τοποθετήσουμε αντικείμενα της κατηγορίας «Α». Αρχικώς βρίσκουμε τους δυνατά κελιά για να τοποθετήσουμε τα κορίτσια «Κ». Επειδή στο πρώτο κελί τοποθετούμε αγόρι απομένουν 9 κελιά. Επειδή αν σε κάποιο κελί τοποθετήσουμε κορίτσι, τότε στο αμέσως επόμενό του πρέπει να τοποθετήσουμε αγόρι «Α», μπορούμε να θεωρήσουμε τα ζεύγη «ΚΑ» ως ένα κελί από μόνο του. Με την ενοποίηση αυτή, η οποία καλύπτει και το τελευταίο κορίτσι αφού στο τελευταίο κελί τοποθετείται αγόρι έχουμε συνολικά $9 - 3 = 6$ δυνατά κελιά. Από αυτά επιλέγουμε 3 τα οποία θα περιέχουν τα ζεύγη «ΚΑ». Αυτό γίνεται κατά $\binom{6}{3}$ τρόπους. Από την στιγμή που έχουμε επιλέξει τα κελιά οι δυνατές θέσεις για τα 7 αγόρια είναι $7!$ και για τα κορίτσια $3!$. Τελικό σύνολο: $\binom{6}{3} \cdot 7! \cdot 3! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7! = 604800$. ■

66. Ο αριθμός είναι πενταψήφιος και το πρώτο ψηφίο μπορεί να πάρει τις τιμές $2, 3, 4, 5, 6$, ενώ το τελευταίο τις τιμές $0, 2, 4, 6, 8$.
Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 2, τότε διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν το τελευταίο είναι το 0, τότε έχουμε 8 εναπομείναντα ψηφία για τις τρεις ενδιάμεσες θέσεις. Το πλήθος των αριθμών που παίρνουμε είναι $8 \cdot 7 \cdot 6$. Αλλιώς, αν το τελευταίο ψηφίο δεν είναι το 0, δηλαδή κάποιο από τα $4, 6, 8$ (το 2 είναι το πρώτο ψηφίο), τότε έχουμε 3 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο. Απομένουν 8 ψηφία για τις τρεις ενδιάμεσες θέσεις. Τότε παίρνουμε $3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Συνολικά, αν το πρώτο ψηφίο είναι το 2, τότε παίρνουμε $8 \cdot 7 \cdot 6 + 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344$ αριθμούς.
Αν το πρώτο ψηφίο δεν είναι το 2, τότε διακρίνουμε πάλι περιπτώσεις. Αν το πρώτο ψηφίο είναι 4 ή 6, δηλαδή άρτιος, τότε το τελευταίο μπορεί να πάρει μόνον κάποια από τις υπόλοιπες τρεις άρτιες τιμές. Για το πρώτο και τελευταίο ψηφίο έχουμε συνολικά $2 \cdot 3$ περιπτώσεις. Τα τρία ενδιάμεσα ψηφία επιλέγονται από τα υπόλοιπα 8 κατά $8 \cdot 7 \cdot 6$ τρόπους. Σύνολο $2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2016$ αριθμοί. Αν το πρώτο ψηφίο είναι περιττός, δηλαδή κάποιο από τα 3 ή 5, τότε το τελευταίο ψηφίο μπορεί να πάρει οποιαδήποτε άρτια τιμή, δηλαδή $0, 2, 4, 6$ ή 8. Για το πρώτο και τελευταίο ψηφίο έχουμε συνολικά $2 \cdot 5$ περιπτώσεις. Τα τρία ενδιάμεσα ψηφία επιλέγονται από τα υπόλοιπα 8 κατά $8 \cdot 7 \cdot 6$ τρόπους. Σύνολο $2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3360$ αριθμοί. Τελικό σύνολο: $1344 + 2016 + 3360 = 6720$.

67. (i) Το πλήθος ισούται με $\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \Delta_4^4 = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4 + 12 + 2 \cdot 4! = 64$.
(ii) Έστω x ένα ψηφίο από τα $1, 3, 5, 7$. Το ψηφίο αυτό είναι ψηφίο μονάδων σε έναν μονοψήφιο αριθμό, σε Δ_1^3 διψήφιους, σε Δ_2^3 τριψήφιους και σε Δ_3^3 τετραψήφιους αριθμούς. Σύνολο: $1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3! = 16$.
Το x είναι ψηφίο δεκάδων σε Δ_1^3 διψήφιους, σε Δ_2^3 τριψήφιους και σε Δ_3^3 τετραψήφιους αριθμούς. Σύνολο: $3 + 3 \cdot 2 + 3! = 15$.
Το x είναι ψηφίο εκατοντάδων σε Δ_2^3 τριψήφιους και σε Δ_3^3 τετραψήφιους αριθμούς. Σύνολο: $3 \cdot 2 + 3! = 12$.
Το x είναι ψηφίο χιλιάδων σε $\Delta_3^3 = 6$ τετραψήφιους αριθμούς.
Επομένως το ψηφίο x συνεισφέρει κατά $1 \cdot 16 + 10 \cdot 15 + 100 \cdot 12 + 1000 \cdot 6 = 7366$ στο τελικό άθροισμα. Επειδή έχουμε τα ψηφία είναι τα $1, 3, 5, 7$ ψηφία, το ζητούμενο άθροισμα ισούται με $(1 + 3 + 5 + 7) \cdot 7366 = 16 \cdot 7366 = 117856$. ■

68. (i) $\binom{11}{5}$. **(ii)** $\binom{4}{2}\binom{7}{3}$. **(iii)** $\binom{4}{3}\binom{7}{2} + \binom{7}{1} = 4 \cdot \frac{7 \cdot 6}{2} + 7 = 91$. **(iv)** Έστω Α ο καθηγητής και Β ο μαθητής. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις: α) Ο Α παρών και ο Β απών, β) ο Α απών και ο Β παρών και γ) και ο Α και ο Β απόντες. Στην περίπτωση α) η πενταμελής επιτροπή μπορεί να συγκροτηθεί κατά $\binom{9}{4}$ τρόπους, στην περίπτωση β) κατά $\binom{9}{4}$ και τέλος στην περίπτωση γ) κατά $\binom{9}{5}$ τρόπους. Σύνολο: $2 \cdot \binom{9}{4} + \binom{9}{5}$. ■

69. Θεωρούμε έναν συνδυασμό των n στοιχείων $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά r. Αυτός αντιστοιχεί σ' ένα διάνυσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, όπου $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$. Από το διάνυσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ κατασκευάζουμε το διάνυσμα $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$, όπου $t_i = k_i - i + 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, r$. Παρατηρούμε ότι $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r \leq \leq n - r + 1$. Πράγματι, $t_{i+1} = k_{i+1} - i \geq k_i + 1 - i = t_i$ και ισότητα έχουμε αν και μόνον αν $k_{i+1} = k_i + 1$, δηλαδή οι k_i, k_{i+1} είναι διαδοχικοί. Το διάνυσμα $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ ορίζει έναν, ενδεχομένως επαναληπτικό, συνδυασμό $n - r + 1$ στοιχείων ανά r. Αντιστρόφως, αν $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_r \leq n - r + 1$, τότε θέτουμε $k_i = t_i + i - 1$ και παίρνουμε το διάνυσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ με $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_r \leq n$. Το διάνυσμα $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$

περιέχει δύο διαδοχικούς ακεραίους αν και μόνον αν το αντίστοιχο διάνυσμα $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ παριστάνει έναν γνήσια επαναληπτικό συνδυασμό. Πράγματι, $k_{i+1} = k_i + 1 \Leftrightarrow t_{i+1} + i = t_i + i - 1 + 1 \Leftrightarrow t_{i+1} = t_i$. Υπάρχει λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (1-1 και επί) $(k_1, k_2, \ldots, k_r) \longleftrightarrow (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ μεταξύ των συνδυασμών των αριθμών $\{1, 2, \ldots, n\}$ οι οποίοι περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους και των επαναληπτικών συνδυασμών $n - r + 1$ αριθμών $\{1, 2, \ldots, n - r + 1\}$ ανά r, οι οποίοι περιέχουν δύο τουλάχιστον στοιχεία που είναι ίσα. Ισοδύναμα, η παραπάνω αντιστοιχία $(k_1, k_2, \ldots, k_r) \longleftrightarrow (t_1, t_2, \ldots, t_r)$ επάγεται μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των συνδυασμών των $\{1, 2, \ldots, n\}$ ανά r που δεν περιέχουν δύο διαδοχικούς ακεραίους και των απλών (όχι επαναληπτικών) συνδυασμών των $\{1, 2, \ldots, n - r + 1\}$ ανά r. Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα. ■

70. $(4n)! = \underbrace{(4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3)}_{1^{\eta} \text{ ομάδα}} \cdot \underbrace{(4n-4)(4n-5)(4n-6)(4n-7)}_{2^{\eta} \text{ ομάδα}} \cdots \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n-\text{στή ομάδα}} = \binom{4n}{4}\binom{4n-4}{4} \cdots \binom{4}{4} \cdot$
$(4!)^n = \binom{4n}{\underbrace{4, 4, \ldots, 4}_{n \text{ φορές}}} \cdot 24^n$. Αλλά $24^n = (2^3 \cdot 3)^n = 2^{3n} \cdot 3^n$. ■

71. **(i)** Είναι η άσκηση **23**.
(ii) Έστω $T_n = \frac{1}{(1+1)!} + \frac{2}{(2+1)!} + \frac{3}{(3+1)!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} =$
$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$. ■

72. Για δεδομένο $z \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$ έχουμε $(z-1)^2$ επιλογές για τα ζεύγη (x, y). Επομένως $|T| = \sum_{z=2}^{n+1}(z-1)^2 = \underset{k=z-1}{=} \sum_{k=1}^{n} k^2$. Μπορούμε να μετρήσουμε το σύνολο T και διαφορετικά. Η πρώτη περίπτωση είναι να έχουμε $x = y = \lambda < z$. Οι διαφορετικοί αριθμοί $\lambda < z \leq n+1$ καθορίζουν μονοσημάντως την τριάδα (λ, λ, z). Τέτοια ζεύγη υπάρχουν $\binom{n+1}{2}$ το πλήθος. Τέλος, αν τρεις αριθμοί $1 \leq \kappa < \lambda < \mu \leq n+1$ είναι διαφορετικοί, τότε ο μεγαλύτερος, ο μ θα είναι αναγκαστικά ο z. Από κάθε τρεις διαφορετικούς αριθμούς παίρνουμε έναν τον μεγαλύτερο ως z και για τους άλλους δύο δεν υπάρχει περιορισμός. Έτσι, αν $1 \leq \kappa < \lambda < \mu \leq n+1$, τότε $z = \mu$ και οι δυνατές τριάδες είναι δύο: (κ, λ, μ) και (λ, κ, μ). Επειδή το πλήθος των υποσυνόλων του $\{1, 2, 3, \ldots, n+1\}$ που περιέχουν τρία στοιχεία είναι $\binom{n+1}{3}$ το πλήθος, παίρνουμε κατ' αυτόν τον τρόπο $2 \cdot \binom{n+1}{3}$ τριάδες του T. Σύνολο: $|T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$. ■

73. $\frac{1}{\binom{9}{r}} - \frac{1}{\binom{10}{r}} = \frac{11}{6\binom{11}{r}} \Leftrightarrow \frac{r!(9-r)!}{9!} - \frac{r!(10-r)!}{10!} = \frac{11 \cdot r!(11-r)!}{6 \cdot 11!} \Leftrightarrow \frac{(9-r)!}{9!} - \frac{(10-r)!}{9! \cdot 10} = \frac{(11-r)!}{6 \cdot 9! \cdot 10} \Leftrightarrow (9-r)! - \frac{(10-r) \cdot (9-r)!}{10} =$
$= \frac{(11-r) \cdot (10-r) \cdot (9-r)!}{6 \cdot 10} \Leftrightarrow 1 - \frac{10-r}{10} = \frac{(11-r)(10-r)}{60} \Leftrightarrow 60 - 60 + 6r = 110 - 21r + r^2 \Leftrightarrow r^2 - 27r + 110 = 0 \Leftrightarrow r =$
$= \frac{27 \pm 17}{2} = \begin{cases} 22 \\ \text{ή} \\ 5 \end{cases}$ και επειδή $r \leq 9$ έπεται ότι $r = 5$. ■

74. **(i)** Παρατηρούμε ότι το 18 μπορεί να γραφεί ως εξής: $18 = \underbrace{3+3+3+3+3+3}_{6 \text{ τριάρια}} = \underbrace{3+3}_{2 \text{ τριάρια}} + \underbrace{5}_{\text{ένα πεντάρι}} +$
$+ \underbrace{7}_{\text{ένα επτάρι}} = \underbrace{3}_{\text{ένα τριάρι}} + \underbrace{5+5+5}_{3 \text{ πεντάρια}}$. Επομένως ο συντελεστής του x^{18} ισούται με $\binom{100}{6} + \binom{100}{2,1,1,96} + \binom{100}{1,3,96} =$
$= \frac{100!}{6!94!} + \frac{100!}{2 \cdot 96!} + \frac{100!}{3! \cdot 96!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96 \cdot 95}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + 50 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 + 50 \cdot 33 \cdot 98 \cdot 97 = 10 \cdot 33 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 4 \cdot 95 + 47054700 + 15684900 =$
$= 1192052400 + 47054700 + 15684900 = 1254792000$.

(ii) Παρατηρούμε ότι το 29 μπορεί να γραφεί ως εξής: Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι μπορεί να υπάρχει μόνο ένα εννιάρι. $29 = 5 + 5 + 5 + 5 + 9$. Αν δεν υπάρχει εννιάρι, τότε η μοναδική επιλογή που έχουμε είναι $29 = 5 + 5 + 5 + 7 + 7$. Δυνατές περιπτώσεις: $\binom{1000}{4,1,995} + \binom{1000}{3,2,995} = \frac{1000!}{4! \cdot 1! \cdot 995!} + \frac{1000!}{3! \cdot 2! \cdot 995!} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996}{24} +$
$+ \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 997 \cdot 996}{12} = 123754368753000$.

(iii) Παρατηρούμε ότι το 5 μπορεί να γραφεί ως εξής: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1 =$
$3 + 2 = 4 + 1 = 5$. Δυνατές περιπτώσεις: $\binom{10}{5} + \binom{10}{1,3,6} + \binom{10}{2,1,7} + \binom{10}{1,2,7} + \binom{10}{1,1,8} + \binom{10}{1,1,8} + \binom{10}{1} = 2002$. ■

Κεφάλαιο 2

Οι Μιγαδικοί Αριθμοί

2.1 Μη «Αυστηρή» Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Είναι γνωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση
$$x^2 \geq 0,$$
δηλαδή δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός x, τέτοιος ώστε $x^2 < 0$. Ειδικότερα, δεν υπάρχει πραγματικός x με την ιδιότητα
$$x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0.$$
Επινοούμε ένα νέο σύμβολο $\mathbf{i}$ με την ιδιότητα
$$\mathbf{i}^2 = -1.$$
Το σύμβολο $\mathbf{i}$ θα το ονομάζουμε **φανταστική μονάδα**.
Αν και αυτό εκ πρώτης όψεως ομοιάζει ολίγον «παράλογον» και χωρίς πρακτική αξία, εντούτοις θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια ότι έχει τεράστιες εφαρμογές.
Προς το παρόν ας αναβάλλουμε τον αυστηρό ορισμό αυτής της νέας έννοιας και ας δούμε τι συνέπειες μπορεί να έχει η ύπαρξή της. Είναι λογικό $\big($αν δεχτούμε την ύπαρξη του $\mathbf{i}\big)$ να θεωρήσουμε τους αριθμούς $2\mathbf{i}$, $3\mathbf{i}$, $-\mathbf{i}$, $\sqrt{2}\mathbf{i}$, $-\sqrt{7}\mathbf{i}$ κτλ. Αν υψώσουμε τους αριθμούς αυτούς στο τετράγωνο θα πάρουμε αντίστοιχα $(2\mathbf{i})^2 = 4\mathbf{i}^2 = -4 < 0$, $(3\mathbf{i})^2 = 9\mathbf{i}^2 = -9 < 0$, $(-\mathbf{i})^2 = \mathbf{i}^2 = -1 < 0$, $(\sqrt{2}\mathbf{i})^2 = (\sqrt{2})^2\mathbf{i}^2 = -2 < 0$, $(-\sqrt{7}\mathbf{i})^2 = (-\sqrt{7})^2\mathbf{i}^2 = -7 < 0$ κτλ.
Είναι επίσης λογικό να δεχτούμε ότι $0 \cdot \mathbf{i} = 0$.
Το σύνολο $\mathbb{I} = \{\boldsymbol{\alpha}\mathbf{i} \mid \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}\}$ ονομάζεται **σύνολο των φανταστικών αριθμών**. Ειδικότερα ένας φανταστικός αριθμός $\alpha\mathbf{i}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ λέγεται **γνήσιος φανταστικός** αν $\alpha \neq 0$.
Αν τώρα $\beta < 0$ ένας αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε $|\beta| = -\beta \Leftrightarrow \beta = -|\beta| = \mathbf{i}^2(\sqrt{|\beta|})^2 = (\mathbf{i}\sqrt{|\beta|})^2$, αλλά και $(-\mathbf{i}\sqrt{|\beta|})^2 = \beta$. Με άλλα λόγια, κάθε αρνητικός πραγματικός είναι το τετράγωνο ενός γνήσιου φανταστικού αριθμού.
Στη συνέχεια «παντρεύουμε» το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ με το σύνολο $\mathbb{I}$ των φανταστικών. «Τέκνα του γάμου» αυτού είναι τα στοιχεία του συνόλου
$$\mathbb{C} = \{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\mathbf{i} \mid \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}\},$$
τα οποία λέγονται **μιγαδικοί αριθμοί**[1]. Ο διεθνής όρος είναι **σύνθετοι αριθμοί** (**complex numbers**).
Για παράδειγμα, οι αριθμοί $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0\mathbf{i}$, $-\dfrac{3}{2}\mathbf{i} = 0 + \Big(-\dfrac{3}{2}\Big)\mathbf{i}$, $2 - 3\mathbf{i} = 2 + (-3)\mathbf{i}$, $\mathbf{i} = 0 + 1 \cdot \mathbf{i}$ κτλ είναι μιγαδικοί αριθμοί. Έτσι το $\mathbb{R}$ θεωρείται υποσύνολο $\big($ακριβέστερα **υπόσωμα**$\big)$ του $\mathbb{C}$ και το $\mathbb{C}$ **επέκταση** του $\mathbb{R}$.
Αν $z = \alpha + \beta\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε ο $\boldsymbol{\alpha}$ **λέγεται το πραγματικό μέρος του** $\boldsymbol{z}$ **και συμβολίζεται**

[1] Παλαιότερα στα σχολικά εγχειρίδια τους ονόμαζαν «μιγάδες».

με $\mathbf{Re}(z)$ και ο **β λέγεται το φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $\mathbf{Im}(z)$**. Επομένως

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i},$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$. **Αν $\mathbf{Im}(z) \neq 0$, τότε ο z λέγεται καθαρός μιγαδικός αριθμός**.
Αν $\alpha + \beta\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $\alpha + \beta\mathbf{i} = 0$ αν και μόνον αν $\alpha = \beta = 0$. Πράγματι, $\alpha + \beta\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta\mathbf{i} \Rightarrow 0 \leq \alpha^2 = (-\beta\mathbf{i})^2 = (-1)^2\mathbf{i}^2\beta^2 = -\beta^2 \leq 0$. Επομένως $\alpha = \beta = 0$. Το αντίστροφο είναι προφανές. Ισχύει λοιπόν

$$\boxed{z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0}$$

Από αυτό προκύπτει ότι αν $z_1 = \alpha + \beta\mathbf{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\mathbf{i}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, τότε $z_1 = z_2$ αν και μόνον αν $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Πράγματι, $z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \gamma + (\beta - \delta)\mathbf{i} = 0$ και από το προηγούμενο προκύπτει ότι $\alpha = \gamma$ και $\beta = \delta$. Ισχύει λοιπόν

$$\boxed{z_1 = z_2 \Leftrightarrow \big(\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) \text{ και } \mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)\big)}.$$

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού επεκτείνονται από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{C}$, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\mathbf{i}^2 = -1$. Απ' αυτό προκύπτει ότι $\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}$. Πράγματι, $(-\mathbf{i})\mathbf{i} = -\mathbf{i}^2 = -(-1) = 1$.

Πρόσθεση: $\boldsymbol{(\alpha + \beta\mathbf{i}) + (\gamma + \delta\mathbf{i}) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)\mathbf{i}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad (1).}$
Πολλαπλασιασμός: $\boldsymbol{(\alpha + \beta\mathbf{i})(\gamma + \delta\mathbf{i}) = (\alpha\gamma + \beta\delta\mathbf{i}^2) + (\alpha\delta + \gamma\beta)\mathbf{i} =} \quad (\mathbf{i}^2 = -1)$
$\boldsymbol{= (\alpha\gamma - \beta\delta) + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathbf{i}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \quad (2).}$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.1. Βασικές ιδιότητες: (Εδώ οι εμφανιζόμενοι $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ είναι πραγματικοί αριθμοί).

1. Προσεταιριστικότητα της πρόσθεσης
$(\alpha+\beta\mathbf{i})+\big((\gamma+\delta\mathbf{i})+(\varepsilon+\zeta\mathbf{i})\big) = (\alpha+\beta\mathbf{i})+\big((\gamma+\varepsilon)+(\delta+\zeta)\mathbf{i}\big) = (\alpha+(\gamma+\varepsilon))+(\beta+(\delta+\zeta))\mathbf{i} =$
$= ((\alpha+\gamma)+\varepsilon)+((\beta+\delta)+\zeta)\mathbf{i} = ((\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)\mathbf{i})+(\varepsilon+\zeta\mathbf{i}) = ((\alpha+\beta\mathbf{i})+(\gamma+\delta\mathbf{i}))+(\varepsilon+\zeta\mathbf{i})$.

2. Μεταθετικότητα της πρόσθεσης
$(\alpha + \beta\mathbf{i}) + (\gamma + \delta\mathbf{i}) = (\alpha + \gamma) + (\beta + \delta)\mathbf{i} = (\gamma + \alpha) + (\delta + \beta)\mathbf{i} = (\gamma + \delta\mathbf{i}) + (\alpha + \beta\mathbf{i})$.

3. Ύπαρξη μηδενικού στοιχείου
$(\alpha + \beta\mathbf{i}) + 0 = (\alpha + \beta\mathbf{i}) + (0 + 0\mathbf{i}) = \alpha + \beta\mathbf{i}$.

4. Ύπαρξη αντίθετου στοιχείου
$(\alpha + \beta\mathbf{i}) + \big((-\alpha) + (-\beta)\mathbf{i}\big) = (\alpha - \alpha) + (\beta - \beta)\mathbf{i} = 0 + 0\mathbf{i} = 0$. Ο μιγαδικός $(-\alpha) + (-\beta)\mathbf{i}$ γράφεται ως $-(\alpha + \beta\mathbf{i})$ ή και ως $-\alpha - \beta\mathbf{i}$.

5. Προσεταιριστικότητα του πολλαπλασιασμού
$(\alpha + \beta\mathbf{i})\big((\gamma + \delta\mathbf{i})(\varepsilon + \zeta\mathbf{i})\big) = (\alpha + \beta\mathbf{i})\big(\gamma\varepsilon - \delta\zeta + (\gamma\zeta + \delta\varepsilon)\mathbf{i}\big) = \alpha(\gamma\varepsilon - \delta\zeta) - \beta(\gamma\zeta + \delta\varepsilon)+$
$+\big(\alpha(\gamma\zeta + \delta\varepsilon) + \beta(\gamma\varepsilon - \delta\zeta)\big)\mathbf{i} = (\alpha\gamma\varepsilon - \alpha\delta\zeta - \beta\gamma\zeta - \beta\delta\varepsilon) + (\alpha\gamma\zeta + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon - \beta\delta\zeta)\mathbf{i}$ και
$\big((\alpha + \beta\mathbf{i})(\gamma + \delta\mathbf{i})\big)(\varepsilon + \zeta\mathbf{i}) = \big(\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathbf{i}\big)(\varepsilon + \zeta\mathbf{i}) = (\alpha\gamma - \beta\delta)\varepsilon - (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta+$
$+\big((\alpha\gamma - \beta\delta)\zeta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\varepsilon\big)\mathbf{i} = (\alpha\gamma\varepsilon - \beta\delta\varepsilon - \alpha\delta\zeta - \beta\gamma\zeta) + (\alpha\gamma\zeta - \beta\delta\zeta + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\varepsilon)\mathbf{i}$, δηλαδή το ίδιο αποτέλεσμα.

6. Μεταθετικότητα του πολλαπλασιασμού
$(\alpha + \beta\mathbf{i})(\gamma + \delta\mathbf{i}) = \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathbf{i}$ και $(\gamma + \delta\mathbf{i})(\alpha + \beta\mathbf{i}) = \gamma\alpha - \delta\beta + (\gamma\beta + \delta\alpha)\mathbf{i}$ που συμπίπτει με το προηγούμενο.

7. Ύπαρξη μοναδιαίου στοιχείου
$1 \cdot (\alpha + \beta\mathbf{i}) = (1 + 0\mathbf{i})(\alpha + \beta\mathbf{i}) = 1 \cdot \alpha - 0 \cdot \beta + (1 \cdot \beta + 0 \cdot \alpha)\mathbf{i} = \alpha + \beta\mathbf{i}$.

8. Ύπαρξη αντιστρόφου στοιχείου
Ας ξεκινήσουμε με μια σημαντική παρατήρηση. Είναι γεγονός ότι στο $\mathbb{R}$ το άθροισμα δύο τετραγώνων δεν παραγοντοποιείται. Δεν συμβαίνει το ίδιο και στο $\mathbb{C}$. Πράγματι, αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $(\alpha+\beta\mathbf{i})(\alpha-\beta\mathbf{i}) = \alpha^2-\beta(-\beta)+(\alpha(-\beta)+\beta\alpha)\mathbf{i} = \alpha^2+\beta^2+(-\alpha\beta+\beta\alpha)\mathbf{i} = \alpha^2+\beta^2+0\mathbf{i} = \alpha^2+\beta^2$.

Όπως είδαμε προηγουμένως, ο μιγαδικός $\alpha+\beta\mathbf{i}$ δεν είναι μηδέν αν και μόνον αν κάποιος από τους α,β δεν είναι μηδέν $\big($στο $\mathbb{R}\big)$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\alpha^2+\beta^2>0$. Για να βρούμε λοιπόν τον αντίστροφο του $\alpha+\beta\mathbf{i}$ έχουμε $\dfrac{1}{\alpha+\beta\mathbf{i}}=\dfrac{\alpha-\beta\mathbf{i}}{(\alpha+\beta\mathbf{i})(\alpha-\beta\mathbf{i})}$. Όπως είδαμε, ο παρονομαστής ισούται με $\alpha^2+\beta^2$. Άρα $\dfrac{1}{\alpha+\beta\mathbf{i}}=\dfrac{\alpha-\beta\mathbf{i}}{\alpha^2+\beta^2}==\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathbf{i}$.

Πράγματι, $(\alpha+\beta\mathbf{i})\cdot\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathbf{i}\Big)=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}-\beta\Big(-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)+\Big(\alpha\Big(-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)+$ $+\beta\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\mathbf{i}=\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}+\Big(-\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}+\dfrac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\Big)\mathbf{i}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}+0\mathbf{i}=1.$

Επομένως όντως $(\alpha+\beta\mathbf{i})^{-1}=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\dfrac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\mathbf{i}$.

9. Επιμεριστικότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\in\mathbb{R}$. Τότε ισχύει ότι

$$(\alpha+\beta\mathbf{i})\big((\gamma+\delta\mathbf{i})+(\varepsilon+\zeta\mathbf{i})\big)=(\alpha+\beta\mathbf{i})(\gamma+\delta\mathbf{i})+(\alpha+\beta\mathbf{i})(\varepsilon+\zeta\mathbf{i})$$

$(\alpha+\beta\mathbf{i})\big((\gamma+\delta\mathbf{i})+(\varepsilon+\zeta\mathbf{i})\big)=(\alpha+\beta\mathbf{i})\big(\gamma+\varepsilon+(\delta+\zeta)\mathbf{i}\big)=\alpha(\gamma+\varepsilon)-\beta(\delta+\zeta)+\big(\alpha(\delta+\zeta)+\beta(\gamma+\varepsilon)\mathbf{i}\big)=$
$=\alpha\gamma+\alpha\varepsilon-\beta\delta-\beta\zeta+(\alpha\delta+\alpha\zeta+\beta\gamma+\beta\varepsilon)\mathbf{i}=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\mathbf{i}+\alpha\varepsilon-\beta\zeta+(\alpha\zeta+\beta\varepsilon)\mathbf{i}=$
$=(\alpha+\beta\mathbf{i})(\gamma+\delta\mathbf{i})+(\alpha+\beta\mathbf{i})(\varepsilon+\zeta\mathbf{i}).$ ■

Οι παραπάνω εννέα ιδιότητες χαρακτηρίζουν το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμώς ως ένα $\big($**αλγεβρικό**$\big)$ **σώμα**.

Στα παλαιότερα σχολικά βιβλία εχρησιμοποιείτο ο συμβολισμός $\mathbf{i}=\sqrt{-1}$. Έτσι, όταν στην **α΄ λυκείου** μαθαίναμε να λύνουμε δευτεροβάθμιες εξισώσεις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με ρίζες μιγαδικούς, αλλά συντελεστές πραγματικούς, γράφαμε κατευθείαν $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ $\Big($και όχι $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όπου $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ κτλ$\Big)$. Για παράδειγμα, αν είχαμε να λύσουμε την εξίσωση $3x^2-5x+9=0$, γράφαμε $x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot3\cdot9}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-108}}{6}=\dfrac{5\pm\sqrt{-83}}{6}=$ $=\dfrac{5\pm\mathbf{i}\sqrt{83}}{6}$.

Τότε κυκλοφορούσε και ο ακόλουθος γρίφος: $\mathbf{i}=\sqrt{-1}=\sqrt{\dfrac{1}{-1}}=\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}=\dfrac{1}{\mathbf{i}}$. Επομένως $\mathbf{i}^2=1\Leftrightarrow-1=1\big(!\big)$ Το λάθος οφείλεται στο γεγονός ότι το σύμβολο $\sqrt{\alpha}$ ορίζεται μόνον για μη αρνητικούς πραγματικούς α και αν για δύο απ' αυτούς, $\alpha,\beta\geq0$, με φυσικά $\beta>0$, αποδεικνύεται η σχέση $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. Όχι για αρνητικούς. Βέβαια στην Άλγεβρα χρησιμοποιούμε καμιά φορά $\big($με προσοχή$\big)$ και σύμβολα, όπως $\sqrt{-5}$, όταν φυσικά η αλγεβρική κατασκευή $\big($δακτύλιος, κτλ$\big)$, αν περιέχει π.χ. το $\mathbf{i}\sqrt{5}$, τότε θα περιέχει και το $-\mathbf{i}\sqrt{5}$. Εμείς όμως εδώ θα αποφύγουμε να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο της ρίζας για αρνητικούς αριθμούς.

Τετραγωνική ρίζα μιγαδικού: Έστω $\alpha+\beta\mathbf{i}\in\mathbb{C}$ $\big(\alpha,\beta\in\mathbb{R}\big)$. Αναζητούμε $x,y\in\mathbb{R}$, τέτοιους ώστε $(x+y\mathbf{i})^2=\alpha+\beta\mathbf{i}$. Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με τη σχέση $x^2-y^2+2xy\mathbf{i}=\alpha+\beta\mathbf{i}$, δηλαδή

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha & \mathbf{(1)} \\ 2xy = \beta & \mathbf{(2)} \end{cases}$$

Υψώνουμε και τις δύο σχέσεις $\mathbf{(1)}$ και $\mathbf{(2)}$ στο τετράγωνο και παίρνουμε

$$\begin{cases} x^4 + y^4 - 2x^2y^2 = \alpha^2 & \mathbf{(3)} \\ 4x^2y^2 = \beta^2 & \mathbf{(4)} \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις σχέσεις $\mathbf{(3)}$ και $\mathbf{(4)}$ κατά μέλη και παίρνουμε $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = \alpha^2 + \beta^2 \underset{x^2+y^2 \geq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ $\mathbf{(5)}$. Οι σχέσεις $\mathbf{(1)}$ και $\mathbf{(5)}$ μας δίνουν το σύστημα

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \alpha \\ x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

με λύσεις $x^2 = \frac{1}{2}\big(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha\big)$ και $y^2 = \frac{1}{2}\big(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha\big)$ και άρα $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha}$ και $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}$. Η επιλογή των προσήμων γίνεται με βάση τη σχέση $\mathbf{(2)}$. Αν λοιπόν $\beta \geq 0$ παίρνουμε τις λύσεις $x + y\mathbf{i} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha} + \mathbf{i}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}\Big)$, ενώ αν $\beta < 0$, τότε παίρνουμε τις λύσεις $x + y\mathbf{i} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha} - \mathbf{i}\sqrt{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}\right)$.

Μπορεί κανείς να επαληθεύσει, με πράξεις, ότι οι μιγαδικοί αυτοί αριθμοί, στις αντίστοιχες περιπτώσεις, αν υψωθούν στο τετράγωνο μας δίνουν τον $\alpha + \beta\mathbf{i}$.

Δεν χρειάζεται να αποστηθίσετε τους τύπους αυτούς. Απλώς εφαρμόστε την παραπάνω διαδικασία σε κάθε πρόβλημα εύρεσης τετραγωνικής ρίζας μιγαδικού.

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες του $-21 - 20\mathbf{i}$. Έχουμε $(-21)^2 + (-20)^2 = 441 + 400 = 841 = 29^2$. Επομένως $\sqrt{\sqrt{(-21)^2 + (-20)^2} - 21} =$ $= \sqrt{29 - 21} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και $\sqrt{\sqrt{(-21)^2 + (-20)^2} - (-21)} = \sqrt{29 + 21} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Επειδή $-20 < 0$, παίρνουμε ως τετραγωνικές ρίζες τους μιγαδικούς $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\big(2\sqrt{2} - 5\mathbf{i}\sqrt{2}\big) = 2 - 5\mathbf{i}$ και τον αντίθετο αυτού $-2 + 5\mathbf{i}$.

Αν δεν θυμόμασταν τους τύπους αυτούς θα κάναμε το εξής: Έστω $(x + y\mathbf{i})^2 = -21 - 20\mathbf{i} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xy\mathbf{i} = -21 - 20\mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ 2xy = -20 \end{cases}$. Άρα $(x^2 - y^2)^2 = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 =$ $= (-21)^2 = 441$ και $4x^2y^2 = (-20)^2 = 400$. Επομένως $(x^2 + y^2)^2 = 441 + 400 = 841$ και επειδή $x^2 + y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 = \sqrt{841} = 29$. Παίρνουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2 - y^2 = -21 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$ απ' όπου $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$ και $y^2 = 25 \Leftrightarrow y = \pm 5$. Επειδή, $2xy = -20 < 0$ οι x και y είναι ετερόσημοι. Άρα ή $x = 2$ και $y = -5$ που μας δίνει τον μιγαδικό $2 - 5\mathbf{i}$ ή $x = -2$ και $y = 5$ που μας δίνει τον αντίθετό του $-2 + 5\mathbf{i}$.

Έτσι μπορούμε να λύνουμε στο $\mathbb{C}$ δευτεροβάθμιες εξισώσεις με μιγαδικούς συντελεστές. Η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή που ακολουθούμε στους πραγματικούς.

Έστω λοιπόν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ και $\alpha \neq 0$. Τότε έχουμε: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\Big(x^2 + 2 \cdot \dfrac{\beta}{2\alpha} + \dfrac{\beta^2}{4\alpha^2} - \dfrac{\beta^2}{4\alpha^2} + \dfrac{\gamma}{\alpha}\Big) = \alpha\bigg(\Big(x + \dfrac{\beta}{2\alpha}\Big)^2 - \dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\bigg)$. Αν $w, -w \in \mathbb{C}$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες της μιγαδικής διακρίνουσας $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε $\alpha x^2 + \beta x + \gamma =$

$$= \alpha\Big(\Big(x+\frac{\beta}{2\alpha}\Big)^2-\Big(\frac{w}{2\alpha}\Big)^2\Big) = \alpha\Big(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{w}{2\alpha}\Big)\Big(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{w}{2\alpha}\Big) = \alpha\Big(x-\frac{-\beta+w}{2\alpha}\Big)\Big(x-\frac{-\beta-w}{2\alpha}\Big).$$

Επομένως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-\beta+w}{2\alpha}$ ή $x=\dfrac{-\beta-w}{2\alpha}$.

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

76. **(i)** Δείξτε ότι $\mathrm{Re}(\mathbf{i}z)=-\mathrm{Im}(z)$ και $\mathrm{Im}(\mathbf{i}z)=\mathrm{Re}(z)$.
(ii) Δείξτε ότι $\mathrm{Re}(-\mathbf{i}z)=\mathrm{Im}(z)$ και $\mathrm{Im}(-\mathbf{i}z)=-\mathrm{Re}(z)$.
Απόδειξη: **(i)** Έστω $z=\alpha+\beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Τότε $\mathbf{i}z=\alpha\mathbf{i}+\mathbf{i}^2\beta=-\beta+\mathbf{i}\alpha$. Επομένως $\mathrm{Re}(\mathbf{i}z)=-\beta=-\mathrm{Im}(z)$ και $\mathrm{Im}(\mathbf{i}z)=\alpha=\mathrm{Re}(z)$.
(ii) $-\mathbf{i}z=-\alpha\mathbf{i}+(-\mathbf{i}^2)\beta=\beta-\mathbf{i}\alpha$. Επομένως $\mathrm{Re}(-\mathbf{i}z)=\beta=\mathrm{Im}(z)$ και $\mathrm{Im}(\mathbf{i}z)=-\alpha=-\mathrm{Re}(z)$. ∎

77. Προσδιορίστε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει $(3\alpha+14\beta)+(2\alpha-\beta)\mathbf{i}=7-\mathbf{i}$.
Λύση: Πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις $\begin{cases}3\alpha+14\beta=7\\ 2\alpha-\beta=-1\end{cases}$ Λύνουμε το σύστημα και παίρνουμε $\alpha=\dfrac{\begin{vmatrix}7 & 14\\ -1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 14\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\dfrac{-7+14}{-3-28}=-\dfrac{7}{31}$ και $\beta=\dfrac{\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & -1\end{vmatrix}}{-31}=\dfrac{17}{31}$. ∎

78. Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{1}{\gamma}$, τότε δείξτε ότι

$$2(\alpha+\beta)+(\beta-\alpha)\gamma\mathbf{i}=5\alpha+\mathbf{i}.$$

Απόδειξη: Έστω $\lambda=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\beta}{3}=\dfrac{1}{\gamma}$. Σπό τις ιδιότητες των αναλογιών παίρνουμε ότι $\lambda=\dfrac{\alpha+\beta}{5}=$ $=\dfrac{\beta-\alpha}{1}=\beta-\alpha=\dfrac{1}{\gamma}$. Επομένως $(\beta-\alpha)\gamma=1$ και $\alpha+\beta=5(\beta-\alpha)\Leftrightarrow\beta=\dfrac{3}{2}\cdot\alpha$. Επομένως $\alpha+\beta=\alpha+\dfrac{3}{2}\cdot\alpha=\dfrac{5\alpha}{2}\Rightarrow 2(\alpha+\beta)=5\alpha$. ∎

79. **(i)** Να βρεθεί το $\mathbf{i}^n$ για τις διάφορες τιμές του μη αρνητικού ακεραίου n.
(ii) Να βρεθεί το άθροισμα $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n$ για τις διάφορες τιμές του μη αρνητικού ακεραίου n.
(iii) Να βρεθεί το άθροισμα $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n}$ για τις διάφορες τιμές του μη αρνητικού ακεραίου n.
Λύση: **(i)** $\mathbf{i}^0=1$, $\mathbf{i}^2=-1$, $\mathbf{i}^3=-\mathbf{i}$, $\mathbf{i}^4=1$. Αν λοιπόν $n=4\lambda$, τότε $\mathbf{i}^n=(\mathbf{i}^4)^\lambda=1^\lambda=1$. Αν $n=4\lambda+1$, τότε $\mathbf{i}^n=(\mathbf{i}^4)^\lambda\cdot\mathbf{i}=\mathbf{i}$. Αν $n=4\lambda+2$, τότε $\mathbf{i}^n=(\mathbf{i}^4)^\lambda\cdot\mathbf{i}^2=\mathbf{i}^2=-1$. Αν $n=4\lambda+3$, τότε $\mathbf{i}^n=(\mathbf{i}^4)^\lambda\cdot\mathbf{i}^3=\mathbf{i}^3=-\mathbf{i}$.
(ii) $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n=\dfrac{1-\mathbf{i}^{n+1}}{1-\mathbf{i}}=\dfrac{(1-\mathbf{i}^{n+1})(1+\mathbf{i})}{(1-\mathbf{i})(1+\mathbf{i})}=\dfrac{1-\mathbf{i}^{n+1}+\mathbf{i}-\mathbf{i}^{n+2}}{2}=\dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}^{n+1})}{2}$.
Αν $n=4\lambda$, τότε $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n=\dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}^{4\lambda+1})}{2}=\dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{2}=\dfrac{2}{2}=1$.
Αν $n=4\lambda+1$, τότε $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n=\dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}^{4\lambda+2})}{2}=\dfrac{(1+\mathbf{i})(1-(-1))}{2}=1+\mathbf{i}$. Αν

$n = 4\lambda+2$, τότε $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n = \dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}^{4\lambda+3})}{2} = \dfrac{(1+\mathbf{i})(1-(-\mathbf{i}))}{2} = \dfrac{(1+\mathbf{i})^2}{2} =$
$= \dfrac{2\mathbf{i}}{2} = \mathbf{i}$. Αν $n = 4\lambda+3$, τότε $1+\mathbf{i}+\mathbf{i}^2+\mathbf{i}^3+\cdots+\mathbf{i}^n = \dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}^{4\lambda+4})}{2} = \dfrac{(1+\mathbf{i})(1-1)}{2} = 0$.
(iii) $\mathbf{i}^4 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\mathbf{i}} = \mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}$. Άρα $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n} = 1+(-\mathbf{i})+(-\mathbf{i})^2+\cdots+(-\mathbf{i})^n =$
$= \dfrac{1-(-1)^{n+1}\mathbf{i}^{n+1}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{(1+(-1)^n\mathbf{i}^{n+1})(1-\mathbf{i})}{2}$.
Αν $n = 4\lambda$, τότε $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n} = \dfrac{(1+(-1)^{4\lambda}\mathbf{i}^{4\lambda+1})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{2} = 1$.
Αν $n = 4\lambda+1$, τότε $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n} = \dfrac{(1+(-1)^{4\lambda+1}\mathbf{i}^{4\lambda+2})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{(1+1)(1-\mathbf{i})}{2} = 1-\mathbf{i}$.
Αν $n = 4\lambda+2$, τότε $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n} = \dfrac{(1+(-1)^{4\lambda+2}\mathbf{i}^{4\lambda+3})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{(1-\mathbf{i})^2}{2} = \dfrac{-2\mathbf{i}}{2} = -\mathbf{i}$.
Αν $n = 4\lambda+3$, τότε $1+\dfrac{1}{\mathbf{i}}+\dfrac{1}{\mathbf{i}^2}++\dfrac{1}{\mathbf{i}^3}+\cdots+\dfrac{1}{\mathbf{i}^n} = \dfrac{(1+(-1)^{4\lambda+3}\mathbf{i}^{4\lambda+4})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{(1-1)(1-\mathbf{i})}{2} =$
$= 0$. ■

80. Να φέρετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τις ακόλουθες παραστάσεις:
(i) $\dfrac{5-2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}}$ **(ii)** $3\mathbf{i}+2\mathbf{i}^3+\mathbf{i}^{202}-5\mathbf{i}^{-147}-2\mathbf{i}^7+\mathbf{i}^{12}$ **(iii)** $\dfrac{1}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}-(-1+\mathbf{i}\sqrt{2})^{-2}$
(iv) $\dfrac{(4-\mathbf{i})^2-2(1+2\mathbf{i})}{(3+\mathbf{i})^2(2-3\mathbf{i})}$

Λύση: (i) $\dfrac{5-2\mathbf{i}}{1-2\mathbf{i}} = \dfrac{(5-2\mathbf{i})(1+2\mathbf{i})}{(1-2\mathbf{i})(1+2\mathbf{i})} = \dfrac{5+4-2\mathbf{i}+10\mathbf{i}}{1+4} = \dfrac{9}{5}+\mathbf{i}\cdot\dfrac{8}{5}$.
(ii) $3\mathbf{i}+2\mathbf{i}^3+\mathbf{i}^{202}-5\mathbf{i}^{-147}-2\mathbf{i}^7+\mathbf{i}^{12} = 3\mathbf{i}-2\mathbf{i}+(\mathbf{i}^4)^{50}\cdot\mathbf{i}^2-5(\mathbf{i}^4)^{-36}\mathbf{i}^{-3}-2\mathbf{i}^4\mathbf{i}^3+((\mathbf{i})^4)^3 =$
$= \mathbf{i}-1-5(\mathbf{i}^2)^{-1}\mathbf{i}^{-1}-2(\mathbf{i}^2)^3\mathbf{i}+1 = \mathbf{i}-5(-1)^{-1}(-\mathbf{i})-2(-1)^3\mathbf{i} = \mathbf{i}-5\mathbf{i}+2\mathbf{i} = -2\mathbf{i}$.
(iii) $\dfrac{1}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}} = \dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{1+3} = \dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{4}$, $(-1+\mathbf{i}\sqrt{2})^2 = 1-2-2\mathbf{i}\sqrt{2} = -1-2\mathbf{i}\sqrt{2}$. Επομένως
$(-1+\mathbf{i}\sqrt{2})^{-2} = \dfrac{1}{-1-2\mathbf{i}\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{1+2\mathbf{i}\sqrt{2}} = -\dfrac{1-2\mathbf{i}\sqrt{2}}{1+8} = -\dfrac{1-2\mathbf{i}\sqrt{2}}{9}$.
Επομένως $\dfrac{1}{1-\mathbf{i}\sqrt{3}}-(-1+\mathbf{i}\sqrt{2})^{-2} = \dfrac{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1-2\mathbf{i}\sqrt{2}}{9} = \dfrac{9+9\mathbf{i}\sqrt{3}+4-8\mathbf{i}\sqrt{2}}{36} =$
$= \dfrac{13+\mathbf{i}(9\sqrt{3}-8\sqrt{2})}{36}$.
(iv) $\dfrac{(4-\mathbf{i})^2-2(1+2\mathbf{i})}{(3+\mathbf{i})^2(2-3\mathbf{i})} = \dfrac{16-1-8\mathbf{i}-2-4\mathbf{i}}{(9-1+6\mathbf{i})(2-3\mathbf{i})} = \dfrac{13-12\mathbf{i}}{(8+6\mathbf{i})(2-3\mathbf{i})} = \dfrac{13-12\mathbf{i}}{34-12\mathbf{i}} =$
$= \dfrac{(13-12\mathbf{i})(34+12\mathbf{i})}{34^2+12^2} = \dfrac{586-252\mathbf{i}}{1300} = \dfrac{293-126\mathbf{i}}{650}$. ■

81. (i) Να φέρετε στη μορφή $\alpha+\beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τους παρακάτω μιγαδικούς:
1) $\dfrac{3-11\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}$ **2)** $\dfrac{50\mathbf{i}}{-3+4\mathbf{i}}$ **3)** $\dfrac{11+7\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}+\dfrac{13\mathbf{i}}{3-2\mathbf{i}}$
4) $\left(\dfrac{9-7\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}+2+\mathbf{i}\right)^2$ **5)** $(3+5\mathbf{i})^{90}+(5-3\mathbf{i})^{90}$ **6)** $\left(\dfrac{13+7\mathbf{i}}{7-13\mathbf{i}}\right)^{36}+\left(\dfrac{21-4\mathbf{i}}{4+21\mathbf{i}}\right)^{53}$
7) $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)^{16}+\left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^{8}$ **8)** $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}\right)^6$
(ii) Αν z είναι ο μιγαδικός της περίπτωσης **6)** του προηγούμενου ερωτήματος, να υπολογίσετε τον μιγαδικό $(z-\mathrm{Re}(z))^{2021}$.

Λύση: (i) 1) $\dfrac{3-11\mathbf{i}}{2-3\mathbf{i}}=\dfrac{(3-11\mathbf{i})(2+3\mathbf{i})}{(2-3\mathbf{i})(2+3\mathbf{i})}=\dfrac{6+33+(9-22)\mathbf{i}}{2^2+3^2}=\dfrac{39-13\mathbf{i}}{13}=3-\mathbf{i}$.

2) $\dfrac{50\mathbf{i}}{-3+4\mathbf{i}}=\dfrac{50\mathbf{i}(3+4\mathbf{i})}{(-3+4\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})}=\dfrac{50\mathbf{i}(3+4\mathbf{i})}{(4\mathbf{i})^2-3^2}=-\dfrac{50\mathbf{i}(3+4\mathbf{i})}{25}=-2\mathbf{i}(3+4\mathbf{i})=8-6\mathbf{i}$.

3) $\dfrac{11+7\mathbf{i}}{1+2\mathbf{i}}+\dfrac{13\mathbf{i}}{3-2\mathbf{i}}=\dfrac{(11+7\mathbf{i})(1-2\mathbf{i})}{(1+2\mathbf{i})(1-2\mathbf{i})}+\dfrac{13\mathbf{i}(3+2\mathbf{i})}{(3-2\mathbf{i})(3+2\mathbf{i})}=\dfrac{11+14+(7-22)\mathbf{i}}{5}+\dfrac{13\mathbf{i}(3+2\mathbf{i})}{13}=$
$=\dfrac{25-15\mathbf{i}}{5}+\mathbf{i}(3+2\mathbf{i})=5-3\mathbf{i}-2+3\mathbf{i}=3$.

4) $\dfrac{9-7\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}=\dfrac{(9-7\mathbf{i})(3-\mathbf{i})}{(3+\mathbf{i})(3-\mathbf{i})}=\dfrac{20-30\mathbf{i}}{10}=2-3\mathbf{i}$. Επομένως $\left(\dfrac{9-7\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}+2+\mathbf{i}\right)^2=(2-3\mathbf{i}+2+\mathbf{i})^2=$
$=(4-2\mathbf{i})^2=4(2-\mathbf{i})^2=4(4-1-4\mathbf{i})=12-16\mathbf{i}$.

5) $-\mathbf{i}(3+5\mathbf{i})=5-3\mathbf{i}$. Επομένως $(3+5\mathbf{i})^{90}+(5-3\mathbf{i})^{90}=(3+5\mathbf{i})^{90}+(-\mathbf{i})^{90}(3+5\mathbf{i})^{90}=$
$=(3+5\mathbf{i})^{90}(1+(-\mathbf{i})^{90})=(3+5\mathbf{i})^{90}(1+((-\mathbf{i})^2)^{45})=(3+5\mathbf{i})^{90}(1+(-1)^{45})=(3+5\mathbf{i})^{90}(1-1)=0$.

6) $\dfrac{13+7\mathbf{i}}{7-13\mathbf{i}}=\dfrac{(13+7\mathbf{i})(7+13\mathbf{i})}{49+169}=\dfrac{218\mathbf{i}}{218}=\mathbf{i}$ και $\dfrac{21-4\mathbf{i}}{4+21\mathbf{i}}=\dfrac{(21-4\mathbf{i})(4-21\mathbf{i})}{16+441}=\dfrac{-457\mathbf{i}}{457}=-\mathbf{i}$.
Επομένως $\left(\dfrac{13+7\mathbf{i}}{7-13\mathbf{i}}\right)^{36}+\left(\dfrac{21-4\mathbf{i}}{4+21\mathbf{i}}\right)^{53}=\mathbf{i}^{36}+(-\mathbf{i})^{53}=(\mathbf{i}^4)^9-\mathbf{i}^{4\cdot 13}\cdot\mathbf{i}=1^9-1^{13}\cdot\mathbf{i}=1-\mathbf{i}$.

7) $\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}=\dfrac{(1+\mathbf{i})^2}{2}=\dfrac{1-1+2\mathbf{i}}{2}=\mathbf{i}$ και $\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}=\dfrac{(1-\mathbf{i})^2}{2}=-\mathbf{i}$. Επομένως $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}}\right)^{16}+$
$+\left(\dfrac{1-\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}}\right)^{8}=(\mathbf{i}^4)^4+(-1)^8(\mathbf{i}^4)^2=1+1=2$.

8) Οι αριθμοί $\dfrac{-1\pm\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (άθροισμα και γινόμενο) $z^2+z+1=0$. Επομένως $z^2=-z-1\Leftrightarrow z^3=-z^2-z=z+1-z=1$ και άρα $z^6=1$. Επομένως $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6=1$. Ομοίως οι αριθμοί $\dfrac{1\pm\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$ είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $z^2-z+2=0\Leftrightarrow z^2=z-2\Leftrightarrow z^3=z^2-2z=z-2-2z=-z-2$. Επομένως $z^6=(z+2)^2=$ $z^2+4z+4=z-2+4z+4=5z+2$. Επομένως $\left(\dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}\right)^6=\dfrac{5-5\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}+2=\dfrac{9-5\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$.
Κατά συνέπεια $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\dfrac{1-\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}\right)^6=1+\dfrac{9-5\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}=\dfrac{11-5\mathbf{i}\sqrt{7}}{2}$.

(ii) $(z-\mathrm{Re}(z))^{2021}=(1-\mathbf{i}-1)^{2021}=(-\mathbf{i})^{2020}\cdot(-\mathbf{i})=((\mathbf{i})^4)^{505}\cdot(-\mathbf{i})=-\mathbf{i}$. ■

82. Να λύσετε στο $\mathbb{C}$ τις παρακάτω δευτεροβάθμιες εξισώσεις:
(i) $4x^2+5x+2=0$.
(ii) $x^3+1=0$ (κυβικές ρίζες του -1).
(iii) $(1+\mathbf{i})x^2+(6-4\mathbf{i})x-7-17\mathbf{i}=0$.

Λύση: (i) $4x^2+5x+2=0$. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $5^2-4\cdot4\cdot2=-7$ με τετραγωνικές ρίζες $\pm\mathbf{i}\sqrt{7}$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι λοιπόν $x=\dfrac{-5\pm\mathbf{i}\sqrt{7}}{8}$.

(ii) $x^3+1=0\Leftrightarrow(x+1)(x^2-x+1)=0$. Επομένως $x=-1$ ή $x=\dfrac{1\pm\mathbf{i}\sqrt{|(-1)^2-4|}}{2}=\dfrac{1\pm\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$.

(iii) $(1+\mathbf{i})x^2+(6-4\mathbf{i})x-7-17\mathbf{i}=0$. Η διακρίνουσα είναι $(6-4\mathbf{i})^2+4(1+\mathbf{i})(7+17\mathbf{i})=$ $=-20+48\mathbf{i}$. Θα υπολογίσουμε τις τετραγωνικές της ρίζες σαν να μην γνωρίζαμε τους σχετικούς τύπους. Έστω λοιπόν $x,y\in\mathbb{R}$ με $(x+y\mathbf{i})^2=-20+48\mathbf{i}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-20\\2xy=48\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)^2 = x^4+y^4-2x^2y^2 = (-20)^2 = 400 \\ 4x^2y^2 = 48^2 = 2304 \end{cases}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και παίρνουμε $x^4+y^4+2x^2y^2 = 2704 \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 = 52^2 \Leftrightarrow x^2+y^2 =$ $= 52$. Παίρνουμε το σύστημα $\begin{cases} x^2-y^2=-20 \\ x^2+y^2=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=16 \\ y^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 6 \end{cases}$

Επειδή $2xy = 48 \Leftrightarrow xy = 24 > 0$ οι x και y είναι ομόσημοι. Άρα οι τετραγωνικές ρίζες της διακρίνουσας είναι $4+6\mathbf{i}$ και $-4-6\mathbf{i}$. Οι ρίζες της εξίσωσης είναι λοιπόν $x_1 = \dfrac{-6+4\mathbf{i}+4+6\mathbf{i}}{2(1+\mathbf{i})} =$ $= \dfrac{-1+5\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} = \dfrac{(-1+5\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{4+6\mathbf{i}}{2} = 2+3\mathbf{i}$ και $x_2 = \dfrac{-6+4\mathbf{i}-4-6\mathbf{i}}{2(1+\mathbf{i})} = -\dfrac{5+\mathbf{i}}{1+\mathbf{i}} =$ $= -\dfrac{(5+\mathbf{i})(1-\mathbf{i})}{2} = \dfrac{6-4\mathbf{i}}{2} = -3+2\mathbf{i}$. ■

83. Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του $\mathbf{i}$ και του $-\mathbf{i}$.

Λύση: Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $(x+y\mathbf{i})^2 = \mathbf{i}$. Τότε $\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4-2x^2y^2=0 \\ 4x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$. Από τις σχέσεις $x^-y^2 = 0$ και $x^2+y^2=1$ προκύπτει ότι $x^2 = y^2 = \dfrac{1}{2}$ και επομένως $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Επειδή $2xy = 1 > 0$, προκύπτει ότι οι τετραγωνικές ρίζες του $\mathbf{i}$ είναι οι $\pm\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\Big)$.

Για το $-\mathbf{i}$ έχουμε ανάλογα $(x+y\mathbf{i})^2 = -\mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4-2x^2y^2=0 \\ 4x^2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow (x^2+y^2)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2+y^2=1$. Επομένως πάλι $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Επειδή όμως $xy = -\dfrac{1}{2} < 0$ οι τετραγωνικές ρίζες του $-\mathbf{i}$ είναι οι $\pm\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}\Big)$. ■

Σημειώνουμε εδώ ότι οι τετραγωνικές ρίζες μπορούν να βρεθούν συντομότερα μέσω της τριγωνομετρικής μορφής μιγαδικού αριθμού, κάτι που θα μας απασχολήσει στα επόμενα.

Η επόμενη άσκηση αναφέρεται σε αριθμητικές προόδους στο $\mathbb{C}$. Ισχύουν και εδώ τα αντίστοιχα στους πραγματικούς αριθμούς.

84. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$(-4-2\mathbf{i}) + (-2-\mathbf{i}) + 0 + (2+\mathbf{i}) + (4+2\mathbf{i}) + \cdots + (-4-2\mathbf{i}+(n-1)(2+\mathbf{i})),$$

όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση: Μπορούμε να χωρίσουμε τα πραγματικά από τα φανταστικά μέρη και να παρατηρήσουμε ότι αυτά σχηματίζουν αριθμητικές προόδους. Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα και βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα.

Εμείς δεν θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο αυτή. Εφόσον το $\mathbb{C}$ είναι σώμα. προφανώς οι στοιχειώδεις ιδιότητες του $\mathbb{R}$ ισχύουν και εδώ. Έχουμε λοιπόν μια αριθμητική πρόοδο στο $\mathbb{C}$ με πρώτο όρο τον $-4-2\mathbf{i}$ και διαφορά $2+\mathbf{i}$. Άρα, όπως στους πραγματικούς, έτσι και εδώ θα πάρουμε $\dfrac{n}{2}\cdot(2(-4-2\mathbf{i})+(n-1)(2+\mathbf{i})) = \dfrac{n}{2}\cdot(8-4\mathbf{i}+(n-1)(2+\mathbf{i})) = 5n-1+\dfrac{n(n-5)}{2}\cdot\mathbf{i}$. ■

85. Υπολογίστε τους $x, y \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $(x+2y\mathbf{i})^2 = x\mathbf{i}$.

<u>**Λύση:**</u> $(x+2y\mathbf{i})^2 = x\mathbf{i} \Leftrightarrow x^2-4y^2+4xy\mathbf{i} = x\mathbf{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=0 \\ 4xy=x \end{cases}$. Αν $x=0$, τότε $-4y^2 = 0 \Leftrightarrow y=0$. Μια λύση είναι το ζεύγος $(0,0)$. Έστω $x \neq 0$. Τότε από τη σχέση $4xy = x$ παίρνουμε $y = \frac{1}{4}$. Επειδή $x^2 = 4y^2 = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$, παίρνουμε $x = \pm\frac{1}{2}$. Άρα οι λύσεις (x,y) είναι $(0,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ και $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. ■

2.2 Αυστηρότερη Θεμελίωση των Μιγαδικών Αριθμών

Έστω $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(\alpha,\beta) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ το σύνολο των ζευγών με συντεταγμένες πραγματικούς αριθμούς.
Εφοδιάζουμε το $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ με δύο πράξεις, **πρόσθεση $\oplus$ και πολλαπλασιασμό** $\odot$, ως εξής:

$$\boldsymbol{(\alpha,\beta)\oplus(\gamma,\delta) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta)} \quad (3)$$
$$\boldsymbol{(\alpha,\beta)\odot(\gamma,\delta) = (\alpha\gamma-\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma)} \quad (4)$$

Παρατηρούμε συγκρίνοντας τους τύπους **(1)**, **(2)** με τους τύπους **(3)** και **(4)** ότι συμπεριφερόμαστε στα ζεύγη $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ όπως στους μιγαδικούς $\alpha+\beta\mathbf{i}$. Έτσι, μπορεί κανείς να επαναλάβει την απόδειξη της πρότασης **2.1** κατά τρόπο πανομοιότυπο αντικαθιστώντας τους $\alpha+\beta\mathbf{i}$ με τα ζεύγη (α,β) και τις πράξεις $+$ και $\cdot$ με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ αντίστοιχα και να αποδείξει ότι το $\mathbb{R}^2$ είναι ένα **αλγεβρικό σώμα** με τις πράξεις που ορίζουν οι σχέσεις **(3)** και **(4)**.
Το μηδενικό στοιχείο είναι το $(0,0)$, το αντίθετο του (α,β) είναι το $(-\alpha,-\beta)$, το μοναδιαίο στοιχείο είναι το $(1,0)$ και το αντίστροφο ενός μη μηδενικού στοιχείου (α,β), δηλαδή $\alpha^2+\beta^2>0$, είναι το $\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right)$.
Αλλά αυτό το σώμα δεν είναι ούτε «φανταστικό» ούτε «εξωπραγματικό». Είναι το $\mathbb{R}^2$, **του οποίου τα στοιχεία ταυτίζονται με τα σημεία του επιπέδου, όπως οι πραγματικοί αριθμοί ταυτίζονται με τα σημεία μιας ευθείας**.
Αν θέσουμε $\mathbf{i} = (0,1)$, παρατηρούμε ότι $\mathbf{i}^2 = (0,1)\odot(0,1) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 0\cdot 1 + 1\cdot 0) = (-1,0)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$(\alpha,0)\oplus(\beta,0)\odot\mathbf{i} = (\alpha,0)\oplus(\beta,0)\odot(0,1) = (\alpha,0)\oplus(\beta\cdot 0-0\cdot 1, \beta\cdot 1+0\cdot 0) = (\alpha,0)\oplus(0,\beta) = (\alpha,\beta),$$

δηλαδή

$$\boldsymbol{(\alpha,\beta) = (\alpha,0)\oplus(\beta,0)\odot\mathbf{i}} \quad (5)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2. Θέτουμε $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2,\oplus,\odot)$ με τις πράξεις $\oplus$ και $\odot$ των σχέσεων **(3)** και **(4)**. Το σώμα $\mathbb{C}$ θα λέγεται **σώμα των μιγαδικών αριθμών**.

Έστω $\widehat{\mathbb{R}} = \{(\alpha,0) \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$ το υποσύνολο του $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ που αποτελείται από όλα τα ζεύγη πραγματικών με δεύτερη συντεταγμένη μηδέν.

Θεωρούμε την απεικόνιση $i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ με $i(\alpha) = (\alpha,0)$. Η απεικόνιση αυτή ίναι προφανώς 1-1.
Το $i(\alpha) = (\alpha,0)$ ας το συμβολίσουμε με $\widehat{\alpha}$, για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.
Παρατηρούμε ότι $\widehat{\alpha}\oplus\widehat{\beta} = (\alpha,0)\oplus(\beta,0) = (\alpha+\beta,0) = \widehat{\alpha+\beta}$ και

$\widehat{\alpha} \odot \widehat{\beta} = (\alpha, 0) \odot (\beta, 0) = (\alpha \cdot \beta - 0 \cdot 0,\ \alpha \cdot 0 + 0 \cdot \beta) = (\alpha \cdot \beta, 0) = \widehat{\alpha \cdot \beta}$, **δηλαδή οι περιορισμοί των πράξεων του $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ στο $\widehat{\mathbb{R}}$ ουσιαστικά είναι οι συνήθεις πράξεις του $\mathbb{R}$ στην πρώτη συντεταγμένη. Γι΄ αυτό το λόγο το $\widehat{\mathbb{R}}$ έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με το σώμα των πραγματικών** $\mathbb{R}$ (αλγεβρικές, τοπολογικές που προκύπτουν από τη διάταξη στο $\mathbb{R}$) και προφανώς είναι και το ίδιο σώμα, «πιστό αντίγραφο» $\mathbb{R}$ ή αλλιώς **ισόμορφο**, όπως λέμε στην Άλγεβρα, του $\mathbb{R}$.

Η εξίσωση (5) γράφεται λοιπόν $\boldsymbol{(\alpha, \beta) = \widehat{\alpha} \oplus \widehat{\beta} \odot \mathbf{i}}$.

Έχουμε λοιπόν δύο επιλογές: **1)** Να γράφουμε το μιγαδικό αριθμό $(\alpha, \beta) = \widehat{\alpha} \oplus \widehat{\beta} \odot \mathbf{i}$, διατηρώντας τα καπέλα πάνω από τους πραγματικούς και χρησιμοποιώντας τα σύμβολα $\oplus$ και $\odot$ για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα, κάτι εξαιρετικά δύσχρηστο ή

2) να ταυτίσουμε το $\widehat{\mathbb{R}}$ με το $\mathbb{R}$, εφόσον έχουν ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες, κάτι πολύ πιο οικονομικό και εύχρηστο. (Οι δύσπιστοι ας συνεχίσουν να γράφουν με τα καπέλα και τα σύμβολα $\oplus$ και $\odot$ για να δυσκολέψουν τη ζωή τους!). Άλλωστε, θα μπορούσαμε να ονομάσουμε πραγματικούς αριθμούς τα στοιχεία του $\widehat{\mathbb{R}}$ και τα στοιχεία του $\mathbb{R}$ π.χ. «προπραγματικούς». Τέτοιες ταυτίσεις είναι συνηθισμένες στα Μαθηματικά.

Αν λοιπόν ταυτίσουμε, όπως προηγουμένως αναλύσαμε, τα ζεύγη $(\alpha, 0)$ και $(\beta, 0)$ με τους πραγματικούς αριθμούς α και β αντίστοιχα, δηλαδή **να θεωρήσουμε τον άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών ως υποσύνολο του επιπέδου xOy** και θέσουμε επίσης $\mathbf{i} = (0, 1)$, τότε η σχέση (5) γράφεται

$$\boxed{\alpha + \beta\mathbf{i} = (\alpha, \beta)}$$

2.3 Συζυγής-Μέτρο Μιγαδικού Αριθμού

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. Έστω $z = \alpha + \beta\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, $\big(\alpha = \mathrm{Re}(z), \beta = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}\big)$. **Ο συζυγής του z είναι ο μιγαδικός $\overline{z} = \alpha - \beta\mathbf{i}$.** Δηλαδή $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ και $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.4. **(i)** $\overline{(\overline{z})} = z$, δηλαδή ο συζυγής του συζυγούς είναι ο ίδιος μιγαδικός αριθμός.
(ii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$ και $z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.
(iii) $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})}$ και $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \overline{z}) \underset{\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}}{=} \frac{\mathbf{i}}{2}(\overline{z} - z)}$.

Απόδειξη: (i) Έστω $z = \alpha + \beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Τότε $\overline{(\overline{z})} = \overline{\alpha - \beta\mathbf{i}} = \alpha - (-\beta)\mathbf{i} = \alpha + \beta\mathbf{i} = z$.
(ii) $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i}$ και $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathbf{i}$. Επομένως $z = \bar{z} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} \Leftrightarrow 2\mathrm{Im}(z)\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ και $\bar{z} = -z \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} = -\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{I}$.
(iii) $z + \bar{z} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} + \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} = 2\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Ομοίως $z - \bar{z} = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} - \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)\mathbf{i} = 2\mathrm{Im}(z)\mathbf{i} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathbf{i}}(z - \bar{z})$. ■

Σημείωση: Ένας μιγαδικός $z = \alpha + \beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ λέγεται **καθαρός μιγαδικός** αν και μόνον αν $\beta = \mathrm{Im}(z) \neq 0 \Leftrightarrow z \notin \mathbb{R} \Leftrightarrow z \neq \bar{z}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.5. **(i)** Έστω $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Τότε
$$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n.$$
(ii) Έστω $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Τότε
$$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n.$$
Ιδιαιτέρως $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$, για κάθε θετικό ακέραιο n.

(iii) Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$. Τότε
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$
Ειδικότερα,, αν $z \neq 0$, τότε $\overline{(z^{-1})} = \bar{z}^{-1}$.

Απόδειξη: (i) Έστω $z_k = \alpha_k + \beta_k\mathbf{i}$. όπου $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Τότε έχουμε:
$\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \overline{\alpha_1 + \beta_1\mathbf{i} + \alpha_2 + \beta_2\mathbf{i} + \cdots + \alpha_n + \beta_n\mathbf{i}} =$
$= \overline{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + \mathbf{i}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) - \mathbf{i}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) =$
$= \alpha_1 - \beta\mathbf{i} + \alpha_2 - \beta_2\mathbf{i} + \cdots + \alpha_n - \beta_n\mathbf{i} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$.

(ii) Έστω $z_1 = \alpha + \beta\mathbf{i}$ και $z_2 = \gamma + \delta\mathbf{i}$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Τότε $\overline{z_1 z_2} = \overline{(\alpha + \beta\mathbf{i})(\gamma + \delta\mathbf{i})} =$
$= \overline{\alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathbf{i}} = \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta + \beta\gamma)\mathbf{i} = \alpha\gamma - (-\beta)(-\delta) + (\alpha(-\delta) + (-\beta)\gamma)\mathbf{i} =$
$= (\alpha - \beta\mathbf{i})(\gamma - \delta\mathbf{i}) = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

Επαγωγικά υποθέτουμε ότι $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1\bar{z}_2\cdots\bar{z}_n$, για κάποιον θετικό ακέραιο $n \geq 2$. Τότε
$\overline{z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1}} = \overline{(z_1 z_2 \cdots z_n) z_{n+1}} \underset{\text{για } n=2}{=} \overline{z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot \bar{z}_{n+1} \underset{\substack{\text{επαγωγική}\\ \text{υπόθεση}}}{=} \bar{z}_1\bar{z}_2\cdots\bar{z}_n\bar{z}_{n+1}$.

Τώρα, αν $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, παίρνουμε $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$.

(iii) Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_2 \neq 0$. Τότε $\bar{z}_1 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right)} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \bar{z}_2$. Επομένως $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Ειδικότερα, για $z_1 = 1 \in \mathbb{R}$ και $z_2 = z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ παίρνουμε $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \underset{\bar{1}=1}{=} \frac{1}{\bar{z}}$, δηλαδή $\overline{(z^{-1})} = \bar{z}^{-1}$. ■

Από τα **(ii)** και **(iii)** της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ότι αν $z \neq 0$ και n θετικός ακέραιος, τότε $\overline{(z^{-n})} = \bar{z}^{-n}$. Πράγματι, $\overline{(z^{-n})} = \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{\overline{(z^n)}} = \frac{1}{\bar{z}^n} = \bar{z}^{-n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. Έστω $z = \alpha + \beta\mathbf{i} \in \mathbb{C}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **Το μέτρο $|z|$ του z είναι ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.**

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.7. (i) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$.
(ii) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.
(iii) $|z|^2 = z\bar{z}$ και αν $z \neq 0$, τότε $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Ειδικότερα, αν $|z| = 1$, τότε $z^{-1} = \bar{z}$.
(iv) $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$, όπου $z_k \in \mathbb{C}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Ειδικότερα $|z^n| = |z|^n$, για κάθε θετικό ακέραιο n.
(v) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $z_2 \neq 0$, τότε $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$. Ειδικότερα για $z_1 = 1$ και $z_2 = z \neq 0$ έχουμε $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
(vi) Αν $z \neq 0$, τότε $|z^{-n}| = |z|^{-n}$, για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n.

Απόδειξη: (i) Έστω $z = \alpha + \beta\mathbf{i}$, όπως παραπάνω. Τότε $-z = -\alpha - \beta\mathbf{i}$ και $\bar{z} = \alpha - \beta\mathbf{i}$. Επομένως $|-z| = \sqrt{(-\alpha)^2 + (-\beta)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = |z| = \sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2} = |\bar{z}|$.
(ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
(iii) $z\bar{z} = (\alpha + \beta\mathbf{i})(\alpha - \beta\mathbf{i}) = \alpha^2 - \beta^2\mathbf{i}^2 \underset{\mathbf{i}^2=-1}{=} \alpha^2 + \beta^2 = |z|^2$. Επίσης, αν $z \neq 0$, τότε $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} =$
$= \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1$. Άρα $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\mathbf{i}$.
(iv) $|z_1 z_2 \cdots z_n|^2 = (z_1 z_2 \cdots z_n) \cdot \overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = (z_1 z_2 \cdots z_n)(\bar{z}_1\bar{z}_2\cdots\bar{z}_n) = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)\cdots(z_n\bar{z}_n) =$
$= |z_1|^2|z_2|^2\cdots|z_n|^2 = (|z_1||z_2|\cdots|z_n|)^2$. Επειδή οι αριθμοί $|z_1 z_2 \cdots z_n|$ και $|z_1||z_2|\cdots|z_n|$ είναι μη αρνητικοί πραγματικοί, προκύπτει από τα παραπάνω ότι $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1||z_2|\cdots|z_n|$.

Αν τώρα $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, έπεται ότι $|z^n| = |z|^n$, για κάθε θετικό ακέραιο n.
(v) $|z_1| = \left|\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| |z_2|$ και συνεπώς $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
Τώρα, αν $z_1 = 1$ και $z_2 = z \neq 0$ παίρνουμε $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{|1|}{|z|} = \frac{1}{|z|}$, δηλαδή $|z^{-1}| = |z|^{-1}$.
(vi) Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και n μη αρνητικός ακέραιος. Τότε $|z^{-n}| = |z|^{-n}$. Πράγματι, αν $n = 0$ ισχύει η σχέση γιατί και τα δύο μέλη δίνουν μονάδα. Επίσης για $n = 1$ το αποδείξαμε προηγουμένως. Έστω $n \geq 2$. Τότε $|z^{-n}| = |(z^{-1})^n| = |z^{-1}|^n = (|z|^{-1})^n = |z|^{-n}$. ■

Παρατηρήσεις: **1)** Στους μιγαδικούς **δεν ισχύει εν γένει η σχέση $|z|^2 = z^2$**, η οποία ισχύει στους πραγματικούς. Αν $z = \alpha + \beta\mathbf{i}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, ενώ $z^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta\mathbf{i}$. Πιο συγκεκριμένα, έστω $z = 1 + 2\mathbf{i}$. Τότε $|1 + 2\mathbf{i}|^2 = 1 + 4 = 5$, ενώ $z^2 = (1 + 2\mathbf{i})^2 = 1 - 4 + 4\mathbf{i} = -3 + 4\mathbf{i}$.
2) Ένας μιγαδικός z **είναι πραγματικός αν και μόνον αν είναι συζυγής με τον εαυτό του**. Αυτό προκύπτει από το πόρισμα **2.4**, ή απλά $z = \alpha = \alpha + 0\mathbf{i} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = \alpha - 0\mathbf{i} = \alpha = z$.
3) Το άθροισμα δύο συζυγών αριθμών είναι πραγματικός, όπως προκύπτει από το πόρισμα **2.4** ή προφανέστερα αν $z = \alpha + \beta\mathbf{i}$, $\big(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\big)$, τότε $z + \bar{z} = \alpha + \beta\mathbf{i} + \alpha - \beta\mathbf{i} = 2\alpha$, **δηλαδή το διπλάσιο του κοινού πραγματικού τους μέρους**.
4) Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε οι αριθμοί $z_1\bar{z}_2$ και $\bar{z}_1 z_2$ είναι συζυγείς και επομένως το άθροισμά τους είναι πραγματικός και ισούται με $2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$. Αυτό είναι άμεσο, γιατί $\overline{(z_1\bar{z}_2)} = \bar{z}_1(\bar{\bar{z}}_2) = \bar{z}_1 z_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8. $\big($**ΤΡΙΓΩΝΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ**$\big)$ Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
Ιδιαιτέρως, η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνον $z_1\bar{z}_2 = \bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$ και $z_1\bar{z}_2 \geq 0$ ή ισοδύναμα αν κάποιος από τους z_1, z_2 είναι μη αρνητικό πραγματικό πολλαπλάσιο του άλλου.
1η Απόδειξη: Έστω $z_1 = x + y\mathbf{i}$ και $z_2 = r + s\mathbf{i}$, όπου $x, y, r, s \in \mathbb{R}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι
$$\sqrt{(x + r)^2 + (y + s)^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{r^2 + s^2}$$
Η απόδειξη είναι άμεση με βάση την εφαρμογή **1.13** $\big($σελ. 36$\big)$ για $n = 2$ και $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\beta_1 = r$ και $\beta_2 = s$. ■
2η Απόδειξη: $|\boldsymbol{z_1} + \boldsymbol{z_2}|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} \underset{\text{πόρισμα } \mathbf{2.4\ (iii)}}{=} |\boldsymbol{z_1}|^2 + |\boldsymbol{z_2}|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{z_1}\bar{\boldsymbol{z}}_2)$.
Αλλά $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2} \leq \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2))^2} = |z_1\bar{z}_2| = |z_1||\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$. Επομένως $|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$, απ' όπου προκύπτει $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$. Τότε οι ανισότητες στη σχέση
$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2} \leq \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2))^2} = |z_1||z_2|$$
ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}$ και $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2} = z_1\bar{z}_2 = |z_1||z_2| \in [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$.
Αν και οι δύο μιγαδικοί ήσαν μηδέν, τότε προφανώς κάθε ένας είναι μη αρνητικό $\big($μάλιστα θετικό-δηλαδή με θετικό συντελεστή$\big)$ πολλαπλάσιο του άλλου.
Έστω ότι κάποιος δεν είναι μηδέν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $z_1 \neq 0$. Τότε πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $\bar{z}_1 z_2 = |z_1||z_2|$ με z_1 και παίρνουμε $(z_1\bar{z}_1)z_2 = z_1|z_1||z_2| \Leftrightarrow |z_1|^2 z_2 = |z_1||z_2|z_1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{|z_2|}{|z_1|} z_1$.

Αντιστρόφως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $z_2 = \lambda z_1$, όπου $\lambda \geq 0$ πραγματικός. Τότε $|z_1 + z_2| = |z_1 + \lambda z_1| = |(1+\lambda)z_1| \underset{1+\lambda>0}{=} (1+\lambda)|z_1| = |z_1| + \lambda|z_1| \underset{\lambda\geq 0}{=} |z_1| + |\lambda z_1| =$
$= |z_1| + |z_2|$. ■

Σχόλιο: Η σχέση $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$ που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας είναι σημαντική και γενικεύεται επαγωγικά για περισσότερους από δύο μιγαδικούς.

Ασκήσεις

86. Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Ιδιαιτέρως $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2|$ αν και μόνον αν $z_1\bar{z}_2 = \bar{z}_1 z_2 \leq 0$ ή ισοδύναμα κάποιος από τους z_1 και z_2 είναι μη θετικό πολλαπλάσιο του άλλου.

Απόδειξη: $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2| \Leftrightarrow \big||z_1| - |z_2|\big|^2 \leq |z_1 + z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| \leq$
$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \Leftrightarrow |z_1||z_2| \geq -\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.

Αλλά $-\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2} \leq \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2))^2} = |z_1\bar{z}_2| = |z_1||z_2|$ και συνεπώς $-\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1||z_2|$, αυτό δηλαδή που θέλαμε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\big||z_1| - |z_2|\big| = |z_1 + z_2|$. Τότε οι ανισότητες στη σχέση

$$-\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)| = \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2} \leq \sqrt{(\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2))^2} = |z_1||z_2|$$

ισχύουν ως ισότητες, δηλαδή $\mathrm{Im}(z_1\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 \in \mathbb{R}$ και $\bar{z}_1 z_2 = \overline{z_1\bar{z}_2} = z_1\bar{z}_2 = -|z_1||z_2| \in$
$\in (-\infty, 0] \subseteq \mathbb{R}$.

Αν και οι δύο μιγαδικοί ήσαν μηδέν, τότε προφανώς κάθε ένας είναι μη θετικό (μάλιστα αρνητικό-δηλαδή με αρνητικό συντελεστή) πολλαπλάσιο του άλλου.

Έστω ότι κάποιος δεν είναι μηδέν. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $z_1 \neq 0$. Τότε πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $\bar{z}_1 z_2 = -|z_1||z_2|$ με z_1 και παίρνουμε $(z_1\bar{z}_1)z_2 = -z_1|z_1||z_2| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z_1|^2 z_2 = -|z_1||z_2|z_1 \Leftrightarrow z_2 = -\dfrac{|z_2|}{|z_1|}z_1$.

Αντιστρόφως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $z_2 = \lambda z_1$, όπου $\lambda \leq 0$ πραγματικός. Άρα $-|\lambda| = \lambda$, οπότε $\big||z_1| - |z_2|\big| = \big||z_1| - |\lambda z_1|\big| = \big||z_1| - |\lambda||z_1|\big| = \big|1 - |\lambda|\big||z_1| = |1 + \lambda||z_1| =$
$= |(1+\lambda)z_1| = |z_1 + \lambda z_1| = |z_1 + z_2|$. ■

87. Να αποδείξετε τον **κανόνα του παραλληλογράμμου**

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

Η ονομασία αυτή θα δικαιολογηθεί στην επόμενη παράγραφο.

Απόδειξη: $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2|z_1|^2 +$
$+2|z_2|^2$. ■

88. Δείτε την ισοδυναμία $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow |z| = |z+1| = 1$.

Απόδειξη: Έστω $z^2 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z = -1$. Επομένως $|z||z+1| = |z^2 + z| = |-1| = 1$. Ακόμη, $z^2 = -z - 1$ και άρα $|z|^2 = |-z-1| = |z+1|$. Η σχέση λοιπόν $|z||z+1| = 1$ γράφεται $|z|^3 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ και κατά συνέπεια και $|z+1| = |z|^2 = 1$.

Αντιστρόφως, έστω $|z| = |z+1| = 1$. Τότε $|z|^2 = |z+1|^2 = |z|^2 + 1 + \mathrm{Re}(z) = 1$. Από τη σχέση $|z|^2 = |z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z)$ προκύπτει ότι $\mathrm{Re}(z) = -\dfrac{1}{2}$. Άρα $|z|^2 = (\mathrm{Re(z)})^2 + (\mathrm{Im}(z))^2 = 1 \underset{\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + (\mathrm{Im}(z))^2 = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Οι αριθμοί $-\frac{1}{2} \pm \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$. ■

89. Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ με $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2$. (Ειδική περίπτωση του κύκλου του Απολλωνίου). Να βρεθεί το μέτρο του z.

Λύση: $\left|\frac{z-4}{z-1}\right| = 2 \Leftrightarrow |z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 16 - 2\mathrm{Re}(4z) =$ $= 4|z|^2 + 4 - 8\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow 3|z|^2 - 8\mathrm{Re}(z) = 16 - 4 - 8\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow 3|z|^2 = 12 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$. ■

90. Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και $\lambda > 0$, δείξτε ότι $|z_1 + z_2|^2 \leq (1+\lambda)|z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2$.

Απόδειξη: $(1+\lambda)|z_1|^2 + \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)|z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \lambda|z_1|^2 + \frac{1}{\lambda}|z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) +$ $+\lambda|z_1|^2 + \frac{1}{\lambda}|z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1 + z_2|^2 + \lambda|z_1|^2 + \frac{1}{\lambda}|z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$. Αλλά $\lambda|z_1|^2 + \frac{1}{\lambda}|z_2|^2 -$ $-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |\sqrt{\lambda}z_1|^2 + \left|\frac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\sqrt{\lambda}z_1\overline{\left(\frac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right)}\right) = \left|\sqrt{\lambda}z_1 - \frac{z_2}{\sqrt{\lambda}}\right|^2 \geq 0$, απ' όπου προκύπτει η αποδεικτέα. ■

91. Αν οι μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|\frac{z_1 - \mathbf{i}}{z_1 + \mathbf{i}}\right| + \left|\frac{z_2 - \mathbf{i}}{z_2 + \mathbf{i}}\right| + \cdots + \left|\frac{z_n - \mathbf{i}}{z_n + \mathbf{i}}\right| < 1,$$

τότε ικανοποιούν και την ανισότητα

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n - \mathbf{i}}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \mathbf{i}}\right| < 1.$$

Απόδειξη: Προφανώς $\left|\frac{z_k - \mathbf{i}}{z_k + \mathbf{i}}\right| < 1$. Έστω ένας μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει $\left|\frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}\right| < 1$. Τότε έχουμε: $\left|\frac{z - \mathbf{i}}{z + \mathbf{i}}\right| < 1 \Leftrightarrow |z - \mathbf{i}|^2 < |z + \mathbf{i}|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + 1 - 2\mathrm{Re}(z\bar{\mathbf{i}}) < |z|^2 + 1 +$ $+2\mathrm{Re}(z\bar{\mathbf{i}}) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z\mathbf{i}) < -\mathrm{Re}(z\mathbf{i}) \Leftrightarrow -\mathrm{Im}(z) < \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow 0 < \mathrm{Im}(z)$. Επομένως $0 < \mathrm{Im}(z_k)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Άρα και $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) + \cdots + \mathrm{Im}(z_n) > 0$, το οποίο, όπως προηγουμένως είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\left|\frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n - \mathbf{i}}{z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \mathbf{i}}\right| < 1$. ■

92. Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι ένα πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές $(\alpha_k \in \mathbb{R})$ και $z \in \mathbb{C}$ είναι μια ρίζα του $f(x)$, τότε και ο συζυγής του $\bar{z}$ είναι επίσης ρίζα του $f(x)$.

Απόδειξη: Εφόσον $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $\overline{\alpha_k} = \alpha_k$, για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Επομένως έχουμε:

$0 = f(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0$ και άρα $0 = \bar{0} = \overline{\alpha_n z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \alpha_1 z + \alpha_0} =$ $= \overline{\alpha_n}\overline{(z^n)} + \overline{\alpha_{n-1}}\overline{(z^{n-1})} + \cdots + \overline{\alpha_1}\bar{z} + \overline{\alpha_0} = \alpha_n\bar{z}^n + \alpha_{n-1}\bar{z}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\bar{z} + \alpha_0$. ■

Με βάση τη θεωρία πολυωνύμων θα δούμε αργότερα και μιαν άλλη απόδειξη του αποτελέσματος της προηγούμενης άσκησης.

93. Να υπολογίσετε το μέτρο του μιγαδικού $\frac{(2-\mathbf{i})^2(-1+\mathbf{i})^3(-3+2\mathbf{i})}{(4-\mathbf{i})^3(1-2\mathbf{i})(2+5\mathbf{i})^2(3-2\mathbf{i})}$.

Λύση: Προφανώς είναι εξαιρετικά επίπονο να φέρουμε το κλάσμα στη μορφή $\alpha + \beta\mathbf{i}$ και μετά να υπολογίσουμε το μέτρο του. Εκμεταλευόμαστε τις ιδιότητες του μέτρου και έχουμε:

$$\left|\frac{(2-\mathbf{i})^2(-1+\mathbf{i})^3(-3+2\mathbf{i})}{(4-\mathbf{i})^3(1-2\mathbf{i})(2+5\mathbf{i})^2(3-2\mathbf{i})}\right| = \frac{|2-\mathbf{i}|^2\cdot|-1+\mathbf{i}|^3\cdot|-3+2\mathbf{i}|}{|4-\mathbf{i}|^3\cdot|1-2\mathbf{i}|\cdot|2+5\mathbf{i}|^2\cdot|3-2\mathbf{i}|} =$$

$$= \sqrt{\frac{(4+1)^2 2^3(9+4)}{(16+1)^3(1+4)(4+25)^2(9+4)}} = \sqrt{\frac{5^2\cdot 2^3\cdot 13}{17^3\cdot 5\cdot 29^2\cdot 13}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2^2\cdot 2}{17^3\cdot 29^2}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2^2\cdot 2\cdot 17}{17^4\cdot 29^2}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{170}}{17^2\cdot 29} = \frac{2\sqrt{170}}{8381}. \qquad \blacksquare$$

94. Αν $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, δείξτε τις ισοδυναμίες:

(i) $|z|^2 = |z^2-1| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = \frac{1}{2}$.

(ii) $|z_1+z_2| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(iii) $|z_1+\bar{z}_2| = |\bar{z}_1-z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1z_2) = 0$.

Απόδειξη: **(i)** $|z|^2 = |z^2-1| \Leftrightarrow |z|^4 = |z^2-1|^2 \Leftrightarrow \cancel{|z|^4} = \cancel{|z^2|^2} + 1 - 2\mathrm{Re}(z^2) \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2) = \frac{1}{2}$.

(ii) $|z_1+z_2| = |z_1-z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = |z_1-z_2|^2 \Leftrightarrow \cancel{|z_1|^2+|z_2|^2} + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \cancel{|z_1|^2+|z_2|^2} - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \Leftrightarrow 4\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 0$.

(iii) $|z_1+\bar{z}_2| = |\bar{z}_1-z_2| = |\overline{\bar{z}_1-z_2}| = |z_1-\bar{z}_2|$ και το αποτέλεσμα προκύπτει από το **(ii)** θέτοντας όπου z_2 το $\bar{z}_2$. $\blacksquare$

95. Δείξτε ότι $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im(z)}| \le \sqrt{2}\,|z|$.

Απόδειξη: $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im(z)}| \le \sqrt{2}\,|z| = \sqrt{2}\sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2} \Leftrightarrow \big(|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im(z)}|\big)^2 \le 2\big((\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2\big) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(z))^2+(\mathrm{Im}(z))^2+2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| \le 2(\mathrm{Re}(z))^2+2(\mathrm{Im}(z))^2 \Leftrightarrow \big(|\mathrm{Re}(z)|-|\mathrm{Im}(z)|\big)^2 \ge 0$. $\blacksquare$

96. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1z_2 \ne -1$ και $|z_1| = |z_2| = 1$. Τότε $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Εφόσον $|z_1| = |z_2| = 1$, έπεται ότι $z_1^{-1} = \bar{z}_1$ και $z_2^{-1} = \bar{z}_2$. Επομένως $\overline{\left(\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} =$

$$= \frac{\bar{z}_1+\bar{z}_2}{1+\bar{z}_1\bar{z}_2} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1z_2}} = \frac{\frac{z_2+z_1}{z_1z_2}}{\frac{z_1z_2+1}{z_1z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}. \qquad \blacksquare$$

97. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right| + \left|\dfrac{z-|z|}{2}\right| = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right| + \left|\dfrac{z-|z|}{2}\right| = |z| \Leftrightarrow \big|z+|z|\big| + \big|z-|z|\big| = 2|z| \Leftrightarrow \Big(\big|z+|z|\big|+\big|z-|z|\big|\Big)^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow \big|z+|z|\big|^2 + \big|z-|z|\big|^2 + 2\big|z^2-|z|^2\big| = 4|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2+|z|^2+2|z|\mathrm{Re}(z)+|z|^2+|z|^2 - 2|z|\mathrm{Re}(z) + 2\big|z^2-|z|^2\big| = 4|z|^2 \Leftrightarrow \big|z^2-|z|^2\big| = 0 \Leftrightarrow z^2 = |z|^2$. Αν $z = 0$, τότε $z \in \mathbb{R}$. Αν $z \ne 0$, τότε $z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow \bar{z}z^2 = (\bar{z}z)z = \bar{z}|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 z = |z|^2\bar{z} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

98. Αν $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ με $z_1 \ne -z_2$, $z_2 \ne -z_3$ και $z_3 \ne -z_1$, δείξτε ότι

$$\frac{|z_1|}{|z_2+z_3|} + \frac{|z_2|}{|z_3+z_1|} + \frac{|z_3|}{|z_1+z_2|} \ge \frac{3}{2}.$$

Απόδειξη: Επειδή $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$, έπεται ότι $\dfrac{1}{|z_1+z_2|} \ge \dfrac{1}{|z_1|+|z_2|}$ και παρόμοια για τα άλλα κλάσματα. Επομένως

$$\frac{|z_1|}{|z_2+z_3|}+\frac{|z_2|}{|z_3+z_1|}+\frac{|z_3|}{|z_1+z_2|}\geq\frac{|z_1|}{|z_2|+|z_3|}+\frac{|z_2|}{|z_3|+|z_1|}+\frac{|z_3|}{|z_1|+|z_2|}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{|z_1|}{|z_2|+|z_3|}+\frac{|z_2|}{|z_3|+|z_1|}+\frac{|z_3|}{|z_1|+|z_2|}\geq\frac{3}{2}$. Χάριν απλότητος θέτουμε $\alpha=|z_1|\geq 0$, $\beta=|z_2|\geq 0$ και $\gamma=|z_3|\geq 0$. Προφανώς $\alpha+\beta=|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|>0$, επειδή $z_1\neq -z_2$. Ομοίως $\beta+\gamma>0$ και $\gamma+\alpha>0$. Άρα πρέπει να δείξουμε

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}\geq\frac{3}{2}, \qquad \mathbf{(1)}$$

όπου $\alpha,\beta,\gamma\geq 0$ και $\alpha+\beta>0$, $\beta+\gamma>0$, $\gamma+\alpha>0$. Η σχέση **(1)** γράφεται ισοδύναμα

$$2\alpha(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)+2\beta(\beta+\gamma)(\alpha+\beta)+2\gamma(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geq 3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) \quad ,$$

η οποία μετά την εκτέλεση των πράξεων και την απαλοιφή ομοίων όρων καταλήγει στην ισοδύναμη

$$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\geq\alpha\beta^2+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\beta+\gamma^2\alpha+\alpha^2\gamma=\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha).$$

Τώρα έχουμε τις σχέσεις $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)\underset{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow}\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq$ $\geq\alpha\beta\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$. Ομοίως $\beta^3+\gamma^3\geq\beta\gamma(\beta+\gamma)$ και $\gamma^3+\alpha^3\geq\gamma\alpha(\gamma+\alpha)$.
Προσθέτοντας τις τρεις τελευταίες σχέσεις συνάγουμε ότι

$$2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\geq\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha),$$

η οποία απένεμε να αποδειχθεί.
Για να αποφύγουμε τις πράξεις υπάρχει και άλλος τρόπος: Θέτουμε $x=|z_1|+|z_2|$, $y=|z_2|+|z_3|$ και $\omega=|z_3|+|z_1|$. Προφανώς $x+y+\omega=2(|z_1|+|z_2|+|z_3|)$. Τώρα η σχέση

$$\frac{|z_1|}{|z_2|+|z_3|}+\frac{|z_2|}{|z_3|+|z_1|}+\frac{|z_3|}{|z_1|+|z_2|}\geq\frac{3}{2}$$

γίνεται

$$\frac{|z_1|}{|z_2|+|z_3|}+1+\frac{|z_2|}{|z_3|+|z_1|}+1+\frac{|z_3|}{|z_1|+|z_2|}+1\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{|z_2|+|z_3|}+\frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{|z_3|+|z_1|}+\frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{|z_1|+|z_2|}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+y+\omega}{2y}+\frac{x+y+\omega}{2\omega}+\frac{x+y+\omega}{2x}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{y}{\omega}+\frac{\omega}{y}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{x}{\omega}+\frac{\omega}{x}\Big)+\frac{3}{2}\geq\frac{9}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)+\Big(\frac{y}{\omega}+\frac{\omega}{y}\Big)+\Big(\frac{x}{\omega}+\frac{\omega}{x}\Big)\geq 6,$$

η οποία ισχύει γιατί $\lambda+\frac{1}{\lambda}\geq 2$, για κάθε θετικό λ. ∎

99. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(i) $z^2=-|z|$.
(ii) $z^2=|z|$.

<u>**Λύση:**</u> **(i)** $z^2=-|z|$. Προφανώς το 0 είναι λύση της εξίσωσης. Έστω τώρα $z=x+y\mathbf{i}$ με $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε $x^2-y^2+2xy\mathbf{i}=-\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$. Επομένως $xy=0$. Αν $x=0$, τότε $-y^2=-|y|\Leftrightarrow|y|^2=|y|\Leftrightarrow|y|(|y|-1)=0\Leftrightarrow\big(y=0$ ή $y=\pm 1\big)$. Άρα $z=0$ ή $z=\mathbf{i}$ ή $z=-\mathbf{i}$. Έστω $x\neq 0$. Τότε $y=0$ και κατά συνέπεια $0\leq x^2=-|x|\leq 0\Leftrightarrow x=0$, αντίφαση. Παίρνουμε τις λύσεις $z=0$ ή $z=\mathbf{i}$ ή $z=-\mathbf{i}$.
(ii) <u>$z^2=|z|$.</u> Όπως προηγουμένως θέτουμε $z=x+y\mathbf{i}$, όπου $x,y\in\mathbb{R}$. Έχουμε $x^2-y^2+2xy\mathbf{i}=$ $=\sqrt{x^2+y^2}\in\mathbb{R}$. Άρα $x=0$ ή $y=0$. Αν $x=0$, τότε $|z|=-y^2\leq 0\leq|z|$ και άρα $y=0$, οπότε παίρνουμε τη μηδενική λύση. Έστω $x\neq 0$. Τότε $y=0$ και $x^2=|z|=|x|$, δηλαδή $|x|(|x|-1)=0\Leftrightarrow\big(x=0$ ή $x=\pm 1\big)$. Παίρνουμε τις λύσεις $z=0$ ή $z=1$ ή $z=-1$. ∎

100. Έστω $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Τότε $|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

<u>**Απόδειξη:**</u> $|z_1+z_2+z_3| = \left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right| = |\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3| \underset{\substack{\text{πρόταση } \mathbf{2.7}\\ \mathbf{(iii)}}}{=} \left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right| =$

$= \dfrac{|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|}{|z_1||z_2||z_3|} \underset{|z_1|=|z_2|=|z_3|=1}{=} |z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|.$ ■

101. **(i)** Έστω $z_1+z_2+z_3=0$ και $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$. Τότε $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.
(ii) Έστω $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$. Τότε $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.
(iii) Έστω $z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Τότε $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.
(iv) Έστω $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho$. Τότε $\rho|z_1+z_2+z_3|=|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|$.

<u>**Λύση:**</u> **(i)** $z_1+z_2+z_3=0 \Leftrightarrow z_1=-(z_2+z_3) \Rightarrow z_1^2=(z_2+z_3)^2=z_2^2+z_3^2+2z_2z_3 \underset{z_1^2=-z_2^2-z_3^2}{=} -z_1^2+2z_2z_3 \Leftrightarrow 2z_1^2=2z_2z_3 \Rightarrow z_1^2=z_2z_3 \Rightarrow |z_1|^2=|z_2||z_3| \Rightarrow |z_1|^3=|z_1z_2z_3|$. Ομοίως $|z_2|^3=|z_3|^2=|z_1z_2z_3|$. Επομένως $|z_1|^3=|z_2|^3=|z_3|^3 \Leftrightarrow |z_1|=|z_2|=|z_3|$.

(ii) <u>**1η απόδειξη:**</u> Έστω $w_1=z_1-z_2$, $w_2=z_2-z_3$ και $w_3=z_3-z_1$. Τότε προφανώς $w_1+w_2+w_3=0$. Επίσης $w_1^2+w_2^2+w_3^2=(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2=2(z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1)=0$. Εφαρμόζοντας το **(i)** με τα w_1, w_2 και w_3 στη θέση των z_1, z_2 και z_3 προκύπτει ότι $|w_1|=|w_2|=|w_3|$, δηλαδή $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

<u>**2η απόδειξη:**</u> $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-z_3^2+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 \Leftrightarrow z_1^2+z_2^2-2z_1z_2=-z_3^2-z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2=z_3(z_2-z_3)-z_1(z_2-z_3)=(z_3-z_1)(z_2-z_3) \Rightarrow (z_1-z_2)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1) \Rightarrow |z_1-z_2|^3=|z_1-z_2||z_2-z_3||z_3-z_1|$.
Ομοίως $|z_2-z_3|^3=|z_3-z_1|^3=|z_1-z_2||z_2-z_3||z_3-z_1|$.
Επομένως $|z_1-z_2|^3=|z_2-z_3|^3=|z_3-z_1|^3 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.

<u>**3η απόδειξη:**</u> $z_1^2+z_2^2+z_3^2-z_1z_2-z_2z_3-z_3z_1=0 \Leftrightarrow 2z_1^2+2z_2^2+2z_3^2-2z_1z_2-2z_2z_3-2z_3z_1==0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2+(z_3-z_1)^2=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2+\big((z_2-z_1)+(z_1-z_3)\big)^2+(z_3-z_1)^2==0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2+(z_1-z_2)^2+2(z_2-z_1)(z_3-z_1)+(z_1-z_3)^2+(z_1-z_3)^2=0 \Leftrightarrow 2(z_1-z_2)^2++2(z_1-z_2)(z_1-z_3)+2(z_1-z_3)^2=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^2+(z_1-z_2)(z_1-z_3)+(z_1-z_3)^2=0 \Rightarrow \Rightarrow \big((z_1-z_2)-(z_1-z_3)\big)\big((z_1-z_2)^2+(z_1-z_2)(z_1-z_3)+(z_1-z_3)^2\big)=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^3--(z_1-z_3)^3=0 \Leftrightarrow (z_1-z_2)^3=(z_1-z_3)^3 \Rightarrow |z_1-z_2|^3=|z_1-z_3|^3 \Leftrightarrow |z_1-z_2|=|z_1-z_3|$.
Ομοίως $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|$.

(iii) Έστω $\rho=|z_1|=|z_2|=|z_3|$. Τότε $z_1+z_2=-z_3 \Rightarrow |z_1+z_2|^2=|z_3|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2++2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_3|^2 \Leftrightarrow 2\rho^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=\rho^2 \Leftrightarrow \rho^2=-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$. Άρα $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2++|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=2\rho^2+\rho^2=3\rho^2$. Άρα $|z_1-z_2|=\rho\sqrt{3}$. Ομοίως $|z_2-z_3|=|z_3-z_1|==\rho\sqrt{3}$.

(iv) $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|^2=(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\overline{(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)}=(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(\bar{z}_1\bar{z}_2++\bar{z}_2\bar{z}_3+\bar{z}_3\bar{z}_1)=|z_1|^2|z_2|^2+|z_2|^2z_3\bar{z}_1+|z_1|^2z_3\bar{z}_2+|z_2|^2z_1\bar{z}_3+|z_2|^2|z_3|^2+|z_3|^2z_1\bar{z}_2+|z_1|^2z_2\bar{z}_3++|z_3|^2z_2\bar{z}_1+|z_3|^2|z_1|^2=3\rho^4+\rho^2(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)+\rho^2(z_2\bar{z}_3+\bar{z}_3z_2)+\rho^2(z_3\bar{z}_1+\bar{z}_3z_1)=3\rho^4+2\rho^2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)++2\rho^2\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3)+2\rho^2\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)$.
Απ' την άλλη μεριά έχουμε: $\rho^2|z_1+z_2+z_3|^2=\rho^2\big(|z_1+z_2|^2+|z_3|^2+2\mathrm{Re}((z_1+z_2)\bar{z}_3)\big)==\rho^2(|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+|z_3|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_3)+2\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3))=\rho^2(3\rho^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+2\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3)++2\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)=3\rho^4+2\rho^2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+2\rho^2\mathrm{Re}(z_2\bar{z}_3)+2\rho^2\mathrm{Re}(z_3\bar{z}_1)$. ■

102. Δείξτε ότι αν $z_1,z_2,w\in\mathbb{C}$ με $w^2=z_1^2-z_2^2$, τότε

$$|z_1-w|+|z_1+w|=|z_1+z_2|+|z_1-z_2|$$

<u>**Απόδειξη:**</u> $(|z_1-w|+|z_1+w|)^2=|z_1-w|^2+|z_1+w|^2+2|(z_1-w)(z_1+w)| \underset{\substack{\text{κανόνας}\\ \text{παραλληλογράμμου}}}{=} = 2|z_1|^2+2|w|^2+2|z_1^2-w^2|=2|z_1|^2+2|z_1^2-z_2^2|+2|z_1^2-(z_1^2-z_2^2)|=2|z_1|^2+2|z_2|^2+2|z_1^2-z_2^2|$ και $(|z_1+z_2|+|z_1-z_2|)^2=|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2+2|(z_1+z_2)(z_1-z_2)| \underset{\substack{\text{κανόνας}\\ \text{παραλληλογράμμου}}}{=} 2|z_1|^2+$

$+2|z_2|^2 + 2|z_1^2 - z_2^2|$. ■

103. Να αποδειχθεί ότι ο μιγαδικός αριθμός $z \neq -1$ έχει μέτρο τη μονάδα αν και μόνον αν $z = \dfrac{1+\mathbf{i}\alpha}{1-\mathbf{i}\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη: Προφανώς $\left|\dfrac{1+\mathbf{i}\alpha}{1-\mathbf{i}\alpha}\right|^2 = \dfrac{|1+\alpha^2|}{|1+\alpha^2|} = 1$ και άρα $|z| = \left|\dfrac{1+\mathbf{i}\alpha}{1-\mathbf{i}\alpha}\right| = 1$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $z = x + y\mathbf{i} \neq -1$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ και $x^2 + y^2 = 1$. Αναζητούμε πραγματικό α με την ιδιότητα $z = x + y\mathbf{i} = \dfrac{1+\mathbf{i}\alpha}{1-\mathbf{i}\alpha}$, ισοδύναμα $x + \alpha y + (y - \alpha x)\mathbf{i} = 1 + \mathbf{i}\alpha \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha y = 1 \\ y - \alpha x = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha y = 1 - x \\ \alpha(x+1) = y \end{cases}$$

Αν $x = -1$, τότε από τη σχέση $x^2 + y^2 = 1$ ή τη σχέση $\alpha(x+1) = y$ προκύπτει ότι $y = 0$. Αλλά τότε $z = -1$, άτοπο. Επομένως $x \neq -1$ και η σχέση $\alpha(x+1) = y$ μας δίνει $\alpha = \dfrac{y}{x+1}$.
Η σχέση $\alpha y = 1 - x$ γράφεται $\dfrac{y^2}{x+1} = 1 - x \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$, που ξέρουμε ότι ισχύει.

Τώρα, $\dfrac{1+\mathbf{i}\dfrac{y}{x+1}}{1-\mathbf{i}\dfrac{y}{x+1}} = \dfrac{\dfrac{x+1+y\mathbf{i}}{x+1}}{\dfrac{x+1-y\mathbf{i}}{x+1}} = \dfrac{x+1+y\mathbf{i}}{x+1-y\mathbf{i}} = \dfrac{(x+1+y\mathbf{i})^2}{(x+1)^2+y^2} = \dfrac{x^2+\overbrace{1-y^2}^{x^2}+2x+2y\mathbf{i}+2yx\mathbf{i}}{x^2+y^2+2x+1} =$

$$\underset{x^2+y^2=1}{=} \frac{2x^2+2x+2y\mathbf{i}(x+1)}{2+2x} = \frac{x(x+1)+\mathbf{i}y(x+1)}{1+x} = x + y\mathbf{i} = z.$$ ■

104. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.
Λύση: Θέτουμε $z = x + y\mathbf{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε: $4(x^2 - y^2 + 2xy\mathbf{i}) + 8(x^2 + y^2) - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 12x^2 + 4y^2 - 3 + 8xy\mathbf{i} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + 4y^2 - 3 = 0 \\ xy = 0 \end{cases}.$$

Αν $x = 0$, τότε $4y^2 = 3 \Leftrightarrow y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Παίρνουμε τις λύσεις $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$.
Αν $y = 0$, τότε $12x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2}$. Παίρνουμε τις λύσεις $z = \pm\dfrac{1}{2}$. ■

105. **(i)** Βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ισχύει

$$|z|^2 - 2\mathbf{i}z + 2\alpha(1+\mathbf{i}) = 0,$$

όπου $\alpha \geq 0$, περιορίζοντας κατάλληλα τον πραγματικό α.

(ii) Αν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ με $z_3 z_4 \neq 0$ και $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leq 1$, δείξτε ότι $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\dfrac{z_2}{z_4}\right|^2 \geq |z_1 + z_2|^2$.

Λύση: **(i)** Έστω $z = x + y\mathbf{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε η σχέση $|z|^2 - 2\mathbf{i}z + 2\alpha(1+\mathbf{i}) = 0$ γράφεται $x^2 + y^2 - 2\mathbf{i}(x + y\mathbf{i}) + 2\alpha + 2\mathbf{i}\alpha = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha + 2\mathbf{i}(-x + \alpha) = 0$. Επομένως $x = \alpha$ και άρα $y^2 + 2y + \alpha^2 + 2\alpha = 0$. Το τριώνυμο αυτό ως προς y έχει πραγματική λύση, επομένως η διακρίνουσά του είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.
Επομένως $4 - 4(\alpha^2 + 2\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \alpha^2 + 2\alpha \Leftrightarrow 2 \geq (\alpha+1)^2 \underset{\alpha\geq 0}{\Leftrightarrow} \alpha + 1 \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq \alpha \leq \sqrt{2} - 1$.

Τότε $y = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha}$. Επομένως $z = \alpha + \mathbf{i}\big(-1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha}\big)$ ή $z = \alpha - \mathbf{i}\big(1 + \sqrt{1 - \alpha^2 - 2\alpha}\big)$, όπου $0 \leq \alpha \leq \sqrt{2} - 1$.

(ii) $|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\dfrac{z_2}{z_4}\right|^2 \geq \big(|z_1| + |z_2|\big)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$,

ισοδύναμα $|z_4|^2|z_1|^2+|z_3|^2|z_2|^2 \geq |z_1|^2|z_3|^2|z_4|^2+|z_2|^2|z_3|^2|z_4|^2+2|z_1||z_2||z_3|^2|z_4|^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |z_1|^2|z_4|^2\big(1-|z_3|^2\big)+|z_2|^2|z_3|^2\big(1-|z_4|^2\big)-2|z_1||z_2||z_3|^2|z_4|^2 \geq 0$. Από τη σχέση $|z_3|^2+|z_4|^2 \leq 1$ συνάγουμε ότι $1-|z_3|^2 \geq |z_4|^2$ και $1-|z_4|^2 \geq |z_3|^2$.
Επομένως $|z_1|^2|z_4|^2\big(1-|z_3|^2\big)+|z_2|^2|z_3|^2\big(1-|z_4|^2\big)-2|z_1||z_2||z_3|^2|z_4|^2 \geq |z_1|^2|z_4|^4+|z_2|^2|z_3|^4-$
$-2|z_1||z_2||z_3|^2|z_4|^2=\big(|z_1||z_4|^2-|z_2||z_3|^2\big)^2 \geq 0$. ■

106. Αν οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν τις σχέσεις $|z_1+z_2|=|z_1|=|z_2|$, δείξτε ότι $|z_1-z_2|=$
$=\sqrt{3}|z_1|$.
Απόδειξη: Έχουμε $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1|^2 \underset{|z_1|=|z_2|}{\Leftrightarrow} |z_1|^2=|z_2|^2=$
$=-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$.
Τώρα, $|z_1-z_2|=\sqrt{3}|z_1| \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=3|z_1|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=3|z_1|^2 \underset{|z_1|=|z_2|}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow -2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1|^2$ που αποδείξαμε προηγουμένως. ■

107. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει η σχέση
$$1+2\mathbf{i}+3\mathbf{i}^2+\cdots+n\mathbf{i}^{n-1}=\frac{-(n+1)\mathbf{i}^{n+1}-n\mathbf{i}^n+\mathbf{i}}{2}.$$

108. Βρείτε το μέτρο του μιγαδικού $\left(\dfrac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}\right)^n$, όπου $n \in \mathbb{Z}$.

109. Βρείτε τον μιγαδικό z για τον οποίο ισχύει $|z-1|=|z-2|=|z-\mathbf{i}|$.

110. Αν $z=x+y\mathbf{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$, βρείτε τη σχέση μεταξύ των x και y που ορίζεται από την ισότητα $|z-\mathbf{i}|=|z+2|$.

111. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(i) $z^2=|z|^2$ και
(ii) $z^2=-|z|^2$.

112. Να φέρετε στη μορφή $x+y\mathbf{i}$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$ τις παραστάσεις:
(i) $\dfrac{(2-\mathbf{i})^2-2(1+3\mathbf{i})}{(1+\mathbf{i})^2(2-\mathbf{i})}$
(ii) $(2-\mathbf{i}\sqrt{3})^{-2}-\dfrac{2}{1-4\mathbf{i}\sqrt{3}}$.

113. Βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών: **α)** $\dfrac{4-5\mathbf{i}}{2+\mathbf{i}}$, **β)** $\dfrac{\left(\sqrt{2}+\mathbf{i}\right)^3}{\mathbf{i}\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)^2}$ και

γ) $\left(\dfrac{3\mathbf{i}\left(\sqrt{3}+\mathbf{i}\sqrt{5}\right)\left(1-\mathbf{i}\sqrt{3}\right)}{4-\mathbf{i}\sqrt{3}}\right)^4$

(i) Φέρνοντάς τους στη μορφή $\alpha+\beta\mathbf{i}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
(ii) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του μέτρου των μιγαδικών.

114. Να λυθεί στο $\mathbb{C}$ η εξίσωση $z^2-\overline{z}+2=0$.

115. Να βρείτε τους μιγαδικούς z, για τους οποίους ο αριθμός $(z-2)(\overline{z}+\mathbf{i})$ είναι πραγματικός.

116. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{C}$ με τις εξής δύο ιδιότητες:
(i) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει μία και μόνον μία από τις σχέσεις: $z \in A$, $0 \in A$, $-z \in A$ και
(ii) Για κάθε $z, w \in A$, $z+w \in A$ και $zw \in A$. $\big($Δείξτε ότι $0 \notin A$, $\mathbf{i} \notin A$ και $-\mathbf{i} \notin A\big)$.

117. Βρείτε την ελάχιστη τιμή του θετικού ακεραίου n, για την οποία ισχύει $(1+\mathbf{i})^n = (1-\mathbf{i})^n$.

118. Έστω $\alpha = \dfrac{1+\mathbf{i}}{2}$. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$ ισχύει η σχέση

$$(1+\alpha)(1+\alpha^2)(1+\alpha^{2^2})\cdots(1+\alpha^{2^n}) = 2\alpha\Big(1-\frac{1}{2^{2^n}}\Big).$$

119. Έστω n θετικός ακέραιος και $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι

$$\big|(1-|z_1|)(1-z_2)\cdots(1-z_n)\big| \geq 1-|z_1|-|z_2|-\cdots-|z_n|.$$

120. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και $w = (\mathbf{i}z-2)(\overline{z}+\mathbf{i})$. Να δείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία

$$z \in \mathbb{I} \Leftrightarrow w \in \mathbb{I}.$$

121. Για έναν μιγαδικό z ισχύει: $z^2 - z + 1 = 0$. Να δείξετε ότι:

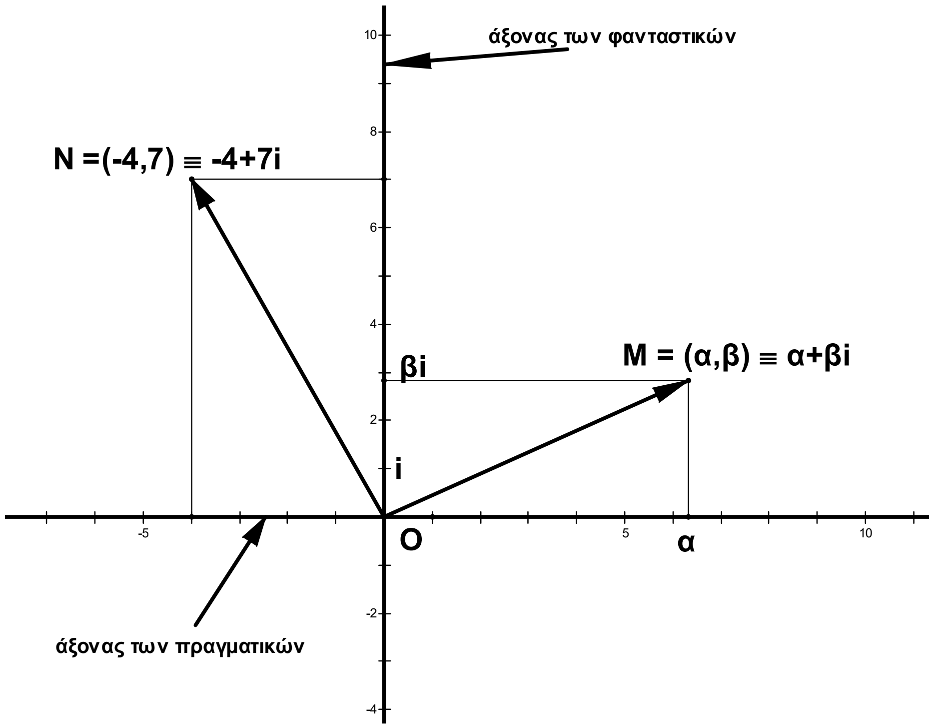
(i) $z^{40} + z^{20} + 1 = 0$ και **(ii)** $z^{70} + \dfrac{1}{z^{70}} = -1$.

$\big($*Υπόδειξη: Δείξτε ότι* $z^3 = -1\big)$.

122. Να βρεθούν οι μιγαδικοί z, για τους οποίους ο αριθμός $-z^2 + 2z - 3$ είναι **θετικός** πραγματικός.

2.4 Γεωμετρική (Ανα)παράσταση των Μιγαδικών Αριθμών

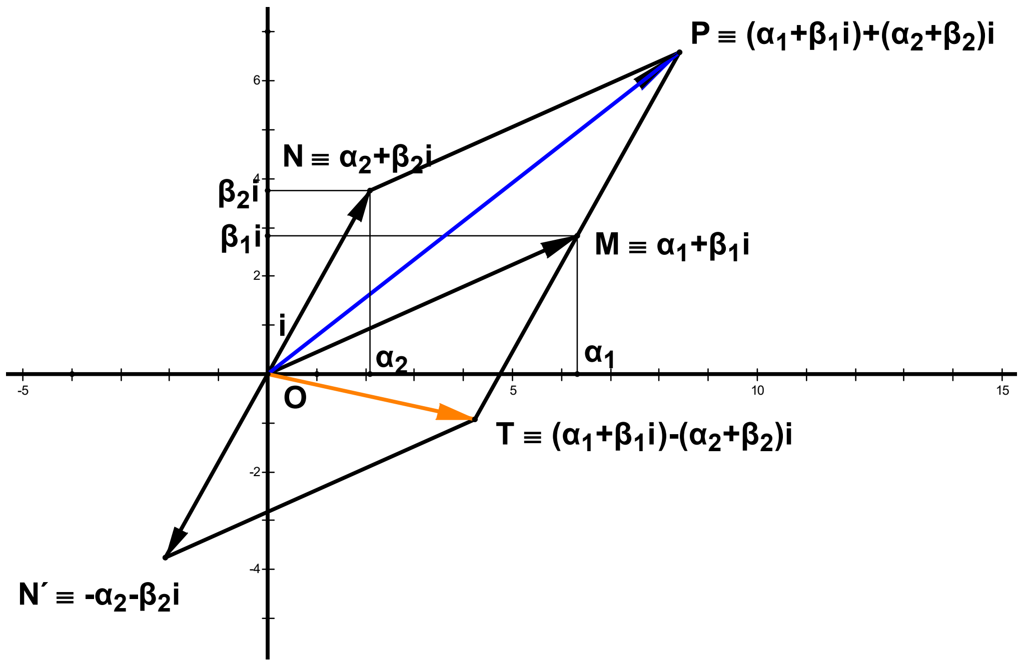
Είδαμε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί $\alpha + \beta\mathbf{i}$ ταυτίζονται με τα ζεύγη $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, τα οποία με τη σειρά τους ταυτίζονται με τα σημεία του επιπέδου xOy. Έτσι καλούμε το xOy **επίπεδο των μιγαδικών αριθμών**. Έχουμε λοιπόν την παρακάτω εικόνα:



Σχήμα 13

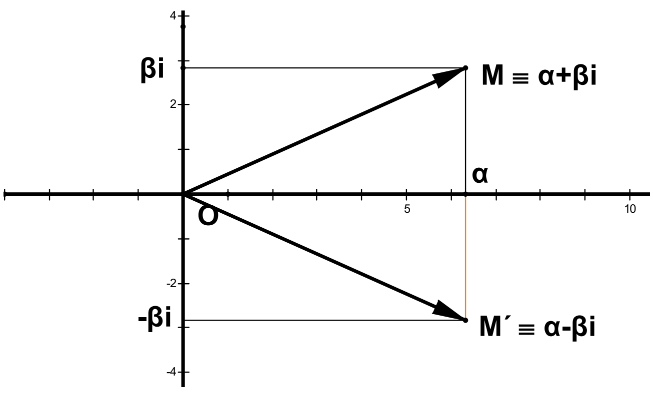
Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός $\alpha + \beta\mathbf{i}$ ταυτίζεται με το σημείο $\mathrm{M}(\alpha, \beta)$ ή και με το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$. Για παράδειγμα, ο μιγαδικός $-4 + 7\mathbf{i}$ ταυτίζεται με το σημείο N ή το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Η φανταστική μονάδα **i** δεν ταυτίζεται με το σύνηθες διάνυσμα $\vec{i}$ του άξονα $x'x$ των πραγματικών, αλλά με το διάνυσμα $\vec{j}$ του άξονα $y'y$ των φανταστικών.
Με βάση τον ορισμό της πρόσθεσης (άρα και της αφαίρεσης) στο $\mathbb{C}$, οι πράξεις αυτές αντιστοιχούν στην πρόσθεση και την αφαίρεση των αντίστοιχων διανυσμάτων στο $x\mathrm{O}y$ επίπεδο. Έχουμε λοιπόν το επόμενο σχήμα:



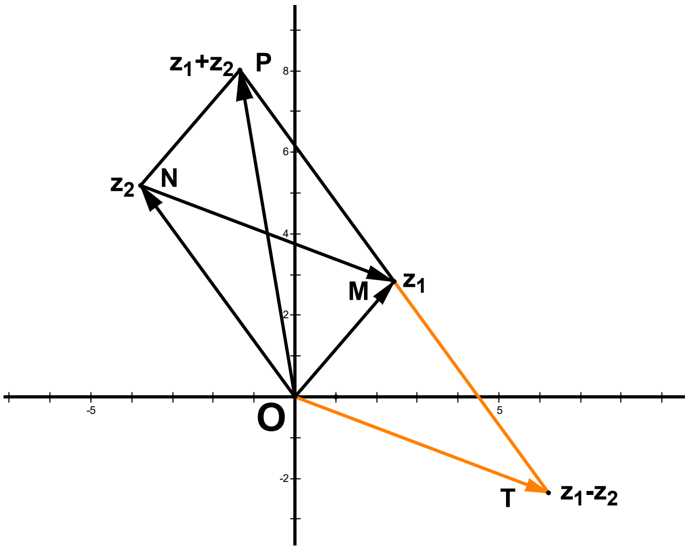
Σχήμα 14

Έτσι το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ παριστάνει το άθροισμα $(\alpha_1+\beta_1\mathbf{i})+(\alpha_2+\beta_2\mathbf{i}) = \alpha_1+\alpha_2+(\beta_1+\beta_2)\mathbf{i}$, το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{ON'}}$ τον $-\alpha_2-\beta_2\mathbf{i}$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ τη διαφορά $(\alpha_1+\beta_1\mathbf{i})-(\alpha_2+\beta_2\mathbf{i}) =$ $= \alpha_1-\alpha_2+(\beta_1-\beta_2)\mathbf{i}$.
Τώρα, για τον πολλαπλασιασμό η γεωμετρική εικόνα θα καταστεί σαφής αφού πρώτα μιλήσουμε για την **τριγωνομετρική μορφή** ενός μιγαδικού αριθμού.
Αν $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στον μιγαδικό $z=\alpha+\beta\mathbf{i}$, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM'}}$ που αντιστοιχεί στον συζυγή $\bar{z}=\alpha-\beta\mathbf{i}$ είναι προφανώς το συμμετρικό του $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ ως προς τον άξονα των πραγματικών $x'x$.



Σχήμα 15

Κανόνας του παραλληλογράμμου: Το άθροισμα z_1+z_2 παριστάνεται από το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ και η διαφορά z_1-z_2 από το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{NM}}$. Δηλαδή, με άλλα λόγια ο κανόνας του παραλληλογράμμου $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2==2|z_1|^2+2|z_2|^2$ μεταφράζεται σε $\mathrm{OP}^2+\mathrm{NM}^2=2\mathrm{OM}^2+2\mathrm{ON}^2$, δηλαδή στο γνωστό κανόνα ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των πλευρών αυτού. Αυτό φυσικά το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα γεωμετρικά από τα θεωρήματα των διαμέσων.



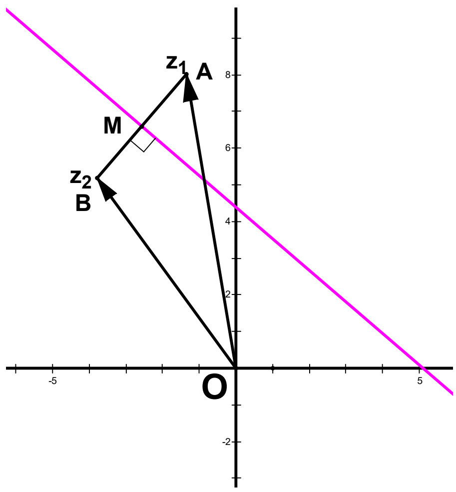
Σχήμα 16

Έστω τώρα δύο μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 με $z_1\neq z_2$. Τι παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο η εξίσωση $|z-z_1|=|z-z_2|$; Προφανώς παριστάνει το σύνολο των μιγαδικών που ισαπέχουν από τους z_1 και z_2. Γεωμετρικά, αυτοί αποτελούν τη **μεσοκάθετο** του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τις εικόνες των z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο. Έχουμε $|z-z_1|=|z-z_2|\Leftrightarrow|z-z_1|^2==|z-z_2|^2\Leftrightarrow|z|^2+|z_1|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_1)=|z|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z\bar{z}_2)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{|z_1|^2-|z_2|^2=2\mathrm{Re}(z(\bar{z}_1-\bar{z}_2))}$$

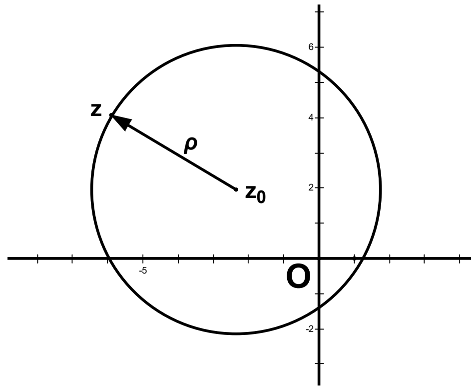
Αν ξέρουμε τις συντεταγμένες των z_1 και z_2, τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη μεσοκάθετο σε καρτεσιανή μορφή.

Παράδειγμα: Έστω η εξίσωση $|z+1+2\mathbf{i}|=|z-2+5\mathbf{i}|$. Προφανώς $z_1=-1-2\mathbf{i}$ και $z_2=2-5\mathbf{i}$. Άρα $\bar{z}_1-\bar{z}_2=-3-3\mathbf{i}$ και αν $z=x+y\mathbf{i}$, τότε $z(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=-3(x+y\mathbf{i})(1+\mathbf{i})=-3(x-y+(x+y)\mathbf{i})$. Συνεπώς $2\mathrm{Re}(z(\bar{z}_1-\bar{z}_2))=6(y-x)$. Επίσης, $|z_1|^2=1+4=5$ και $|z_2|^2=4+25=29$.
Επομένως $|z_1|^2-|z_2|^2=5-29=-24$. Άρα $-24=6(y-x)\Leftrightarrow\boxed{y=x-4}$ η ζητούμενη εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες.



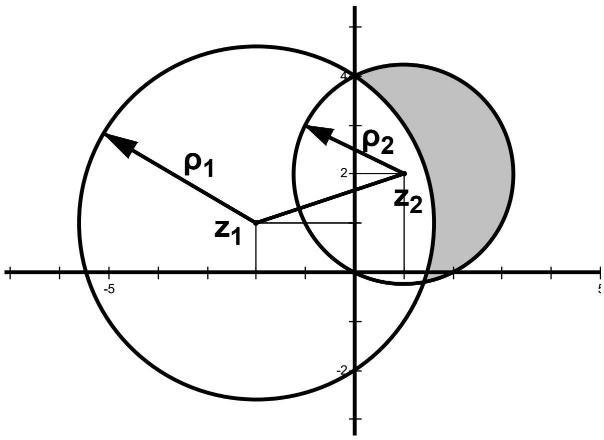
Σχήμα 17

Εξίσωση κύκλου: Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ σταθερός μιγαδικός αριθμός και $\rho \in (0, +\infty)$. Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που απέχουν από τον z_0 απόσταση $|z - z_0| = \rho$ προφανώς παριστάνει κύκλο με **κέντρο την εικόνα του z_0 στο μιγαδικό επίπεδο και ακτίνα ρ**. Το σύνολο των μιγαδικών z με την ιδιότητα $|z - z_0| < \rho$ προφανώς παριστάνει το **εσωτερικό** του παραπάνω κύκλου, ενώ το σύνολο των μιγαδικών z με την ιδιότητα $|z - z_0| > \rho$ παριστάνει το **εξωτερικό** του κύκλου αυτού.



Σχήμα 18

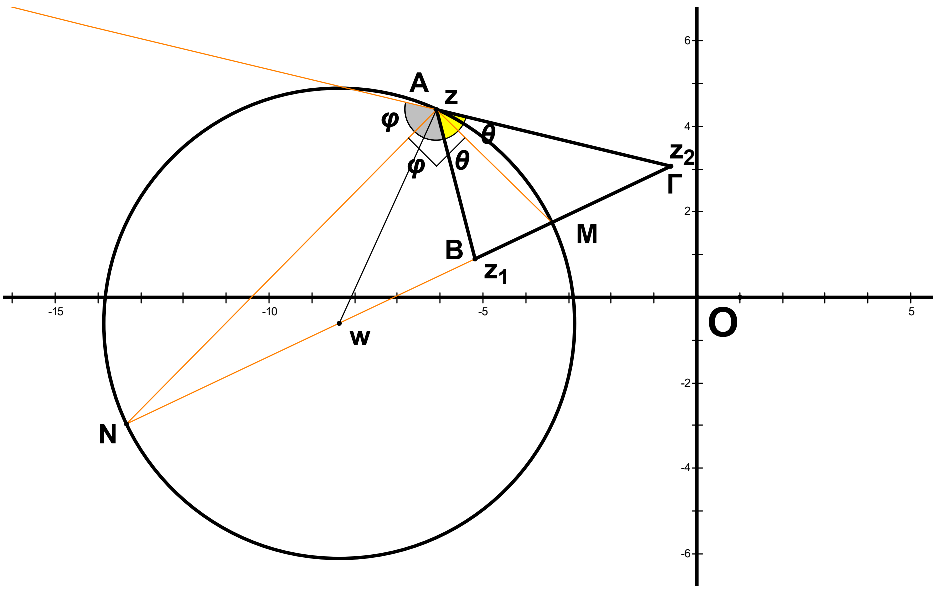
Παράδειγμα: Στο επόμενο σχήμα δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα $z_1 = -2 + \mathbf{i}$ και $z_2 = 1 + 2\mathbf{i}$ και ακτίνες $\rho_1 = \sqrt{13}$ και $\rho_2 = \sqrt{5}$ αντίστοιχα. Το σκιασμένο χωρίο παριστά όλους τους μιγαδικούς z που βρίσκονται έξω στο εξωτερικό του κύκλου με κέντρο z_1 και στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το z_2, δηλαδή εκείνων των $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις $|z + 2 - \mathbf{i}| > \sqrt{13}$ και $|z - 1 - 2\mathbf{i}| < \sqrt{5}$.



Σχήμα 19

Απολλώνιος κύκλος: Έστω $z_1 \neq z_2$ δύο μιγαδικοί αριθμοί και λ θετικός πραγματικός, **διάφορος του 1**. Να παρασταθεί γεωμετρικά το σύνολο των μιγαδικών z με $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda$. **<u>Λύση</u>:**

Έχουμε: $\dfrac{|z - z_1|}{|z - z_2|} = \lambda \Leftrightarrow |z - z_1| = \lambda |z - z_2| \Leftrightarrow |z - z_1|^2 = \lambda^2 |z - z_2|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_1) = \lambda^2 |z|^2 + \lambda^2 |z_2|^2 - 2\lambda^2 \mathrm{Re}(z\bar{z}_2) \Leftrightarrow (1 - \lambda^2)|z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{(z_1 - \lambda^2 z_2)}) = \lambda^2 |z_2|^2 - |z_1|^2 \Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z \cdot \overline{\left(\dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}\right)}\right) = \dfrac{\lambda^2 |z_2|^2 - |z_1|^2}{1 - \lambda^2} \Leftrightarrow |z|^2 - 2\mathrm{Re}\left(z \cdot \overline{\left(\dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}\right)}\right) + \left|\dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}\right|^2 = \dfrac{\lambda^2 |z_2|^2 - |z_1|^2}{1 - \lambda^2} + \left|\dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}\right|^2 \Leftrightarrow \left|z - \dfrac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1 - \lambda^2}\right|^2 = \dfrac{\lambda^2 |z_2|^2 - |z_1|^2}{1 - \lambda^2} + \dfrac{|z_1|^2 + \lambda^4 |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda^2 z_1 \bar{z}_2)}{(1 - \lambda^2)^2} = \dfrac{\lambda^2 |z_2|^2 - \cancel{|z_1|^2} - \cancel{\lambda^4 |z_2|^2} + \lambda^2 |z_1|^2 + \cancel{|z_1|^2} + \cancel{\lambda^4 |z_2|^2} - 2\mathrm{Re}(\lambda^2 z_1 \bar{z}_2)}{(1 - \lambda^2)^2} = \dfrac{\lambda^2 (|z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2))}{(1 - \lambda^2)^2} = \left(\dfrac{\lambda |z_1 - z_2|}{1 - \lambda^2}\right)^2$.

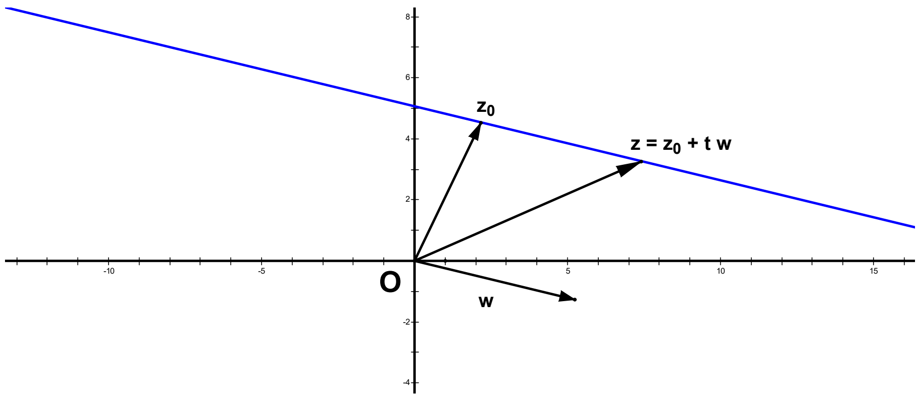


Σχήμα 20

Κατά συνέπεια $\left|z-\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}\right| = \dfrac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}$, δηλαδή κύκλος με κέντρο $w=\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$ και ακτίνα $\rho=\dfrac{\lambda|z_1-z_2|}{|1-\lambda^2|}$.

Το κέντρο $w=\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}$ βρίσκεται στην ευθεία ΒΓ, όπου Β και Γ οι εικόνες των z_1 και z_2 στο μιγαδικό επίπεδο. Πράγματι, $z_1-w=z_1-\dfrac{z_1-\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}=\dfrac{z_1-\lambda^2 z_1-z_1+\lambda^2 z_2}{1-\lambda^2}=-\dfrac{\lambda^2(z_1-z_2)}{1-\lambda^2}$.
Τα σημεία Μ και Ν που τέμνει ο Απολλώνιος κύκλος την πλευρά ΒΓ χωρίζουν αυτή σε μέσο και άκρο λόγο λ. Αν Α είναι η εικόνα του z, τότε οι ΑΜ και ΑΝ είναι η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της $\widehat{\mathrm{A}}$ αντίστοιχα. Γεωμετρικά ο Απολλώνιος κύκλος προκύπτει ως άμεση συνέπεια των θεωρημάτων εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου. ■

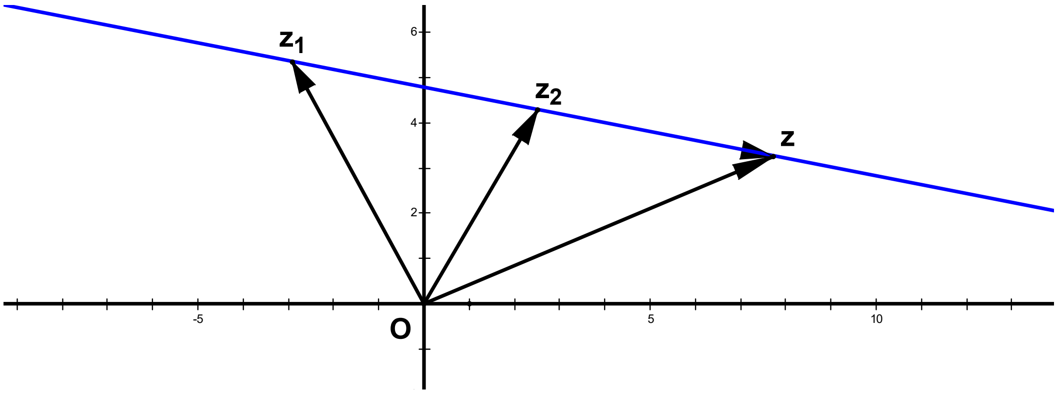
Εξίσωση ευθείας: Έστω $w=\kappa+\lambda\mathbf{i}\neq 0$ και $z_0=x_0+y_0\mathbf{i}$. Η ευθεία που περνά από τον z_0 και είναι παράλληλη προς τον w αποτελείται από τους μιγαδικούς z με την ιδιότητα $z-z_0=tw$, όπου $t\in\mathbb{R}$, δηλαδή $\dfrac{z-z_0}{w}=t\in\mathbb{R}$.



Σχήμα 21

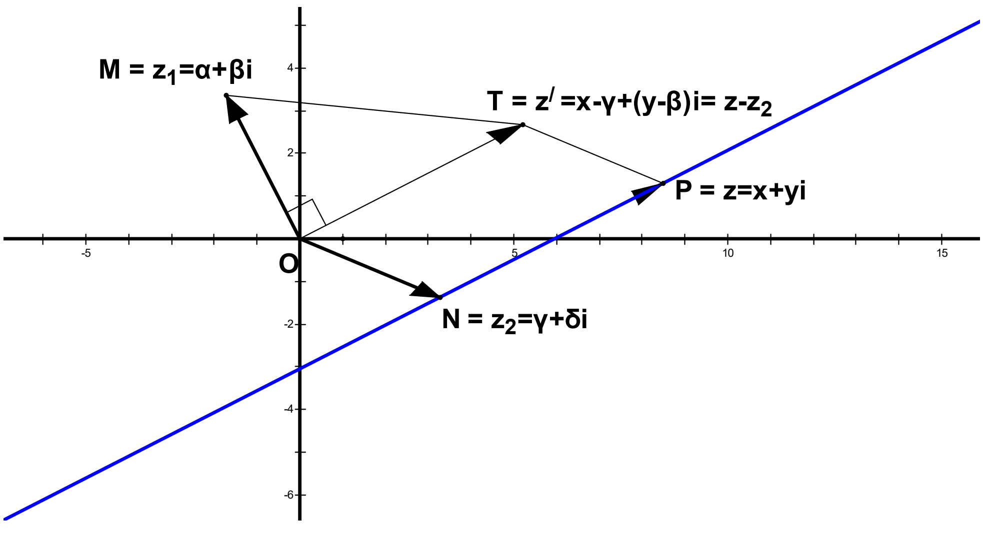
Αυτό είναι ισοδύναμο με $\operatorname{Im}\Big(\dfrac{z-z_0}{w}\Big)=0$. Αν $z=x+y\mathbf{i}$, τότε $\operatorname{Im}\Big(\dfrac{x-x_0+(y-y_0)\mathbf{i}}{\kappa+\lambda\mathbf{i}}\Big)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\Big(\dfrac{(x-x_0+(y-y_0)\mathbf{i})(\kappa-\lambda\mathbf{i})}{\kappa^2+\lambda^2}\Big)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\big(\kappa(x-x_0)+\lambda(y-y_0)+(\kappa(y-y_0)-\lambda(x-x_0))\mathbf{i}\big)=$ $=0 \Leftrightarrow \boxed{\kappa(y-y_0)-\lambda(x-x_0)=0} \Leftrightarrow \lambda(x-x_0)-\kappa(y-y_0)=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ \kappa & \lambda \end{vmatrix}=0$ που, σύμφωνα με αυτά που μάθαμε στη β′ λυκείου, εκφράζει την παραλληλία των διανυσμάτων $(x-x_0, y-y_0)=z-z_0$ και του $(\kappa,\lambda)=w$. Άρα σε μιγαδική μορφή η εξίσωση της ευθείας είναι $\operatorname{Im}\Big(\dfrac{z-z_0}{w}\Big)=0 \Leftrightarrow \operatorname{Im}\Big(\dfrac{(z-z_0)\bar{w}}{|w|^2}\Big)=0 \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{Im}((z-z_0)\bar{w})=0}$.

Η εξίσωση της ευθείας που περνά από δύο σημεία $z_1 \neq z_2$ του μιγαδικού επιπέδου προκύπτει αν πάρουμε $w=z_1-z_2$. Σ' αυτή την περίπτωση η εξίσωση της ευθείας είναι $\boxed{\operatorname{Im}\Big(\dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}\Big)=0}$.



Σχήμα 22

Μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $\mathrm{N}=z_2=\gamma+\delta\mathbf{i}$ και είναι κάθετη στον μιγαδικό $\mathrm{M}=z_1=\alpha+\beta\mathbf{i}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{NP}}=\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ αντιστοιχεί στον μιγαδικό $z-z_2$, όπου $z=x+y\mathbf{i}$ τυχόν σημείο της ζητούμενης ευθείας. Το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{MT}}$ αντιστοιχεί στον μιγαδικό $z'-z_1=z-z_2-z_1$. Το τρίγωνο ΟΜΤ είναι ορθογώνιο και επομένως έχουμε τη σχέση:



Σχήμα 23

$||\overrightarrow{\mathrm{OM}}||^2+||\overrightarrow{\mathrm{OT}}||^2=||\overrightarrow{\mathrm{MT}}||^2$, δηλαδή $|z_1|^2+|z-z_2|^2=|z-z_2-z_1|^2 \Leftrightarrow |z_1|^2+|z-z_2|^2=$

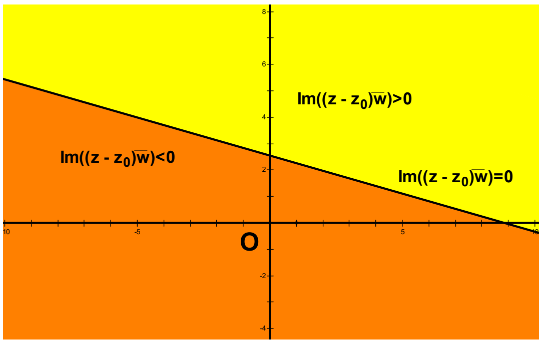
$= |z-z_2|^2 + |z_1|^2 - 2\mathrm{Re}((z-z_2)\bar{z}_1) \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Re}((z-z_2)\bar{z}_1) = 0}$, η εξίσωση της ευθείας σε μιγαδική μορφή.

Μπορούμε να εκφράσουμε σε μιγαδική μορφή και άλλα προβλήματα.

Είδαμε ότι η εξίσωση $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) = 0$, όπου $w = \kappa + \lambda\mathbf{i} \neq 0$ εκφράζει την ευθεία που περνά από την εικόνα του μιγαδικού z_0 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα που εκφράζει τον μιγαδικό w. Λογικό είναι να υποθέσουμε ότι οι σχέσεις $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) > 0$ και $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) < 0$ εκφράζουν **τα δύο ημιεπίπεδα** στα οποία η ευθεία χωρίζει το επίπεδο.

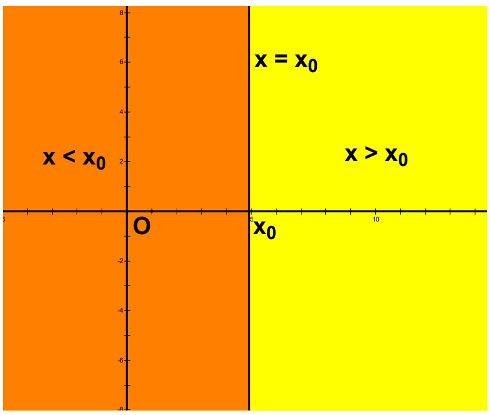
Αρχικώς θεωρούμε ότι $\kappa = \mathrm{Re}(w) \neq 0$. Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη προς τον w αν και μόνον αν είναι παράλληλη προς τον $-w$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\kappa > 0$.

Έστω $z = x + y\mathbf{i}$, $z_0 = x_0 + y_0\mathbf{i}$ και $w = \kappa + \lambda\mathbf{i}$ με $\kappa > 0$. Σε καρτεσιανή μορφή η σχέση $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) > 0$ γίνεται $\mathrm{Im}((x-x_0+(y-y_0)\mathbf{i})(\kappa-\lambda\mathbf{i})) > 0 \Leftrightarrow \kappa(y-y_0) - \lambda(x-x_0) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y > -\dfrac{\lambda}{\kappa}(x-x_0) + y_0$. Η τελευταία εξίσωση παριστάνει το ημιεπίπεδο που βρίσκεται **«πάνω»** από την ευθεία $y = -\dfrac{\lambda}{\kappa}(x-x_0) + y_0$, δηλαδή την ευθεία $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) = 0$. Εντελώς ανάλογα η σχέση $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) < 0$ παριστάνει το ημιεπίπεδο που βρίσκεται **«κάτω»** από την ευθεία $\mathrm{Im}((z-z_0)\bar{w}) = 0$.



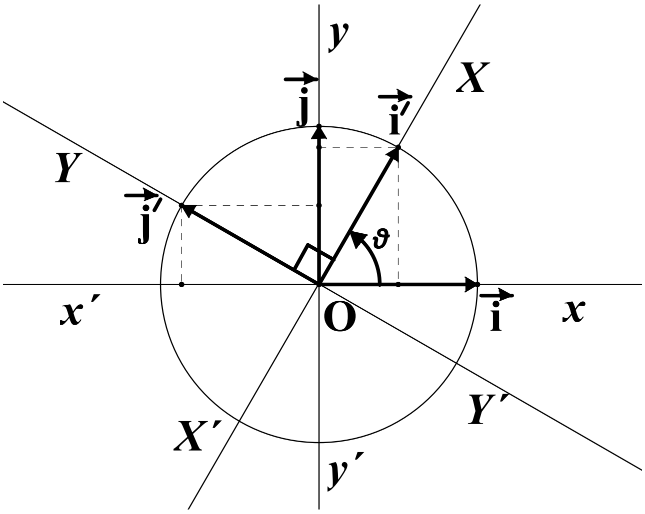
Σχήμα 24

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\kappa = \mathrm{Re}(w) = 0$, μπορούμε όπως προηγουμένως να θεωρήσουμε ότι $\lambda = \mathrm{Im}(w) > 0$. Άρα $w = \lambda\mathbf{i}$ με $\lambda > 0$. Τότε η εξίσωση της ευθείας γίνεται $\mathrm{Im}((z-z_0)(-\lambda\mathbf{i})) = 0$, δηλαδή $\mathrm{Re}(z-z_0) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z_0) \Leftrightarrow x = x_0$. Πρόκειται προφανώς για **κατακόρυφη** ευθεία. Αυτή χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα, το αριστερό $\mathrm{Re}(z-z_0) < 0 \Leftrightarrow x < x_0$ και το δεξιό $\mathrm{Re}(z-z_0) > 0 \Leftrightarrow x > x_0$.



Σχήμα 25

2.5 Βασικά Στοιχεία Τριγωνομετρίας



Σχήμα 26

Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σύστημα $x'\mathrm{O}x$. Τα διανύσματα βάσης είναι το $\overrightarrow{\mathbf{i}} = (1,0)$ και το $\overrightarrow{\mathbf{j}} = (0,1)$. $\big($Μην μπερδεύετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{i}}$ με τον μιγαδικό **i**. Το $\overrightarrow{\mathbf{i}}$ είναι το 1 και το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{j}}$ είναι ο μιγαδικός **i**$\big)$.

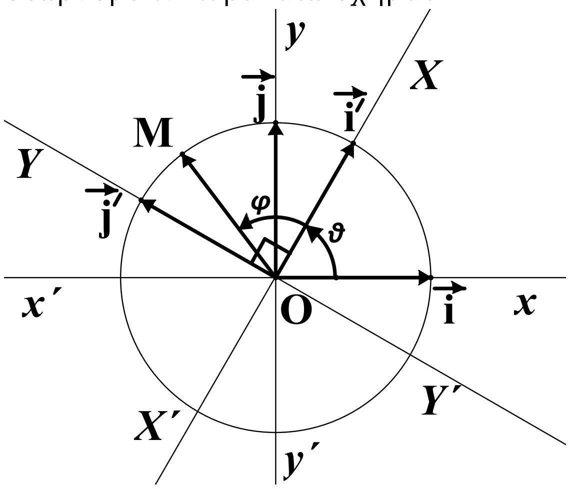
Περιστρέφουμε το σύστημα $x'\mathrm{O}x$ κατά γωνία $\hat{\vartheta}$ $\big($θετική ή αρνητική$\big)$ και παίρνουμε νέο σύστημα συντεταγμένων $X'\mathrm{O}X$ με διανύσματα βάσης $\overrightarrow{\mathbf{i}'}$ και $\overrightarrow{\mathbf{j}'}$. Προφανώς έχουμε:

$\overrightarrow{\mathbf{i}'} = \cos\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}}$ και

$\overrightarrow{\mathbf{j}'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \vartheta\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\vartheta)\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\vartheta)\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} =$
$= \sin(-\vartheta) \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos(-\vartheta) \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} = -\sin\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}}$. Έχουμε λοιπόν τους τύπους αλλαγής βάσης:

$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{\mathbf{i}'} &= \cos\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} \\ \overrightarrow{\mathbf{j}'} &= -\sin\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\vartheta \cdot \overrightarrow{\mathbf{j}} \end{aligned}} \qquad (1)$$

Έστω $\hat{\vartheta}$ και $\hat{\varphi}$ δύο γωνίες. Θεωρούμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 27

Στο σύστημα $x'\mathrm{O}x$ έχουμε προφανώς $\overrightarrow{OM} = \cos(\vartheta+\varphi)\cdot\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin(\vartheta+\varphi)\cdot\overrightarrow{\mathbf{j}}$ $\quad$ **(2)**.
Στο σύστημα $X'\mathrm{O}X$ έχουμε προφανώς $\overrightarrow{OM} = \cos\varphi\cdot\overrightarrow{\mathbf{i}'} + \sin\varphi\cdot\overrightarrow{\mathbf{j}'}$ και με αντικατάσταση με βάση τους τύπους **(1)** παίρνουμε

$$\overrightarrow{OM} = \cos\varphi\big(\cos\vartheta\cdot\overrightarrow{\mathbf{i}} + \sin\vartheta\cdot\overrightarrow{\mathbf{j}}\big) + \sin\varphi(-\sin\vartheta\cdot\overrightarrow{\mathbf{i}} + \cos\vartheta\cdot\overrightarrow{\mathbf{j}}) =$$
$$= (\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi)\overrightarrow{\mathbf{i}} + (\sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi)\overrightarrow{\mathbf{j}} \qquad \mathbf{(3)}.$$

Συγκρίνοντας τους τύπους **(2)** και **(3)** παίρνουμε

$$\begin{cases}\cos(\vartheta+\varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin(\vartheta+\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\sin\vartheta\end{cases} \qquad \mathbf{(4)}$$

Αν θέσουμε $-\varphi$ αντί φ παίρνουμε $\cos(\vartheta-\varphi) = \cos\vartheta\cos(-\varphi) - \sin\vartheta\sin(-\varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi$ και $\sin(\vartheta-\varphi) = \sin\vartheta\cos(-\varphi)+\cos\vartheta\sin(-\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi$. Επομένως

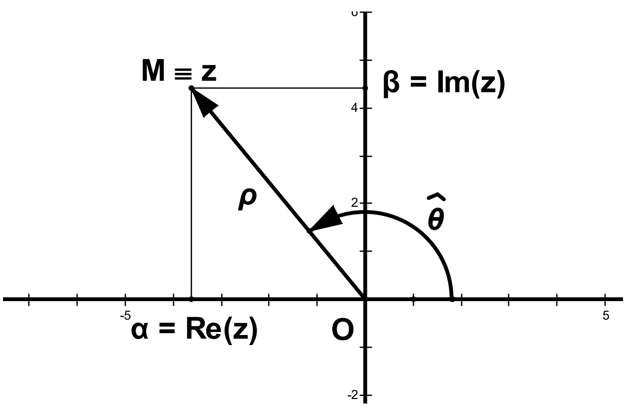
$$\begin{cases}\cos(\vartheta-\varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi\\ \sin(\vartheta-\varphi) = \sin\vartheta\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\varphi\end{cases} \qquad \mathbf{(5)}$$

Αν θέσουμε $\vartheta = \varphi$ παίρνουμε από τους τύπους **(4)** τους ακόλουθους σημαντικούς τύπους:

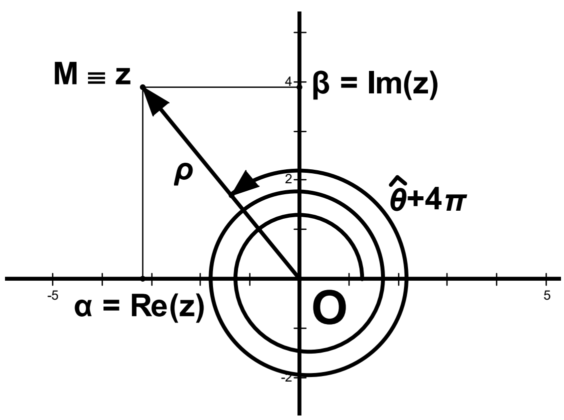
$$\begin{cases}\boxed{\cos 2\vartheta} = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta = \cos^2\vartheta - (1-\cos^2\vartheta) = \boxed{2\cos^2\vartheta - 1} =\\ \qquad = 2(1-\sin^2\vartheta) - 1 = \boxed{1 - 2\sin^2\vartheta} \quad \text{και}\\ \boxed{\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta}\end{cases}$$

2.6 Πολικές Συντεταγμένες-Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού

Θεωρούμε στο μιγαδικό επίπεδο έναν μη μηδενικό μιγαδικό $z = \alpha+\beta\mathbf{i}$. Το αντίστοιχο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\hat{\vartheta}$. Συνήθως τη γωνία $\hat{\vartheta}$ τη θεωρούμε στο διάστημα $[0, 2\pi)$. Άλλοι τη θεωρούν στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Εν πάση περιπτώσει, η γωνία $\hat{\vartheta}$ είναι η γωνία κατά την οποία όταν περιστραφεί ο θετικός ημιάξονας $\mathrm{O}x$ θα συμπέσει με την ημιευθεία που ορίζει το διάνυσμα $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.



Σχήμα 28



Σχήμα 29

Αν $\rho = |z| = \big|\big|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\big|\big| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ είναι το μέτρο του μιγαδικού z, ισοδύναμα το μέτρο $\big($μήκος$\big)$ του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, τότε έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{cases}\alpha = \rho\cos\vartheta\\ \beta = \rho\sin\vartheta\end{cases}$$

Επομένως $z = \alpha + \beta\mathbf{i} = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$. Η μορφή

$$\boxed{z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)}$$

λέγεται **τριγωνομετρική μορφή του μιγαδικού** $\boldsymbol{z}$. Τα στοιχεία του ζεύγους $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\vartheta})$ λέγονται **πολικές συντεταγμένες του Μ ή του** $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ **ή του μιγαδικού** $\boldsymbol{z}$. Η γωνία $\boldsymbol{\vartheta}$ λέγεται **όρισμα του** $\boldsymbol{z}$. Προφανώς για $z = 0$, $\rho = 0$ και ϑ οτιδήποτε.

2.7 Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση Μιγαδικών σε Τριγωνομετρική Μορφή

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. (i) Έστω $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\sin\vartheta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\sin\vartheta_2)$ δύο μιγαδικοί σε τριγωνομετρική μορφή. Τότε:

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2))}$$

Γενικότερα, αν $z_k = \rho_k(\cos\vartheta_k + \mathbf{i}\sin\vartheta_k)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, όπου n θετικός ακέραιος, τότε

$$\boxed{z_1 z_2 \cdots z_n = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n)\big)}$$

(ii) Έστω $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\sin\vartheta_1)$ και $z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\sin\vartheta_2)$ με $z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_2| = \rho_2 \neq 0$, τότε

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))}$$

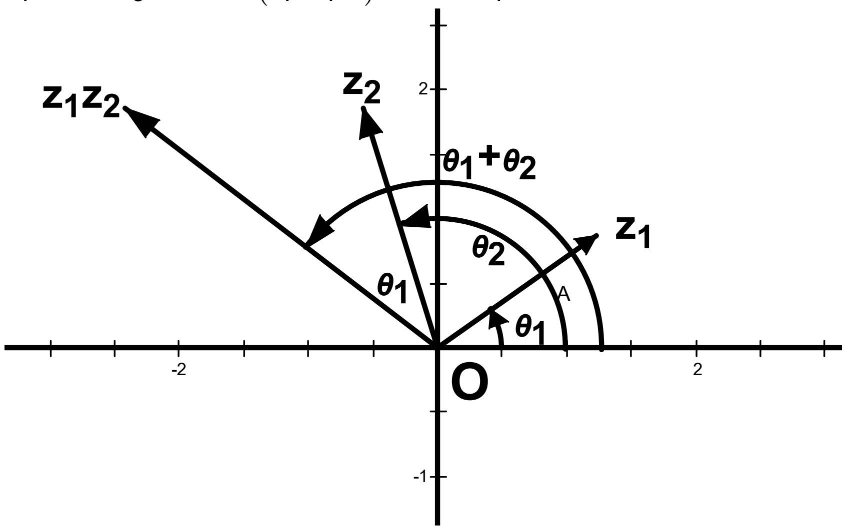
Ειδικότερα αν $z_1 = 1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0$ και $z_2 = z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) \neq 0$, τότε

$$\boxed{z^{-1} = \rho^{-1}(\cos(-\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-\vartheta)) = \frac{1}{\rho}\,(\cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta)}$$

Απόδειξη: (i) $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\sin\vartheta_1)(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\sin\vartheta_2) = \rho_1\rho_2\big(\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 + \mathbf{i}(\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2)\big)$. Αλλά ξέρουμε από την τριγωνομετρία της β′ λυκείου ότι $\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \sin\vartheta_1\sin\vartheta_2 = \cos(\vartheta_1 + \vartheta_2)$ και $\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 + \cos\vartheta_1\sin\vartheta_2 = \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$. Επομένως $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\big)$.
Το γενικότερο αποτέλεσμα προκύπτει με επαγωγή επί του n. Για $n = 1$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε και για $n = 2$ αποδείχτηκε προηγουμένως. Έστω ότι ισχύει για κάποιον $n \geq 2$. Τότε $z_1 z_2 \cdots z_n z_{n+1} = (z_1 z_2 \cdots z_n) z_{n+1} = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n)\big)\rho_{n+1}(\cos\vartheta_{n+1} + \mathbf{i}\sin\vartheta_{n+1}) = \rho_1\rho_2\cdots\rho_n\rho_{n+1}\big(\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n + \vartheta_{n+1}) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_n + \vartheta_{n+1})\big)$.
(ii) Παρατηρούμε ότι $\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)) \cdot z_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2))$ $\rho_2(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\sin\vartheta_2) = \rho_1\big(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2 + \vartheta_2)\big) = \rho_1(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\sin\vartheta_1) = z_1$.
Επομένως $\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) + \mathbf{i}\sin(\vartheta_1 - \vartheta_2)) = \frac{z_1}{z_2}$. ■

Η γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού δύο μιγαδικών $z_1 = \rho_1(\cos\vartheta_1 + \mathbf{i}\sin\vartheta_1)$ και

$z_2 = \rho_2(\cos\vartheta_2 + \mathbf{i}\sin\vartheta_2)$ είναι η ακόλουθη: Το μέτρο του $z_1 z_2$ είναι $\rho_1\rho_2$ και η γωνία που σχηματίζει ο $z_1 z_2$ με τον άξονα $x'x$ (όρισμα) ισούται με $\vartheta_1 + \vartheta_2$.



Σχήμα 30

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.10. (**ΘΕΩΡΗΜΑ de MOIVRE**) Για κάθε θετικό ακέραιο n και $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ ισχύει η σχέση

$$z^n = \rho^n\big(\cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(n\vartheta)\big)$$

Απόδειξη: Προκύπτει από το **(i)** της προηγούμενης πρότασης για $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$. ■

Ειδικότερα, αν πολλαπλασιάσουμε έναν μιγαδικό $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ με το $\mathbf{i} = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$, τότε ο z θα περιστραφεί κατά τη θετική φορά κατά $90^o = \dfrac{\pi}{2}$.

Γενικότερα, αν $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ και w μοναδιαίου μήκους, δηλαδή $w = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$, τότε η εικόνα του μιγαδικού zw προκύπτει αν περιστρέψουμε το διάνυσμα στο οποίο αντιστοιχεί ο z κατά γωνία φ (θετική ή αρνητική).

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

123. Δείξτε ότι αν $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0$, τότε το θεώρημα de Moivre ισχύει και για μη θετικούς ακεραίους της μορφής $-n$, όπου $n \geq 0$.

Απόδειξη: Αν $n = 0$ είναι προφανές. Έστω $n > 0$. Τότε $\rho^{-n}(\cos(-n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-n\vartheta)) \cdot z^n = \rho^{-n}(\cos(-n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-n\vartheta)) \cdot \rho^n(\cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(n\vartheta)) = \rho^{-n}\rho^n(\cos(-n\vartheta + n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-n\vartheta + n\vartheta)) = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0 = 1$. Επομένως $\rho^{-n}(\cos(-n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-n\vartheta)) = \dfrac{1}{z^n} = z^{-n}$. ■

Επομένως, αν $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) \neq 0$, τότε $z^{-n} = \rho^{-n}(\cos(n\vartheta) - \mathbf{i}\sin(n\vartheta))$.

124. Δείξτε ότι:

(i) $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^{150} = -2^{150}$.

(ii) $(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^{-n} = 2\cos(n\vartheta)$ και $(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^n - (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^{-n} = 2\mathbf{i}\sin(n\vartheta)$.

Απόδειξη: **(i)** $(\sqrt{3} + \mathbf{i}) = 2\Big(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\cdot\dfrac{1}{2}\Big) = 2\Big(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\Big)$. Επομένως $(\sqrt{3} + \mathbf{i})^{150} =$

$= 2^{150}\Big(\cos\dfrac{150\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{150\pi}{6}\Big) = 2^{150}(\cos(25\pi) + \mathbf{i}\sin(25\pi)) = 2^{150}(\cos(12\cdot 2\pi + \pi) + \mathbf{i}\sin(12\cdot 2\pi + \pi) = 2^{150}(\cos\pi + \mathbf{i}\sin(\pi)) = 2^{150}(-1 + 0\mathbf{i}) = -2^{150}$.

(ii) $(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^n + (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^{-n} = \cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(n\vartheta) + \cos(n\vartheta) - \mathbf{i}\sin(n\vartheta) = 2\cos(n\vartheta)$ και $(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^n - (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^{-n} = \cos(n\vartheta) + \mathbf{i}\sin(n\vartheta) - (\cos(n\vartheta) - \mathbf{i}\sin(n\vartheta)) = 2\mathbf{i}\sin(n\vartheta)$. ■

125. Αν $z = \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta$, δείξτε ότι $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\vartheta$ και $z - \dfrac{1}{z} = 2\mathbf{i}\sin\vartheta$.

__**Απόδειξη:**__ $z^{-1} = \cos(-\vartheta) + \mathbf{i}\sin(-\vartheta) = \cos\vartheta - \mathbf{i}\sin\vartheta$. Επομένως $z + z^{-1} = 2\cos\vartheta$ και $z - z^{-1} = = 2\mathbf{i}\sin\vartheta$. ■

126. **(i)** Γράψτε τον μιγαδικό αριθμό $z = \sqrt{3} + \mathbf{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή.
(ii) Γράψτε τον μιγαδικό αριθμό $z = -2 - 2\mathbf{i}$ σε τριγωνομετρική μορφή.

__**Λύση:**__ $z = \sqrt{3} + \mathbf{i} = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

(ii) $z = -2 - 2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{2}{2\sqrt{2}} - \mathbf{i}\sin\dfrac{2}{2\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\sin\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$. ■

127. Γράψτε τον μιγαδικό $z = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$ στη μορφή $\alpha + \beta\mathbf{i}$.

__**Λύση:**__ $z = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{11\pi}{6}\right) = 4\left(\cos\dfrac{12\pi - \pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{12\pi - \pi}{6}\right) =$

$= 4\left(\cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right) =$

$= 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\dfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2\mathbf{i}$. ■

128. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3} - \mathbf{i})^3}$.

__**Λύση:**__ $\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3} - \mathbf{i})^3} = \sqrt{2^7}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3} - \mathbf{i})^3} = 2^3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7}{(\sqrt{3} - \mathbf{i})^3} = \sqrt{2}\cdot\dfrac{\left(\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^7}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\dfrac{1}{2}\right)^3} =$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^7}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^3} = \sqrt{2}\cdot\frac{\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)^7}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^3} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{7\pi}{3}\right)}{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{3\pi}{6}\right)\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)}{-\mathbf{i}} = \mathbf{i}\sqrt{2}\Big(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$ ■

129. Αν $\alpha \in (0,\pi)$, γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τον μιγαδικό $z = 1-\cos\alpha-\mathbf{i}\sin\alpha$.
Λύση: $\cos\alpha = 1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ και $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$. Επομένως $1-\cos\alpha-\mathbf{i}\sin\alpha =$
$= 1-\Big(1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\Big)-2\mathbf{i}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(\sin\dfrac{\alpha}{2}-\mathbf{i}\cos\dfrac{\alpha}{2}\Big) = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(\cos\dfrac{\pi-\alpha}{2}-$
$-\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi-\alpha}{2}\Big) = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(\cos\dfrac{\alpha-\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\alpha-\pi}{2}\Big)$. Επειδή $\alpha\in(0,\pi)$ έπεται ότι $\dfrac{\alpha}{2}\in\Big(0,\dfrac{\pi}{2}\Big)$
και επομένως $2\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ είναι το μέτρο του μιγαδικού z. ■

130. Δείξτε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύουν οι σχέσεις:
(i) $(1+\mathbf{i})^n+(1-\mathbf{i})^n = 2^{1+\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$.
(ii) $(1+\mathbf{i})^n-(1-\mathbf{i})^n = \mathbf{i}2^{1+\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$.
Απόδειξη: $1+\mathbf{i} = \sqrt{2}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\Big)$ και άρα $(1+\mathbf{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}+$
$+\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big)$. Ομοίως $1-\mathbf{i} = \sqrt{2}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2}\Big(\cos\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)+\mathbf{i}\sin\Big(-\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)$ και επομένως
$(1-\mathbf{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\Big(-\dfrac{n\pi}{4}\Big)+\mathbf{i}\sin\Big(-\dfrac{n\pi}{4}\Big)\Big) = 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}-\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big)$.
$(1+\mathbf{i})^n+(1-\mathbf{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big)+2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}-\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big) = 2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4} =$
$= 2^{1+\frac{n}{2}}\cos\dfrac{n\pi}{4}$ και $(1+\mathbf{i})^n-(1-\mathbf{i})^n = 2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big)-2^{\frac{n}{2}}\Big(\cos\dfrac{n\pi}{4}-\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4}\Big) =$
$= 2\cdot 2^{\frac{n}{2}}\cdot\mathbf{i}\sin\dfrac{n\pi}{4} = \mathbf{i}2^{1+\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$. ■

(**Εφαρμογές στην τριγωνομετρία**)

131. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα:
(i) $\Sigma = 1+\binom{n}{1}\cos\vartheta+\binom{n}{2}\cos 2\vartheta+\binom{n}{3}\cos 3\vartheta+\cdots+\binom{n}{n}\cos(n\vartheta)$ και
(ii) $\Sigma' = \binom{n}{1}\sin\vartheta+\binom{n}{2}\sin 2\vartheta+\binom{n}{3}\sin 3\vartheta+\cdots+\binom{n}{n}\sin(n\vartheta)$.
Λύση: Θεωρούμε τον μιγαδικό $z=\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta$. Από το διώνυμο του Newton έχουμε:
$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\vartheta)+\mathbf{i}\sin(k\vartheta)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\vartheta)+\mathbf{i}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\vartheta).$$
Για το αριστερό μέλος έχουμε: $1+z = 1+\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta = 1+2\cos^2\dfrac{\vartheta}{2}-1+2\mathbf{i}\sin\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{\vartheta}{2} = =$
$2\cos\dfrac{\vartheta}{2}\Big(\cos\dfrac{\vartheta}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\vartheta}{2}\Big)$ και επομένως $(1+z)^n = 2^n\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\Big(\cos\dfrac{\vartheta}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\vartheta}{2}\Big)^n = 2^n\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\Big(\cos\dfrac{n\vartheta}{2}+$
$+\mathbf{i}\sin\dfrac{n\vartheta}{2}\Big) = 2^n\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{n\vartheta}{2}+2^n\mathbf{i}\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\sin\dfrac{n\vartheta}{2}$. Επειδή $\sin 0=0$, το τελευταίο αποτέλεσμα ισούται με $\Sigma+\mathbf{i}\Sigma'$.
Επομένως $\Sigma = 1+\binom{n}{1}\cos\vartheta+\binom{n}{2}\cos 2\vartheta+\binom{n}{3}\cos 3\vartheta+\cdots+\binom{n}{n}\cos(n\vartheta) = 2^n\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\cos\dfrac{n\vartheta}{2}$
και
$\Sigma' = \binom{n}{1}\sin\vartheta+\binom{n}{2}\sin 2\vartheta+\binom{n}{3}\sin 3\vartheta+\cdots+\binom{n}{n}\sin(n\vartheta) = 2^n\cos^n\dfrac{\vartheta}{2}\sin\dfrac{n\vartheta}{2}$ ■

132. Έστω φ και $\vartheta\neq 2k\pi$, όπου $k\in\mathbb{Z}$, δύο γωνίες. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα
(i) $S=\cos\varphi+\cos(\varphi+\vartheta)+\cos(\varphi+2\vartheta)+\cdots+\cos(\varphi+(n-1)\vartheta)$ και

(ii) $T = \sin\varphi + \sin(\varphi+\vartheta) + \sin(\varphi+2\vartheta) + \cdots + \sin(\varphi+(n-1)\vartheta)$.

Λύση: Έστω $z = \cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi$ και $w = \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta$. Τότε από το θεώρημα de Moivre έχουμε $w^k = \cos k\vartheta + \mathbf{i}\sin k\vartheta$, για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Επομένως $z + zw + zw^2 + \cdots + zw^{n-1} = = z(1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1}) = z \cdot \dfrac{w^n - 1}{w - 1}$.

Το πρώτο μέλος ισούται $(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)((\cos 0 + \mathbf{i}\sin 0) + (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) + (\cos 2\vartheta + \mathbf{i}\sin 2\vartheta) + + \cdots + (\cos(n-1)\vartheta + \mathbf{i}\sin(n-1)\vartheta)) = (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(\cos k\vartheta + \mathbf{i}\sin k\vartheta) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)(\cos k\vartheta + \mathbf{i}\sin k\vartheta) = \sum_{k=0}^{n-1}(\cos(\varphi+k\vartheta) + \mathbf{i}\sin(\varphi+k\vartheta)) = \sum_{k=0}^{n-1}\cos(\varphi+k\vartheta) + \mathbf{i}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\varphi+k\vartheta) = S + \mathbf{i}T.$$

Το δεύτερο μέλος ισούται με $(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \cdot \dfrac{\cos n\vartheta + \mathbf{i}\sin n\vartheta - 1}{\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta - 1} =$

$$= (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \cdot \frac{1 - 2\sin^2\frac{n\vartheta}{2} + 2\mathbf{i}\sin\frac{n\vartheta}{2}\cos\frac{n\vartheta}{2} - 1}{1 - 2\sin^2\frac{\vartheta}{2} + 2\mathbf{i}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} - 1} =$$

$$= (\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \cdot \frac{-\sin^2\frac{n\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{n\vartheta}{2}\cos\frac{n\vartheta}{2}}{-\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \cdot \frac{\cos\frac{n\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}}(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi) \cdot \left(\cos\frac{(n-1)\vartheta}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{(n-1)\vartheta}{2}\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}}{\sin\frac{\vartheta}{2}} \cdot \left(\cos\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}\cos\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}} + \mathbf{i}\frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}\sin\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$

Επομένως $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\varphi+k\vartheta) = \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}\cos\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}}$ και

$$T = \sum_{k=0}^{n-1}\sin(\varphi+k\vartheta) = \frac{\sin\frac{n\vartheta}{2}\sin\left(\varphi + \frac{(n-1)\vartheta}{2}\right)}{\sin\frac{\vartheta}{2}}.$$ ■

133. (i) Να εκφράσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\cos 3\vartheta$ και $\sin 3\vartheta$ συναρτήσει των $\cos\vartheta$ και $\sin\vartheta$ αντίστοιχα.

(ii) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\cos 72^\circ = \cos\dfrac{2\pi}{5}$ και $\sin 72^\circ = \sin\dfrac{2\pi}{5}$.

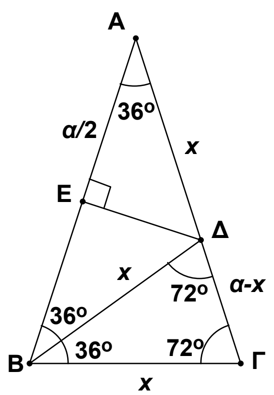
Λύση: **(i)** Από το θεώρημα de Moivre έχουμε $(\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta)^3=\cos 3\vartheta+\mathbf{i}\sin 3\vartheta$. Από την άλλη μεριά, $(\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta)^3=\cos^3\vartheta+3\mathbf{i}\cos^2\vartheta\sin\vartheta-3\cos\vartheta\sin^2\vartheta-\mathbf{i}\sin^3\vartheta=\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta\sin^2\vartheta+$ $+\mathbf{i}(3\cos^2\vartheta\sin\vartheta-\sin^3\vartheta)$. Κατά συνέπεια $\cos 3\vartheta=\cos\vartheta(\cos^2\vartheta-3(1-\cos^2\vartheta))=4\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta$ και $\sin 3\vartheta=\sin\vartheta(3(1-\sin^2\vartheta)-\sin^2\vartheta)=3\sin\vartheta-4\sin^3\vartheta$.

(ii) Παρατηρούμε ότι $\cos\left(2\cdot\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\frac{4\pi}{5}=\cos\left(2\pi-\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{5}\right)=$ $=\cos\left(3\cdot\frac{2\pi}{5}\right)$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο $\cos 2\vartheta=2\cos^2\vartheta-1$ και από το ερώτημα **(i)** τον τύπο $\cos 3\vartheta=4\cos^3\vartheta-3\cos\vartheta$, καθώς και το γεγονός ότι $\cos 2\vartheta=\cos 3\vartheta$, όπου $\vartheta=\frac{2\pi}{5}$ που μόλις αποδείξαμε, καταλήγουμε στη σχέση $4\cos^3\frac{2\pi}{5}-3\cos\frac{2\pi}{5}=2\cos^2\frac{2\pi}{5}-1$, δηλαδή το $\cos\frac{2\pi}{5}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $4x^3-2x^2-3x+1=4x^3-4x^2+2x^2-2x-x+1=4x^2(x-1)+$ $+2x(x-1)-(x-1)=(x-1)(4x^2+2x-1)$.

Προφανώς $\frac{2\pi}{5}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και επομένως $0<\cos\frac{2\pi}{5}<1$. Άρα το $\cos\frac{2\pi}{5}$ είναι η θετική ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $4x^2+2x-1=0$, δηλαδή $\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-2+\sqrt{20}}{8}=\frac{-2+2\sqrt{5}}{8}=$ $=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Επειδή βρισκόμαστε στο 1^{o} τεταρτημόριο, και το $\sin\frac{2\pi}{5}$ είναι θετικό και άρα

$$\sin\frac{2\pi}{5}=\sqrt{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{16-1-5+2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Βγαίνει και πιο απλά. Έχουμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ $=$ ΑΓ $=\alpha$ και η γωνία της κορυφής Α ισούται με 36^{o}. Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με 72^{o}. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΔΒΓ είναι ισοσκελή. Αν ΑΔ$=x$, τότε ΔΓ$=\alpha-x$. Επίσης ΔΒ$=$ΒΓ$=x$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΒΓΔ προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\alpha-x}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2+\alpha x-\alpha^2=0$ και συνεπώς $x=\frac{-\alpha\pm\alpha\sqrt{5}}{2}$ με θετική την $x=\frac{-\alpha+\alpha\sqrt{5}}{2}$. Επομένως $\cos 36^{\text{o}}=\frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Επομένως $\cos 72^{\text{o}}=2\cos^2 36^{\text{o}}-1=2\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{16}-1=$ $=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.



Σχήμα 31

134. Αν 2ρ άρτιος θετικός ακέραιος, να εκφράσετε τα $\cos(2\rho\vartheta)$ και $\sin(2\rho\vartheta)$ ως συναρτήσεις των $\cos\vartheta$ και $\sin\vartheta$.

Λύση: Έχουμε $\cos(2\rho\vartheta) + \mathbf{i}\sin(2\rho\vartheta) = (\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)^{2\rho} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2\rho}\binom{2\rho}{k}\cos^k\vartheta\cdot\mathbf{i}^{2\rho-k}\sin^{2\rho-k}\vartheta =$

$$= \sum_{k=0}^{\rho}\binom{2\rho}{2k}\cos^{2k}\vartheta\cdot(-1)^{\rho-k}\sin^{2(\rho-k)}\vartheta + \sum_{k=0}^{\rho-1}\binom{2\rho}{2k+1}\cos^{2k+1}\vartheta\cdot\mathbf{i}^{2\rho-2k-1}\sin^{2(\rho-k)-1}\vartheta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\rho}\binom{2\rho}{2k}\cos^{2k}\vartheta\cdot(-1)^{\rho-k}\sin^{2(\rho-k)}\vartheta - \mathbf{i}\sum_{k=0}^{\rho-1}\binom{2\rho}{2k+1}\cos^{2k+1}\vartheta\cdot(-1)^{\rho-k}\sin^{2(\rho-k)-1}\vartheta.$$

Επομένως $\cos(2\rho\vartheta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\rho}\binom{2\rho}{2k}\cos^{2k}\vartheta\cdot(-1)^{\rho-k}\sin^{2(\rho-k)}\vartheta$ και

$$\sin(2\rho\vartheta) = \sum_{k=0}^{\rho-1}\binom{2\rho}{2k+1}\cos^{2k+1}\vartheta\cdot(-1)^{\rho+1-k}\sin^{2(\rho-k)-1}\vartheta. \qquad \blacksquare$$

135. Να αποδειχθεί ότι $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\tan\vartheta}{1-\mathbf{i}\tan\vartheta}\right)^n = \dfrac{1+\mathbf{i}\tan(n\vartheta)}{1-\mathbf{i}\tan(n\vartheta)}$.

Απόδειξη: $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\tan\vartheta}{1-\mathbf{i}\tan\vartheta}\right)^n = \left(\dfrac{1+\mathbf{i}\dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}}{1-\mathbf{i}\dfrac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}}\right)^n = \dfrac{\left(\dfrac{\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^n}{\left(\dfrac{\cos\vartheta-\mathbf{i}\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)^n} = \dfrac{\dfrac{\big(\cos\vartheta+\mathbf{i}\sin\vartheta\big)^n}{\cos^n\vartheta}}{\dfrac{\big(\cos(-\vartheta)+\mathbf{i}\sin(-\vartheta)\big)^n}{\cos^n\vartheta}} =$

$$= \frac{\cos(n\vartheta)+\mathbf{i}\sin(n\vartheta)}{\cos(-n\vartheta)+\mathbf{i}\sin(-n\vartheta)} = \frac{\cos(n\vartheta)+\mathbf{i}\sin(n\vartheta)}{\cos(n\vartheta)-\mathbf{i}\sin(n\vartheta)} = \frac{\dfrac{\cos(n\vartheta)+\mathbf{i}\sin(n\vartheta)}{\cos(n\vartheta)}}{\dfrac{\cos(n\vartheta)-\mathbf{i}\sin(n\vartheta)}{\cos(n\vartheta)}} = \frac{1+\mathbf{i}\tan(n\vartheta)}{1-\mathbf{i}\tan(n\vartheta)}. \qquad \blacksquare$$

2.8 n-στή Ρίζα Μιγαδικού-Ρίζες της Μονάδος

Έστω $z \in \mathbb{C}$ και n θετικός ακέραιος. Θεωρούμε την εξίσωση

$$\boxed{x^n = z}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^n = z$ λέγονται n-**στές ρίζες του z**.
Αν $z = 0$, τότε υπάρχει προφανώς μία μόνον n-στή ρίζα του μηδενός. Το μηδέν.
υποθέτουμε λοιπόν ότι $z \neq 0$ και έστω $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ η τριγωνομετρική μορφή του z.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11. Έστω $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ και n θετικός ακέραιος. Τότε η εξίσωση $x^n = z$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\vartheta+2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta+2k\pi}{n}\Big),$$

όπου $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
Απόδειξη: Έστω ζ μια ρίζα της $x^n = z$. Τότε προφανώς $|\zeta|^n = |z| = \rho$ και συνεπώς $|\zeta| = \sqrt[n]{\rho}$. Η τριγωνομετρική μορφή της ζ θα είναι λοιπόν της μορφής $\zeta = \sqrt[n]{\rho}(\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi)$. Επομένως

θα έχουμε: $\zeta^n = z \Leftrightarrow \rho(\cos n\varphi + \mathbf{i}\sin n\varphi) = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta) \Leftrightarrow \begin{cases}\cos n\varphi = \cos\vartheta\\ \sin n\varphi = \sin\vartheta\end{cases} \Leftrightarrow n\varphi =$ $= \vartheta + 2k\pi$, όπου $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως $\varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$.

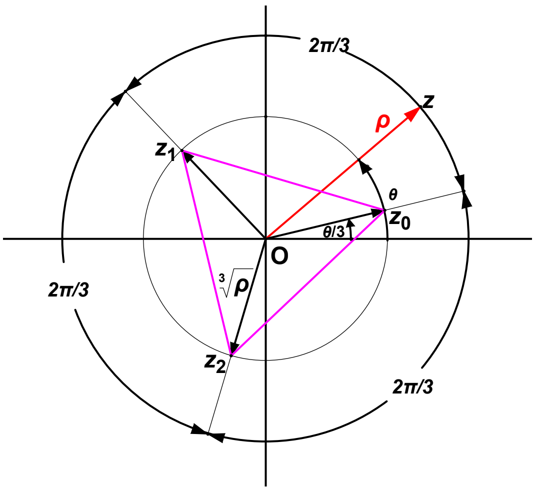
Εξετάζουμε τώρα πότε δύο τέτοιες γωνίες $\varphi = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ και $\varphi' = \dfrac{\vartheta + 2\lambda\pi}{n}$ μας δίνουν το ίδιο ημίτονο και συνημίτονο, δηλαδή διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π. (Σε μια τέτοια περίπτωση οι ρίζες θα συνέπιπταν).

Έστω λοιπόν $\varphi - \varphi' = 2t\pi$, όπου $t \in \mathbb{Z}$. Θα έχουμε $\dfrac{2(k-\lambda)\pi}{n} = 2t\pi \Leftrightarrow k = \lambda + tn$, δηλαδή η διαφορά $k - \lambda$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n. Οι μικρότερες μη αρνητικές τιμές που μπορεί να πάρει το k, ώστε να μη δίνει πολλαπλάσια του n είναι $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

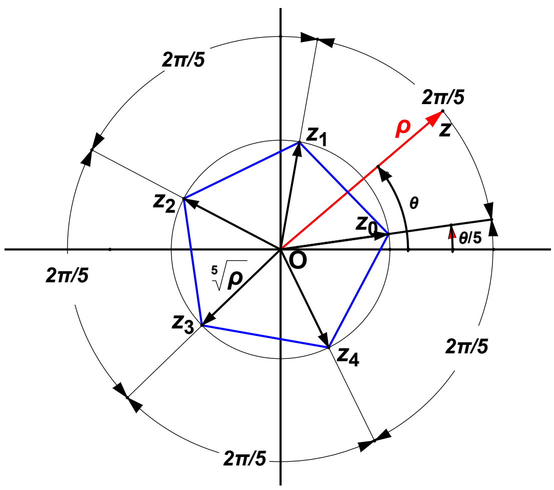
Επομένως η εξίσωση $x^n = z$ έχει ακριβώς n διαφορετικές λύσεις, τις

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\vartheta}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta}{n}\Big),\\
z_1 &= \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\vartheta + 2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta + 2\pi}{n}\Big),\\
z_2 &= \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\vartheta + 4\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta + 4\pi}{n}\Big),\\
&\vdots\\
z_{n-1} &= \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}\Big).
\end{aligned}$$ ■

Στα επόμενα σχήματα παριστάνονται οι τρίτες και πέμπτες ρίζες ενός μιγαδικού $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$. (Εδώ έχουμε πάρει $\rho = |z| > 1$).



Σχήμα 32

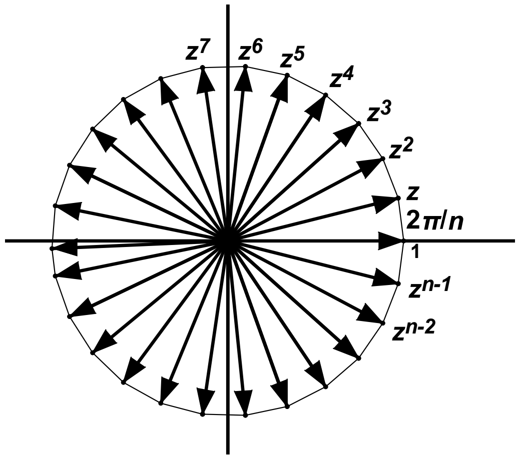


Σχήμα 33

Γενικά οι n-στές ρίζες ενός μιγαδικού $z = \rho(\cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta)$ σχηματίζουν σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt[n]{\rho}$ κανονικό n-γωνο, αρχής γενομένης με τον $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\Big(\cos\dfrac{\vartheta}{n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\vartheta}{n}\Big)$.

Αν $\rho = 1$, οι n-στές ρίζες ενός μιγαδικού $z = \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta$ σχηματίζουν ένα κανονικό n−γωνο στον μοναδιαίο κύκλο. Ειδικότερα, οι n-στές ρίζες της μονάδας $(1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0)$ είναι οι αριθμοί

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0,\\
z_1 &= \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n},\\
z_2 &= \cos\frac{4\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{4\pi}{n} = z_1^2,\\
z_3 &= \cos\frac{6\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{6\pi}{n} = z_1^3,\\
&\vdots\\
z_{n-1} &= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = z_1^{n-1}.
\end{aligned}$$



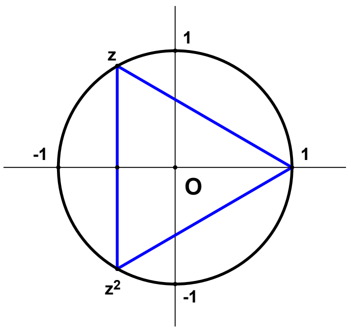
Σχήμα 34

Όπως βλέπουμε από το σχήμα οι n-στές ρίζες της μονάδος σχηματίζουν ένα κανονικό n-γωνο στον μοναδιαίο κύκλο.

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

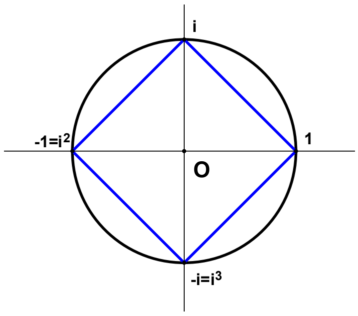
136. Να βρεθούν οι τρίτες, τέταρτες, πέμπτες και έκτες ρίζες της μονάδος.

Λύση: **α)** Οι τρίτες ρίζες είναι οι $1 = \cos 0 + \mathbf{i}\sin 0$, $z = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $z^2 = z^{-1} = \bar{z} = -\frac{1}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.



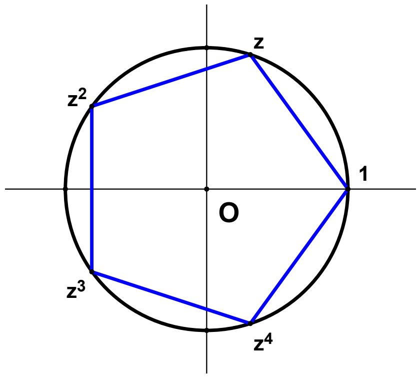
Σχήμα 35

β) Οι τέταρτες ρίζες είναι οι 1, $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}^2 = -1$, $\mathbf{i}^3 = -\mathbf{i}$.



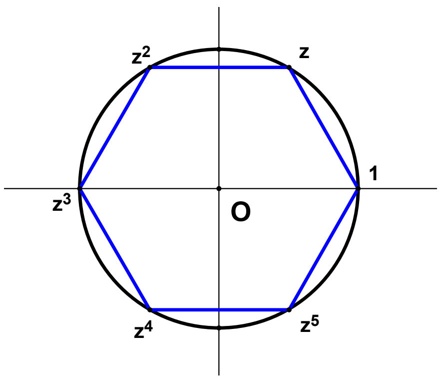
Σχήμα 36

γ) Οι πέμπτες ρίζες είναι οι 1, $z = \cos\dfrac{2\pi}{5} + \mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $z^2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \mathbf{i}(\sqrt{5}-1)\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$, $z^3 = z^{-2} = \overline{z^2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \mathbf{i}(1-\sqrt{5})\cdot\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$ και $z^4 = z^{-1} = \bar{z} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.



Σχήμα 37

δ) Οι έκτες ρίζες είναι οι 1, $z = \cos\dfrac{2\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{6} = \cos\dfrac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z^2 = \cos\dfrac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{1}{2} + \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $z^3 = \cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi = -1$, $z^4 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\dfrac{4\pi}{3} = -z$, $z^5 = z^{-1} = \bar{z} = \dfrac{1}{2} - \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Σχήμα 38

■

137. Να λύσετε τις εξισώσεις:
(i) $z^3 = 2 + 2\mathbf{i}$.
(ii) $z^6 + 64 = 0$.
(iii) $3x^6 + 24x^3 = 0$.

Λύση: **(i)** $2+2\mathbf{i} = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2^3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Άρα $z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

Ξέρουμε ότι $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1 \Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{4} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2} =$
$= \frac{\sqrt{2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 + 1^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ και $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Επομένως $z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12} + \mathbf{i}\sin\frac{9\pi}{12}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1+\mathbf{i}$ και $z_2 = (-1+\mathbf{i})\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = (-1+\mathbf{i})\left(-\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$
$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(ii) $z^6 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^6 = -2^6 = 2^6(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi)$.

Επομένως $z_k = 2\left(\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\right)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

$z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + \mathbf{i}$,

$z_1 = (\sqrt{3} + \mathbf{i})\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = (\sqrt{3}+\mathbf{i})\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\mathbf{i}$,

$z_2 = 2\mathbf{i}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} + \mathbf{i}$,

$z_3 = (-\sqrt{3} + \mathbf{i})\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - \mathbf{i}$,

$z_4 = (-\sqrt{3} - \mathbf{i})\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\mathbf{i}$,

$z_5 = -2\mathbf{i}\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - \mathbf{i}$.

(iii) $3x^6 + 24x^3 = 0 \Leftrightarrow 3x^3(x^3 + 8) = 0$. Άρα $x = 0$ ή $x^3 = -2^3 = 2^3(\cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi)$.

Επομένως $x_0 = 0$, $x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$,

$x_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{3}\right) = -2$ και $x_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) =$

$$= 2\left(\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \mathbf{i}\sin\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}. \qquad \blacksquare$$

138. Δείξτε ότι οι ρίζες της εξισώσεως $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$ δίνονται από τον τύπο

$$z = \mathbf{i}\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n}, \text{ όπου } k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Απόδειξη: Κατ' αρχάς $z \neq \pm 1$, γιατί τότε $2^{2n} = 0$. Κατά συνέπεια $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = -1 =$ $= \cos\pi + \mathbf{i}\sin\pi$. Επομένως $\dfrac{1+z}{1-z} = \cos\dfrac{\pi + 2k\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{\pi+2k\pi}{2n}$, όπου $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, ισοδύναμα $1 + z = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} - z\left(\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z \cdot \left(1 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n} - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \left(1 + 2\cos^2\frac{(2k+1)\pi}{4n} - 1 + 2\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) = 1 - 2\sin^2\frac{(2k+1)\pi}{4n} +$$

$$+2\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n} - 1 \Leftrightarrow z \cdot 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\left(-\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathbf{i}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\left(\mathbf{i}^2\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathbf{i}\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right) =$$

$$= 2\mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathbf{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}\right).$$

Επειδή $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \neq 0$, γιατί έχει μέτρο 1, καταλήγουμε στη σχέση $z \cdot \cancel{2}\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} = \cancel{2}\mathbf{i}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \Leftrightarrow z \cdot \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} = \mathbf{i}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{4n}$.

Τώρα, για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ έχουμε $0 < \dfrac{\pi}{4n} \leq \dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \leq \dfrac{(4n-1)\pi}{4n} < \pi$ και αν $\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} = \dfrac{\pi}{2}$, τότε $2k+1 = 2n$, δηλαδή περιττός ίσον άρτιος, άτοπο. Επομένως $\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{4n} \neq 0$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$.

Συνεπώς $z = \mathbf{i} \cdot \dfrac{\sin\frac{(2k+1)\pi}{4n}}{\cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}} = \mathbf{i} \cdot \tan\dfrac{(2k+1)\pi}{4n}$, όπου $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$. $\blacksquare$

139. Δείξτε ότι

$$(1 - z + z^2)(1 - z^2 + z^4)(1 - z^4 + z^8)(1 - z^8 + z^{16})\cdots(1 - z^{2^{k-2}} + z^{2^{k-1}})(1 - z^{2^{k-1}} + z^{2^k}) = 2^k,$$

όπου k άρτιος θετικός ακέραιος και $z = -\dfrac{1}{2} \pm \mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ τυχούσα καθαρή μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδος.

Απόδειξη: Εφόσον $z^3 = 1$, έπεται ότι $z^2 = z^{-1} \underset{|z|=1}{=} \bar{z}$, δηλαδή $z^{2^1} = \bar{z}$. Υποθέτουμε ότι $z^{2^{2\rho+1}} =$ $\bar{z}$, για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο ρ. Τότε $z^{2^{2(\rho+1)+1}} = z^{2^{2\rho+1+2}} = z^{2^{2\rho+1}\cdot 2^2} = \left(z^{2^{2\rho+1}}\right)^4 = \bar{z}^4 =$ $= \bar{z}^3 \cdot \bar{z} = 1 \cdot \bar{z} = \bar{z}$. Τώρα, $z^{2^0} = z^1 = z$ και αν $\rho \geq 1$, τότε $z^{2^{2\rho}} = z^{2^{2\rho-1}\cdot 2} = \left(z^{2^{2\rho-1}}\right)^2 = \bar{z}^2 =$ $= \overline{(\bar{z})} = z$. Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας γράφεται

$$\prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}(1-z^{2^{2\rho}}+z^{2^{2^{2\rho+1}}})(1-z^{2^{2^{2\rho+1}}}+z^{2^{2(\rho+1)}}) = \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}(1-z+\bar{z})(1-\bar{z}+z) = \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}(1-z+\bar{z})\overline{(1-z+\bar{z})} =$$

$$= \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}|1-z+\bar{z}|^2 = \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}|1-(z-\bar{z})|^2 = \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}|1\pm \mathbf{i}\sqrt{3}|^2 = \prod_{\rho=0}^{\frac{k}{2}-1}2^2 = \left(2^2\right)^{\frac{k}{2}} = 2^k. \qquad \blacksquare$$

2.9 Πολυώνυμα και Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Θεωρούμε ότι η διαισθητική έννοια του πολυωνύμου μιας μεταβλητής x είναι γνωστή από τη β′ λυκείου, ως μια έκφραση της μορφής $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου τα α_k με $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ είναι «αριθμοί». Ο αυστηρός ορισμός του πολυωνύμου θα δοθεί στη Βασική Άλγεβρα.
Εμείς εδώ θα θεωρούμε ότι οι συντελεστές α_k ανήκουν σε κάποιο σώμα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Σπανιότερα θα θεωρούμε ότι οι συντελεστές είναι ακέραιοι. Συμβολίζουμε με
$\mathbb{Q}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n$ μη αρνητικός ακέραιος και $\alpha_k \in \mathbb{Q},$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$,
$\mathbb{R}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n$ μη αρνητικός ακέραιος και $\alpha_k \in \mathbb{R},$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ και
$\mathbb{C}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n$ μη αρνητικός ακέραιος και $\alpha_k \in \mathbb{C},$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Όπως προείπαμε, σπανιότερα θα ασχοληθούμε με το σύνολο $\mathbb{Z}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots +$ $+\alpha_1 x + \alpha_0 \mid n$ μη αρνητικός ακέραιος και $\alpha_k \in \mathbb{Z},$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, n\}$.
Αντιμετωπίζουμε στην αρχή ενιαία κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα πολυώνυμα στο $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$. Αν λοιπόν με $\mathbb{F}$ παραστήσουμε κάποιο από τα σώματα $\mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}[x]$ το αντίστοιχο σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

Παρατηρήσεις: **1)** Είναι σαφές ότι δύο πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν τους ίδιους όρους (Μονώνυμα).
2) Μπορούμε να προσθέτουμε αλλά και να διαγράφουμε από ένα πολυώνυμο όρους της μορφής $0x^k$, θεωρώντας τους μηδέν.
3) Το αριθμητικό σώμα $\mathbb{F}$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{F}[x]$ της μορφής $\alpha_0 = \alpha_0 x^0 \in$ $\in \mathbb{F}$. Αυτά είναι τα **σταθερά πολυώνυμα**. Ανάμεσα σ' αυτά τα σταθερά πολυώνυμα υπάρχει το **μηδενικό πολυώνυμο**, το οποίο συμβολίζουμε με 0. Σύμφωνα με τη δεύτερη παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε $0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ ή κάτι παρόμοιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12. Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε με $\mathbf{deg}\, \boldsymbol{f(x)}$ τον **μέγιστο δείκτη $\boldsymbol{k}$** με την ιδιότητα $\alpha_k \neq 0$. Συνήθως θεωρούμε $\alpha_n \neq 0$, οπότε $\deg f(x) = n$.
Για τις μη μηδενικές σταθερές $f(x) = \alpha$ θέτουμε $\deg \alpha = 0$.
Για το μηδενικό πολυώνυμο και για λόγους τεχνικούς θέτουμε $\deg 0 = -1$.

Στο σύνολο $\mathbb{F}[x]$ των πολυωνύμων ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:
Πρόσθεση: Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $g(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots +$ $+\beta_1 x + \beta_0$ είναι δύο πολυώνυμα, τότε με βάση την πρώτη παρατήρηση μπορούμε να συμπληρώσουμε με «μηδενικούς» όρους της μορφής $0x^k$, έτσι ώστε να θεωρήσουμε ότι $n = m$. Το άθροισμα λοιπόν $f(x) + g(x)$ ορίζεται κατά τον προφανή τρόπο

$$f(x) + g(x) = (\alpha_n + \beta_n)x^n + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 + \beta_1)x + \alpha_0 + \beta_0.$$

Αλλιώς απλά προσθέτουμε τα όμοια μονώνυμα. Είναι σαφές ότι $f(x) + 0 = f(x)$, για κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.
Εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι η πρόσθεση στο $\mathbb{F}[x]$ έχει την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα και υπάρχει, όπως αναφέρθηκε μηδενικό στοιχείο, το μηδενικό πολυώνυμο.
Επίσης, κάθε πολυώνυμο $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχει μοναδικό αντίθετο $-f(x) = -\alpha_n x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_1 x - \alpha_0$ με $f(x) + (-f(x)) = 0$ ή απλούστερα $f(x) - f(x) = 0$. Έτσι ορίζεται και η πράξη της **αφαίρεσης** πολυωνύμων ως $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

Παρατήρηση: Ισχύει $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$, τότε $\max\{\deg f(x), \deg g(x)\} = 3$ και $f(x) + g(x) = 2x^3 + 4x$ με $\deg(f(x) + g(x)) = 3$. Αλλά, αν $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ και $g(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$, τότε $f(x) + g(x) = 4x$ και $\deg(f(x) + g(x)) = 1 < 3 = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\} = \max\{3, 3\} = 3$.

Πολλαπλασιασμός: Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $g(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0$ πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$ με $\alpha_n \neq 0$ και $\beta_m \neq 0$. Το γινόμενο $f(x)g(x)$ ορίζεται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα και ισούται με

$$f(x)g(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + c_{n+m-2}x^{n+m-2} + c_1 x + c_0,$$

όπου $c_k = \sum_{s+t=k} \alpha_s \beta_t$, για όλους τους συνδυασμούς $s = 0, 1, 2, \ldots, n$ και $t = 0, 1, 2, \ldots, m$ με $s + t = k$.
Είναι σαφές ότι ο μη μηδενικός μεγιστοβάθμιος όρος είναι ο $c_{n+m} = \alpha_n \beta_m$, οπότε $\deg(f(x)g(x)) = n + m = \deg f(x) + \deg g(x)$. Ο σταθερός όρος c_0 ισούται προφανώς με $\alpha_0 \beta_0$.
Αν κάποιο από τα δύο πολυώνυμα είναι μια μη μηδενική σταθερά, π.χ. $f(x) = \lambda$, τότε $f(x)g(x) = \lambda g(x) = \lambda\beta_m x^m + \lambda\beta_{m-1}x^{m-1} + \cdots + \lambda\beta_1 x + \lambda\beta_0$.
Επειδή $\deg \lambda = 0$ και πάλι ισχύει ο τύπος $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.
Τέλος, αν κάποιο από τα δύο πολυώνυμα είναι μηδέν, τότε και το γινόμενό τους θα είναι μηδέν. Τότε **δεν ισχύει** ο τύπος $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.
Και για τον πολλαπλασιασμό εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι έχει την προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα καθώς και την επιμεριστική ως προς την πρόσθεση. Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι η σταθερά 1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x)g(x) = 0$. Τότε κάποιο από τα $f(x)$ και $g(x)$ είναι 0.
Απόδειξη: Αν $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$, τότε $\deg f(x) \geq 0$ και $\deg g(x) \geq 0$. Επομένως $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0$, άτοπο γιατί $\deg(f(x)g(x)) = \deg 0 = -1$. ■

Σημείωση: Η παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζει το $\mathbb{F}[x]$ ως **ακέραια περιοχή**.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.14. Τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{F}[x]$ είναι οι μη μηδενικές σταθερές.
Απόδειξη: Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x)g(x) = 1$. Αν κάποιο από τα $f(x), g(x)$ ήταν το μηδενικό πολυώνυμο, τότε $f(x)g(x) = 0$, άτοπο. Άρα $f(x), g(x) \neq 0$ και επομένως $\deg f(x) \geq 0$ και $\deg g(x) \geq 0$. Επομένως $0 = \deg 1 = \deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0 + 0 = 0$. Άρα $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$, δηλαδή τα $f(x)$ και $g(x)$ είναι μη μηδενικές σταθερές $f(x) = \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ και $g(x) = \lambda^{-1} \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. ■

Διαιρετότητα Πολυωνύμων

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.15. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $g(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $\pi(x), \upsilon(x) \in \in \mathbb{F}[x]$ με την ιδιότητα

$$f(x) = \pi(x)g(x) + \upsilon(x)$$

με $\deg \upsilon(x) < \deg g(x)$. $\big($Αν $\deg \upsilon(x) = -1$, αυτό σημαίνει ότι $\upsilon(x) = 0\big)$.

Απόδειξη: Αν $g(x) = \lambda$ μια μη μηδενική σταθερά, τότε $f(x) = \lambda \cdot \lambda^{-1} f(x) + 0$. Εδώ $\pi(x) = \lambda^{-1} f(x)$ και $\upsilon(x) = 0$.

Έστω ότι το $g(x)$ δεν είναι σταθερά. Αν $\deg f(x) < \deg g(x)$, τότε θέτουμε $\pi(x) = 0$ και $\upsilon(x) = f(x)$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ και ότι το $g(x)$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο. Αν $\alpha_n x^n$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x)$ και $\beta_m x^m$ $\big(n > m\big)$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $g(x)$, τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\dfrac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x)$ είναι ίσος με τον μεγιστοβάθμιο όρο του $f(x)$, δηλαδή $\alpha_n x^n$. Επομένως το πολυώνυμο $f(x) - \dfrac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x)$ είναι βαθμού μικρότερου του n. Με επαγωγή επί του n συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $\pi'(x), \upsilon(x)$, τέτοια ώστε

$$f(x) - \frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x) = \pi'(x)g(x) + \upsilon(x) \text{ με } \deg \upsilon(x) < \deg g(x).$$

Επομένως $f(x) = \pi(x)g(x) + \upsilon(x)$, όπου $\pi(x) = \dfrac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} + \pi'(x)$ και η ύπαρξη αποδείχτηκε.

Όσον αφορά το μονοσήμαντο, υποθέτουμε ότι υπάρχουν και κάποια άλλα πολυώνυμα $\pi_1(x)$ και $\upsilon_1(x)$ με $f(x) = \pi_1(x)g(x) + \upsilon_1(x)$ και $\deg \upsilon_1(x) < \deg g(x)$.

Τότε θα έχουμε $(\pi_1(x) - \pi(x))g(x) = \upsilon(x) - \upsilon_1(x)$.

Αν $\pi_1(x) - \pi(x) \neq 0$, τότε $\deg(\pi_1(x) - \pi(x)) \geq 0$ και επίσης $\upsilon(x) - \upsilon_1(x) \neq 0$.

Άρα $\max\{\deg \upsilon(x), \deg \upsilon_1(x)\} \geq (\deg \upsilon(x) - \upsilon_1(x)) = \deg \big((\pi_1(x) - \pi(x))g(x)\big) = \deg \big((\pi_1(x) - \pi(x)\big) + \deg g(x) \geq \deg g(x)$. Αυτό είναι άτοπο γιατί $\deg \upsilon(x) < \deg g(x)$ και $\deg \upsilon_1(x) < \deg g(x)$ και συνεπώς $\max\{\upsilon(x), \upsilon_1(x)\} < \deg g(x)$. Άρα $\pi_1(x) = \pi(x)$ και κατά συνέπεια και $\upsilon_1(x) = \upsilon(x)$. ■

Παράδειγμα: Εδώ διαιρούμε το $-6x^5 - 3x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x - 6$ με το $2x^2 + x + 1$.

$-6x^5$	$-3x^4$	$+x^3$	$-8x^2$	$-2x$	-6	$2x^2$	$+x$	$+1$
$6x^5$	$+3x^4$	$+3x^3$				$-3x^3$	$+2x$	-5
		$4x^3$	$-8x^2$	$-2x$	-6			
		$-4x^3$	$-2x^2$	$-2x$				
			$-10x^2$	$-4x$	-6			
			$10x^2$	$+5x$	$+5$			
				x	-1			

Πηλίκο $-3x^3 + 2x - 5$ και υπόλοιπο $x - 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Θα λέμε ότι το $f(x)$ **διαιρεί** το $g(x)$ ή αλλιώς ότι το $g(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $f(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)h(x)$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f(x) \mid g(x)$. Αν το $f(x)$ **δεν διαιρεί** το $g(x)$ γράφουμε $f(x) \nmid g(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. Ισχύουν τα εξής:

(i) $f(x) \mid 0$, για κάθε $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $0 \mid f(x)$, αν και μόνον αν $f(x) = 0$.

(ii) $\lambda \mid f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

(iii) Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid h(x)$, τότε $f(x) \mid h(x)$.
(iv) Αν $f(x) \mid g_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$ και $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε

$$f(x) \Bigm| \sum_{k=1}^{m} h_k(x) g_k(x).$$

(v) Αν $f(x) \mid g(x)$ και $h(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$. Αν $h(x) \neq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$.
(vi) Αν $f_k(x) \mid g_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$, τότε $f_1(x) \cdots f_m(x) \mid g_1(x) \cdots g_m(x)$. Στην περίπτωση που $f_1(x) = \cdots = f_m(x) = f(x)$ και $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = g(x)$ παίρνουμε: $f(x) \mid g(x) \Rightarrow (f(x))^m \mid (g(x))^m$.
(vii) Έστω $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \deg g(x) \geq 0$. Αν $f(x) \mid g(x)$, τότε $\deg f(x) \leq \deg g(x)$. Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $g(x) = \lambda f(x)$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: **(i)** $0 = f(x) \cdot 0$, άρα $f(x) \mid 0$. Έστω $0 \mid f(x) \Rightarrow$ υπάρχει $h(x)$ με $f(x) = 0 \cdot h(x) = = 0$. Προφανώς $0 \mid 0$, γιατί $0 = 0 \cdot h(x)$, για κάθε $h(x) \in \mathbb{F}[x]$.
(ii) $f(x) = \lambda \cdot (\lambda^{-1} f(x))$.
(iii) $g(x) = f(x)\tau(x)$ και $h(x) = g(x)\mu(x)$, με $\tau(x), \mu(x) \in \mathbb{F}[x]$ και άρα $h(x) = f(x)(\tau(x)\mu(x))$.
(iv) $g_k(x) = f(x)\tau_k(x)$, όπου $\tau_k(x) \in \mathbb{F}[x]$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$.
Επομένως $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} h_k(x) g_k(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x)\tau_k(x) f(x) = \left(\sum_{k=1}^{m} h_k(x)\tau_k(x)\right) f(x)$.
(v) $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x)\tau(x)$, για κάποιο $\tau(x) \in \mathbb{F}[x]$.
Επομένως $g(x)h(x) = (f(x)h(x))\tau(x) \Rightarrow f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$. Αν τώρα $h(x) \neq 0$ και $g(x)h(x) = = (f(x)h(x))\tau(x)$, τότε $h(x)\left(g(x) - f(x)\tau(x)\right) = 0$ και επειδή $h(x) \neq 0$, $g(x) = f(x)\tau(x) \Rightarrow \Rightarrow f(x) \mid g(x)$.
(vi) $f_k(x) \mid g_k(x)$, τότε $g_k(x) = f_k(x)\tau_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$,
όπου $\tau_1(x), \tau_2(x), \ldots, \tau_m(x) \in \mathbb{F}[x]$.
Επομένως $g_1(x)g_2(x) \cdots g_m(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x)\tau(x)$, όπου $\tau(x) = \tau_1(x)\tau_2(x) \cdots \tau_m(x)$.
(vii) $f(x) \neq 0$, γιατί αν $0 \mid g(x)$, τότε $g(x) = 0$. Άρα $g(x) = f(x)\tau(x)$, όπου $\tau(x) \neq 0$. Κατά συνέπεια $\deg g(x) = \deg\left(f(x)\tau(x)\right) = \deg f(x) + \deg \tau(x) \geq \deg f(x)$.
Αν τώρα $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $g(x) = \tau(x)f(x)$ και $f(x) = g(x)\varphi(x)$, όπου $\tau(x), \varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Επομένως $g(x) = \tau(x)\varphi(x)g(x) \Leftrightarrow g(x)\left(1 - \tau(x)\varphi(x)\right) = 0 \underset{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \tau(x)\varphi(x) = = 1$. Επομένως τα $\tau(x), \varphi(x)$ είναι αντιστρέψιμες σταθερές, έστω $\tau(x) = \lambda \in \mathbb{F}$ και $\varphi(x) = = \lambda^{-1}$. Άρα $g(x) = \lambda f(x)$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.18. Ένα $\big($μη μηδενικό πολυώνυμο$\big)$ $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\deg f(x) = n \Leftrightarrow \alpha_n \neq 0$, λέγεται **μονικό** αν $\alpha_n = 1$, δηλαδή

$$f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.19. Έστω $f(x)$, $g(x)$ δύο μονικά πολυώνυμα. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) $f(x) = g(x)$.
(ii) $f(x) \mid g(x)$ και $\deg f(x) = \deg g(x)$.

Απόδειξη: Η κατεύθυνση **(i)⇒(ii)** είναι προφανής. Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x) \mid g(x)$ και $\deg f(x) = \deg g(x)$. Επομένως $g(x) = f(x)h(x)$, για κάποιο μη μηδενικό πολυώνυμο $h(x)$. Τότε $\deg g(x) = \deg f(x) + \deg h(x) \Leftrightarrow \deg h(x) = \deg g(x) - \deg f(x) = 0$. Επομένως $h(x) = \lambda$, όπου λ μια μη μηδενική σταθερά και συνεπώς $g(x) = \lambda f(x)$. Εφόσον το $f(x)$ είναι μονικό, ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\lambda f(x) = g(x)$ έχει συντελεστή λ και άρα, εφόσον το $g(x)$ είναι μονικό, $\lambda = 1$. ■

Παρατήρηση: Από το **(vii)** της πρότασης **2.17** προκύπτει ότι αν για δύο μονικά πολυώνυμα

$f(x)$ και $g(x)$ έχουμε $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $f(x) = g(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.20. Ένα μη σταθερό πολυώνυμο $p(x)$ του $\mathbb{F}[x]$ λέγεται **ανάγωγο** αν και μόνον αν από κάθε σχέση της μορφής $p(x) = g(x)h(x)$ προκύπτει ότι κάποιο από τα $g(x)$, $h(x)$ είναι μη μηδενική σταθερά.

Παρατηρήσεις: **α)** Αν το $p(x)$ είναι ανάγωγο και λ μια μη μηδενική σταθερά, τότε και το $\lambda p(x)$ είναι ανάγωγο. Πράγματι, αν $\lambda p(x) = g(x)h(x)$, τότε $p(x) = (\lambda^{-1}g(x))h(x)$. Επομένως είτε $\lambda^{-1}g(x) = \mu$, μη μηδενική σταθερά, άρα $g(x) = \lambda\mu$, μη μηδενική σταθερά ή $h(x)$ μια μη μηδενική σταθερά.
Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε ανάγωγα μονικά πολυώνυμα, που φυσικά προκύπτουν αν διαιρέσουμε με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.
β) Αν $p(x)$ και $q(x)$ είναι δύο ανάγωγα μονικά πολυώνυμα και $p(x) \mid q(x)$, τότε $p(x) = q(x)$. Πράγματι, αν $q(x) = p(x)h(x)$, τότε επειδή το $q(x)$ είναι ανάγωγο και το $p(x)$ μη σταθερό, έπεται ότι $h(x) = \lambda \in \mathbb{F}$. Αλλά τότε ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $p(x)\lambda = q(x)$ είναι λ. Επειδή το $q(x)$ είναι μονικό, έπεται ότι $\lambda = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.21. Έστω $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \in \mathbb{F}[x]$, όχι όλα μηδενικά, όπου $n \geq 2$. Τότε υπάρχει μοναδικό **μονικό** πολυώνυμο $\delta(x)$ μεγίστου βαθμού με την ιδιότητα $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή το $\delta(x)$ είναι κοινός μονικός διαιρέτης των $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ μεγίστου βαθμού.
Επιπροσθέτως, υπάρχουν πολυώνυμα $\big($όχι μοναδικά$\big)$ $h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε

$$\delta(x) = h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x) + \cdots + h_n(x)f_n(x).$$

Επιπλέον, κάθε κοινός διαιρέτης $\delta'(x)$ των $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ διαιρεί το $\delta(x)$. Το $\delta(x)$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\boldsymbol{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)}$** και συμβολίζεται με $\boldsymbol{(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))}$.
Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f_1(x) \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} h_k(x)f_k(x) \;\middle|\; h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x) \in \mathbb{F}[x] \text{ και } \sum_{k=1}^{n} h_k(x)f_k(x) \neq 0 \right\}$$

όλων των **μη μηδενικών** γραμμμικών συνδυασμών $\big($με συντελεστές στο $\mathbb{F}[x]\big)$ των $f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Εφόσον $1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \cdots + 0 \cdot (x)f_n(x) = f_1(x) \neq 0$, άρα $f_1(x) \in \mathcal{A}$, το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό. Επειδή οι βαθμοί των πολυωνύμων του $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός, έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $\delta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} h_k(x)f_k(x) \in \mathcal{A}$ **ελαχίστου βαθμού** $m \geq 0$.
Το $\delta(x)$ μπορεί να θεωρηθεί **μονικό** γιατί, σε αντίθετη περίπτωση αν $\alpha \neq 0$ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του, τότε το $\alpha^{-1}\delta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha^{-1}h_k(x)f_k(x)$ είναι μονικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ του ιδίου βαθμού με το $\delta(x)$.
Ισχυριζόμαστε ότι $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Πράγματι, αν $\delta(x) \nmid f_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \ldots, n$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\delta \nmid f_1(x)$.
Επομένως $f_1(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου $\upsilon(x) \neq 0$ και $\deg \upsilon(x) < \deg \delta(x)$. Αλλά τότε έχουμε:

$$\upsilon(x) = f_1(x) - \pi(x)\delta(x) = f_1(x) - \pi(x)\left(\sum_{k=1}^{n} h_k(x)f_k(x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} h'_k(x) f_k(x) \in \mathcal{A},$$

όπου $h'_1(x) = 1 - \pi(x)h_1(x)$ και $h'_k(x) = -\pi(x)h_k(x)$, για κάθε $k = 2, 3, \ldots, n$.
Αυτό είναι άτοπο γιατί το $\delta(x)$ είναι ελαχίστου βαθμού στο $\mathcal{A}$. Επομένως $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$.

Αν τώρα $\delta'(x)$ είναι κοινός διαιρέτης των $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, τότε $\delta'(x) \mid \sum_{k=1}^{n} h_k(x) f_k(x) =$ $= \delta(x)$ και συνεπώς $\deg \delta'(x) \leq \deg \delta(x)$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.22. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $(f(x), g(x)) = 1$, τότε τα $f(x)$ και $g(x)$ λέγονται **πρώτα μεταξύ τους** ή **σχετικώς πρώτα**.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.23. Έστω $f(x) \neq 0$ και $f(x) \mid g(x)\varphi(x)$. Υποθέτουμε ότι $(f(x), g(x)) = 1$. Τότε $f(x) \mid \varphi(x)$.
Απόδειξη: Εφόσον $(f(x), g(x)) = 1$, υπάρχουν $\tau_1(x), \tau_2(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε $\tau_1(x)f(x)+$ $+\tau_2(x)g(x) = 1$. Επομένως $\tau_1(x)f(x)\varphi(x)+\tau_2(x)g(x)\varphi(x) = \varphi(x)$. Επειδή $f(x) \mid \tau_1(x)f(x)\varphi(x)$ και $f(x) \mid \tau_2(x)\,(g(x)\varphi(x))$, έπεται ότι $f(x) \mid \tau_1(x)f(x)\varphi(x) + \tau_2(x)g(x)\varphi(x) = \varphi(x)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.24. **(i)** Αν $p(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο και $p(x) \nmid f(x)$, τότε $(p(x), f(x)) = 1$.
(ii) Αν $p(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο και $p(x) \mid f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)$, τότε $p(x) \mid f_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \ldots, m$.
Απόδειξη: **(i)** Έστω $\delta(x) = (p(x), f(x))$. Τότε $p(x) = \delta(x)h(x)$. Αν $\delta(x)$ μη σταθερό πολυώνυμο, τότε $h(x) = \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Τότε $p(x) = \delta(x)\lambda \Leftrightarrow \delta(x) = \lambda^{-1}p(x)$. Εφόσον $\lambda^{-1}p(x) = \delta(x) \mid f(x)$, έπεται ότι $p(x) \mid f(x)$, άτοπο. Επομένως $\delta(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο και επειδή είναι μονικό, $\delta(x) = 1$.
(ii) Αν $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω $m > 1$. Αν $p(x) \mid f_1(x)$ έχει καλώς. Αν $p(x) \nmid f_1(x)$, από το **(i)** προκύπτει ότι $(p(x), f_1(x)) = 1$. Τώρα με βάση το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι $p(x) \mid f_2(x)\cdots f_m(x)$. $\big(m-1$ παράγοντες$\big)$. Η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή επί του πλήθους των παραγόντων $f_k(x)$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.25. $\big($**Θεώρημα Ανάλυσης σε Γινόμενο Αναγώγων Μονικών Πολυωνύμων**$\big)$
Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο. $\big(\alpha_k \in \mathbb{F}$ και $\alpha_n \neq 0\big)$.
Τότε υπάρχουν μονικά πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_r(x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) = \alpha_n \cdot p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x). \qquad \mathbf{(1)}$$

Επιπλέον, τα $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_r(x)$ είναι **μοναδικά**, δηλαδή αν

$$f(x) = \alpha_n \cdot q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x), \qquad \mathbf{(2)}$$

όπου τα $q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x)$ είναι ανάγωγα μονικά πολυώνυμα, τότε $r = t$ και $\big($εν ανάγκη αλλάζοντας την αρίθμηση των $q_k(x)\big)$ έχουμε $p_k(x) = q_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, r$.
Απόδειξη: Εφαρμόζουμε επαγωγή επί του $\deg f(x) = n$. Αν $n = 1$, τότε το $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πρωτοβάθμιο, άρα ανάγωγο και $f(x) = \alpha_1 \left(x + \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}\right)$ και το $p_1(x) = x + \dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}$ είναι προφανώς ανάγωγο μονικό.
Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερου του $n > 1$. Έστω λοιπόν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n \neq 0 \Leftrightarrow \deg f(x) = n$.
Αν το $f(x)$ ήταν ανάγωγο δεν έχουμε παρά να γράψουμε $f(x) = \alpha_n \cdot \dfrac{1}{\alpha_n} f(x)$ και το $p_1(x) =$

$= \dfrac{1}{\alpha_n} f(x)$ είναι ανάγωγο μονικό.
Αν το $f(x)$ δεν ήταν ανάγωγο, τότε θα γραφόταν στη μορφή $f(x) = g(x)h(x)$, όπου $g(x), h(x)$ μη σταθερά πολυώνυμα. Κατά συνέπεια $\deg g(x) \geq 1$ και $\deg h(x) \geq 1$. Επειδή $\deg g(x) + \deg h(x) = \deg f(x) = n$, θα είχαμε $1 \leq \deg g(x) < n$ και $1 \leq \deg h(x) < n$. Με βάση την επαγωγική υπόθεση $g(x) = \beta_\kappa \cdot p_1(x)p_2(x)\cdots p_\mu(x)$ και $h(x) = \gamma_\lambda \cdot p'_1(x)p'_2(x)\cdots p'_\nu(x)$, όπου $\beta_\kappa \neq 0$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)$, $\big(\kappa = \deg g(x)\big)$ και $\gamma_\lambda \neq 0$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $h(x)$. $\big(\lambda = \deg h(x)\big)$.
Επειδή τα $p_i(x), p'_j(x)$ είναι μονικά, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)h(x) = f(x)$ είναι $\beta_\kappa\gamma_\lambda$, δηλαδή $\beta_\kappa\gamma_\lambda = \alpha_n$. Συνεπώς $f(x) = \alpha_n \cdot p_1(x)p_2(x)\cdots p_\mu(x)p'_1(x)p'_2(x)\cdots p'_\nu(x)$ και θέτοντας για λόγους ομοιομορφίας $p_{\mu+1}(x) = p'_1(x), p_{\mu+2}(x) = p'_2(x), \ldots, p_{\mu+\nu}(x) = p'_\nu(x)$, γράφουμε το $f(x)$ στη μορφή $f(x) = \alpha_n p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$, όπου $r = \mu + \nu$.
Όσον αφορά το μονοσήμαντο: Οι σχέσεις **(1)** και **(2)** ισοδυναμούν με τη σχέση

$$p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x) \qquad \mathbf{(3)}.$$

Για $r = 1$ θα είχαμε και $t = 1$, γιατί αλλιώς το ανάγωγο πολυώνυμο $p_1(x)$ θα ήταν ίσο με το γινόμενο δύο ή περισσότερων μη σταθερών πολυωνύμων. Άρα $p_1(x) = q_1(x)$ και τελειώσαμε.
Έστω $r > 1$. Επειδή το $p_1(x)$ είναι ανάγωγο, σύμφωνα με το πόρισμα **2.24 (ii)** πρέπει να έχουμε $p_1(x) \mid q_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \ldots, s$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p_1(x) \mid q_1(x)$. Σύμφωνα με την παρατήρηση **β)** $\big($σελ. 97$\big)$ έχουμε $p_1(x) = q_1(x)$. Η σχέση **(3)** γράφεται λοιπόν

$$p_2(x)\cdots p_r(x) = q_2(x)\cdots q_t(x)$$

και στο πρώτο μέλος έχουμε $r - 1$ παράγοντες, άρα η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή επί του r. ■

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

140. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ με $(f(x), g(x)) = 1$. Αν $f(x) \mid h(x)$ και $g(x) \mid h(x)$, δείξτε ότι και $f(x)g(x) \mid h(x)$.
Απόδειξη: Εφόσον $f(x) \mid h(x)$, $h(x) = f(x)\tau(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\tau(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αλλά $g(x) \mid h(x) = f(x)\tau(x)$ και $(f(x), g(x)) = 1$. Από το πόρισμα **2.23** προκύπτει ότι $g(x) \mid \tau(x)$ και άρα $\tau(x) = g(x)\omega(x)$, για κάποιο $\omega(x) \in \mathbb{F}[x]$. Επομένως $h(x) = f(x)g(x)\omega(x)$ και συνεπώς $f(x)g(x) \mid h(x)$. ■

141. Θεωρούμε τα πραγματικά πολυώνυμα $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους και εκφράστε τον ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.
Λύση: Διαιρούμε το $f(x)$ με το $g(x)$

$$\begin{array}{rrrrr|rrrr}
x^4 & +x^3 & -3x^2 & -x & +2 & x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \\ \cline{6-9}
-x^4 & +2x^3 & +5x^2 & -6x & & x & +3 & & \\ \cline{1-5}
 & 3x^3 & +2x^2 & -7x & +2 & & & & \\
 & -3x^3 & +6x^2 & +15x & -18 & & & & \\ \cline{2-5}
 & & 8x^2 & +8x & -16 & & & &
\end{array}$$

Άρα $\pi(x) = x + 3$ και $\upsilon(x) = 8x^2 + 8x - 16 = 8(x^2 + x - 2)$.
Στη συνέχεια διαιρούμε το $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ με το $\upsilon(x) = 8x^2 + 8x - 16$.

$$
\begin{array}{rrrr|rrr}
x^3 & -2x^2 & -5x & +6 & 8x^2 & +8x & -16 \\
\cline{1-4}\cline{5-7}
-x^3 & -x^2 & +2x & & \frac{1}{8}x & -\frac{3}{8} & \\
\cline{1-4}
 & -3x^2 & -3x & +6 & & & \\
 & 3x^2 & +3x & -6 & & & \\
\cline{2-4}
 & & & 0 & & &
\end{array}
$$

Άρα $\pi_1(x) = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$ και $\upsilon_1(x) = 0$.
Το συμπέρασμα είναι ότι

$$(f(x), g(x)) = x^2 + x - 2 = \tfrac{1}{8}\big(f(x) - (x+3)g(x)\big) = \tfrac{1}{8}f(x) - \tfrac{1}{8}(x+3)g(x). \qquad \blacksquare$$

Αριθμητική Τιμή-Ρίζα Πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.26. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ με $\alpha_n \neq 0$. Αν $\rho \in \mathbb{F}$ θέτουμε $f(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0$.
(i) Το $f(\rho)$ ονομάζεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$**.
(ii) Η συνάρτηση $\mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ με τύπο $f(\rho) = \alpha_n\rho^n + \alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0$, για κάθε $\rho \in \mathbb{F}$ ονομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση** και συμβολίζεται με f.
(iii) Αν $f(\rho) = 0$, το $\rho \in \mathbb{F}$ ονομάζεται **ρίζα** του πολυωνύμου $f(x)$ ή της πολυωνυμικής συνάρτησης f.
Ισχύει το εξής θεμελιώδες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.27. Το ρ είναι ρίζα του $f(x)$ αν και μόνον αν $x - \rho \mid f(x)$. Γενικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{F}$ ισούται με $f(\rho)$.
Απόδειξη: Έστω $f(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου $\deg \upsilon(x) < \deg(x-\rho) = 1$. Άρα $\upsilon(x) = 0$ ή μια μη μηδενική σταθερά του $\mathbb{F}$. Επομένως $f(x) = (x-\rho)\pi(x) + \upsilon$, όπου $\upsilon \in \mathbb{F}$. Συμπεραίνουμε ότι $f(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + \upsilon = \upsilon$.
Άρα $f(x) = (x-\rho)\pi(x) + f(\rho)$. Τώρα, $f(\rho) = 0$ αν και μόνον αν $f(x) = (x-\rho)\pi(x)$, δηλαδή $x - \rho \mid f(x)$. $\blacksquare$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.28. $\big($**ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**$\big)$ Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ $\big($με μιγαδικούς συντελεστές$\big)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας. Ακόμη και οι στοιχειωδέστερες χρησιμοποιούν ως ένα βαθμό στοιχεία Ανάλυσης. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι το $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ κατασκευάζεται με βάση το σύνολο των πραγματικών και κατά συνέπεια η συνέχεια των πραγματικών παίζει καθοριστικό ρόλο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.29. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_k \in \mathbb{C}$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $\alpha_n \neq 0$ μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο. $\big(n = \deg f(x) \geq 1\big)$.
Τότε το $f(x)$ έχει ακριβώς **n μιγαδικές ρίζες** $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ **όχι κατ' ανάγκην διαφορετικές μεταξύ τους**.
Απόδειξη: Αν $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_1 \neq 0$, δηλαδή $\deg f(x) = 1$, τότε $f(x) = \alpha_1 \cdot (x - \rho)$, όπου $\rho = -\dfrac{\alpha_0}{\alpha_1}$ η μοναδική ρίζα του $f(x)$.
Υποθέτουμε ότι $n = \deg f(x) > 1$ και άρα $\alpha_n \neq 0$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας προκύπτει ότι το $f(x)$ έχει μια μιγαδική ρίζα ρ_1. Όπως είδαμε, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $x - \rho_1 \mid f(x)$ και επομένως $f(x) = (x - \rho_1)g(x)$, όπου $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ και $\deg g(x) = n - 1 > 0$. Σημειώνουμε ότι επειδή το $x - \rho_1$ είναι μονικό και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου

του $f(x)$ είναι ο α_n, αυτός θα είναι και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)$. Επαγωγικώς υποθέτουμε ότι το $g(x)$ έχει $n-1$ ρίζες, τις $\rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_n$ και
$g(x) = \alpha_n \cdot (x-\rho_2)(x-\rho_3)\cdots(x-\rho_n)$. Κατά συνέπεια $f(x) = \alpha_n \cdot (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.30. $\big($**Σχέσεις του Vieta**[2]$\big)$ Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_k \in \mathbb{C}$, για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$ και $\alpha_n \neq 0$ μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο. $\big(n = \deg f(x) \geq 1\big)$.
Αν $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \in \mathbb{C}$ είναι οι ρίζες του $f(x)$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= \sum_{k=1}^{n} \rho_k &&= -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \\
e_2 &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2} &&= \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \\
e_3 &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3} &&= -\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n} \\
& &&\vdots \\
e_n &= \rho_1\rho_2\cdots\rho_n &&= (-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}
\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(1)}$$

Απόδειξη: Στη σχέση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \alpha_n \cdot (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$ διαιρούμε με α_n και παίρνουμε

$$x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}x^{n-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n}x + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} = (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n).$$

Στο $2^{\text{ο}}$ μέλος το x^n προκύπτει αν από κάθε παρένθεση πάρουμε το x. Επίσης στο $2^{\text{ο}}$ μέλος το x^{n-1} προκύπτει αν από κάθε παρένθεση πάρουμε το x, εκτός από μία, από την οποία θα πάρουμε το $-\rho_k$. Έχουμε n επιλογές για το ρ_k με συντελεστή -1. Άρα ο συντελεστής του x^{n-1} στο $2^{\text{ο}}$ μέλος ισούται με $-\sum_{k=1}^{n}\rho_k$, ενώ στο $1^{\text{ο}}$ μέλος $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. Επομένως $-\sum_{k=1}^{n}\rho_k = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\rho_k = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$.
Συνεχίζοντας, στο $2^{\text{ο}}$ μέλος το x^{n-2} προκύπτει αν πάρουμε το x από $n-2$ παρενθέσεις και από τις άλλες δύο τα $-\rho_{k_1}$ και $-\rho_{k_2}$ με γινόμενο $(-\rho_{k_1})(-\rho_{k_2}) = \rho_{k_1}\rho_{k_2}$. Επειδή τα k_1, k_2 είναι διαφορετικοί δείκτες, κάποιος, έστω ο k_1 είναι ο μικρότερος. Για όλες αυτές τις επιλογές $\rho_{k_1}\rho_{k_2}$ παίρνουμε τον συντελεστή $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}$ του x^{n-2} στο $2^{\text{ο}}$ μέλος. Στο $1^{\text{ο}}$ μέλος ο συντελεστής του x^{n-2} είναι $\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$. Επομένως $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2} = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$.
Για το x^{n-3} επιλέγουμε τρεις παρενθέσεις από τις οποίες επιλέγουμε τα $-\rho_{k_1}, -\rho_{k_2}, -\rho_{k_3}$ με $k_1 < k_2 < k_3$ και γινόμενο $-\rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3}$ και αθροίζουμε για όλες αυτές τις επιλογές. Παίρνουμε ως συντελεστή του x^{n-3} στο $2^{\text{ο}}$ μέλος τον $-\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3}$ και στο $1^{\text{ο}}$ μέλος τον $\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}$.
Επομένως $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3} = -\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}$. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο φτάνουμε στον σταθερό όρο του $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_n)$ που είναι ο $(-1)^n\rho_1\rho_2\cdots\rho_n$, ενώ στο πρώτο είναι ο $\frac{\alpha_0}{\alpha_n}$.
Καταλήγουμε, αφού πολλαπλασιάσουμε επί $(-1)^n$ στο αποτέλεσμα $\rho_1\rho_2\cdots\rho_n = (-1)^n\frac{\alpha_0}{\alpha_n}$. ■

[2]Λατινική απόδοση Franciscus Vieta του ονόματος του Γάλλου Μαθηματικού François Viète, 1540-1603.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.31. Οι παραστάσεις $e_1 = \sum_{k=1}^{n} \rho_k$, $e_2 = \sum_{1 \le k_1 < k_2 \le n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}$, $e_3 = \sum_{1 \le k_1 < k_2 < k_3 \le n} \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3}$, $\ldots$, $e_n = \rho_1\rho_2 \cdots \rho_n$ στο αριστερό μέλος της σχέσης (1) λέγονται **στοιχειώδεις συμμετρικές παραστάσεις ή συναρτήσεις** των $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Δεν μεταβάλλονται για οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Για παράδειγμα, στο τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ $\big(\alpha \neq 0$ και ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου$\big)$ έχουμε: $\rho_1 + \rho_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1\rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. Αυτό είπε ο Vieta; Μάλλον, κατά την άποψη του βιβλίου της α′ λυκείου....

Όπως τονίσαμε, οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ **δεν είναι κατ᾽ ανάγκην διαφορετικές**. Έστω $\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \ldots$, ρ_{k_t} οι διαφορετικές ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε το $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \alpha_n \cdot (x - \rho_{k_1})^{r_1}(x - \rho_{k_2})^{r_2} \cdots (x - \rho_{k_t})^{r_t}, \qquad \textbf{(2)}$$

όπου $\rho_{k_i} \neq \rho_{k_j}$, για $i \neq j$ και $r_i \geq 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, t$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.32. Ο εκθέτης r_i στη σχέση (2) λέγεται **πολλαπλότητα της ρίζας ρ_{k_i}** στο πολυώνυμο $f(x)$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, t$.

Παρατήρηση: Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο $\mathbb{C}[x]$ τα μόνα ανάγωγα μονικά πολυώνυμα είναι της μορφής $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{C}$.
Ποια είναι τώρα τα ανάγωγα μονικά πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$; Στην άσκηση **92** αποδείξαμε ότι αν ένα πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζα έναν μιγαδικό αριθμό z, τότε έχει ρίζα και τον συζυγή του $\bar{z}$. Στην επόμενη πρόταση θα δώσουμε μιαν άλλη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, η οποία θα μας επιτρέψει να χαρακτηρίσουμε και τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.33. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ $\big(\alpha_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n\big)$ και $\alpha_n \neq 0$, οπότε $\deg f(x) = n$. Έστω $z = \kappa + \lambda\mathbf{i}$ καθαρός μιγαδικός, δηλαδή $\lambda \neq 0$, που είναι ρίζα του $f(x)$. Τότε το $f(x)$ διαιρείται από το ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ πολυώνυμο $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$ και επομένως και ο $\kappa - \lambda\mathbf{i}$ είναι ρίζα του $f(x)$.
Απόδειξη: Επειδή $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2 = \big(x - (\kappa + \lambda\mathbf{i})\big)\big(x - (\kappa - \lambda\mathbf{i})\big)$, το $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$ είναι όντως ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$, διότι δεν αναλύεται σε γινόμενο **πρωτοβάθμιων πραγματικών** πολυωνύμων ή αλλιώς έχει αρνητική διακρίνουσα, την $-4\lambda^2$.
Επίσης, $\deg f(x) \geq 2$ γιατί αν το $f(x)$ ήταν της μορφής $\alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, τότε θα είχε μια μοναδική πραγματική ρίζα, την $-\dfrac{\beta}{\alpha}$
Έστω $f(x) = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2)\pi(x) + \upsilon(x)$, όπου $\pi(x), \upsilon(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $\deg \upsilon(x) < \deg(x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2) = 2$. Άρα το $\upsilon(x)$ είναι το πολύ βαθμού 1, δηλαδή $\upsilon(x) = px + q$, όπου $p, q \in \mathbb{R}$. Εφόσον ο μιγαδικός $\kappa + \lambda\mathbf{i}$ μηδενίζει το $f(x)$, αλλά και το $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$, θα μηδενίζει και το $\upsilon(x) = px + q$, δηλαδή $p\kappa + q + p\lambda\mathbf{i} = 0$. Επομένως $p\lambda = 0$ και επειδή $\lambda \neq 0$, έχουμε $p = 0$. Αλλά από τη σχέση $p\kappa + q + p\lambda\mathbf{i} = 0$ παίρνουμε ότι και $q = 0$. Επομένως $\upsilon(x) = 0$, δηλαδή $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2 \mid f(x) = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2)\pi(x)$. Επειδή όμως και ο μιγαδικός $\kappa - \lambda\mathbf{i} = \overline{\kappa + \lambda\mathbf{i}}$ μηδενίζει το $x^2 - 2\kappa + \kappa^2 + \lambda^2$, θα μηδενίζει και το $f(x)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.34. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \alpha_n \cdot (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ πραγματικό πολυώνυμο με ρίζες τους μιγαδικούς $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. Αν κάποια ρίζα $\rho_i = \kappa + \lambda\mathbf{i}$

ήταν καθαρός μιγαδικός της μορφής $\kappa+\lambda\mathbf{i}$, $\big(\lambda\neq 0\big)$, τότε **η πολλαπλότητα της ρίζας ρ_i συμπίπτει με την πολλαπλότητα της συζυγούς ρίζας $\bar{\rho}_i$** στην ανάλυση του $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων μιγαδικών παραγόντων.

Απόδειξη: Έστω r_i η πολλαπλότητα της ρ_i και s_i η πολλαπλότητα του $\bar{\rho}_i$ στην ανάλυση του $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων μιγαδικών πολυωνύμων. Από την προηγούμενη πρόταση $f(x) = (x^2-2\kappa x+\kappa^2+\lambda^2)\pi(x)$, όπου $\pi(x)\in\mathbb{R}[x]$ και $\deg\pi(x)=\deg f(x)-2$. Τότε η πολλαπλότητα του ρ_i στην ανάλυση του $\pi(x)$ θα είναι r_i-1, πιθανώς μηδέν. Επίσης η αντίστοιχη πολλαπλότητα του $\bar{\rho}_i$ θα είναι s_i-1. Με επαγωγή επί του r_i συμπεραίνουμε ότι $r_i-1=s_i-1\Leftrightarrow r_i=s_i$. ■

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι **οι καθαρές μιγαδικές ρίζες πραγματικών πολυωνύμων εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών με προφανώς την ίδια πολλαπλότητα**.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.35. Τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{R}[x]$ είναι:
(i) Τα πρωτοβάθμια και
(ii) Τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα.

Απόδειξη: **(i)** Προφανώς τα πρωτοβάθμια είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$.
(ii) Έστω $f(x)\in\mathbb{R}[x]$ με $\deg f(x)>1$. Το $f(x)$ δεν μπορεί να έχει πρωτοβάθμιο πραγματικό διαιρέτη, γιατί τότε θα είχε και άλλον μη σταθερό διαιρέτη, επομένως δεν θα ήταν ανάγωγο. Επειδή το $f(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{C}$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων, κανείς από τους πρωτοβάθμιους διαιρέτες δεν θα ήταν πραγματικός, σύμφωνα με το **(i)**. Άρα θα ήταν της μορφής $(x-\rho)$, όπου $\rho=\kappa+\lambda\mathbf{i}$ καθαρός μιγαδικός. Αλλά τότε και ο $\bar{\rho}=\kappa-\lambda\mathbf{i}$ θα ήταν ρίζα του $f(x)$. Επομένως και το $(x-\bar{\rho})$ θα ήταν διαιρέτης του $f(x)$. Αλλά το $\alpha(x-\rho)(x-\bar{\rho}) = \alpha x^2-2\alpha\mathrm{Re}(\rho)+\alpha|\rho|^2$ θα ήταν ανάγωγο, όπου α ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$, αφού η διακρίνουσά του είναι $4\alpha^2\big((\mathrm{Re}(\rho))^2-(\mathrm{Re}(\rho))^2-(\mathrm{Im}(\rho))^2\big)=-4\alpha^2(\mathrm{Im}(\rho))^2<0$. Επειδή το $f(x)$ είναι ανάγωγο και διαιρείται από το ανάγωγο $\alpha x^2-2\alpha\mathrm{Re}(\rho)+\alpha|\rho|^2$ και έχει τον ίδιο συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το α, έπεται ότι $f(x)=\alpha x^2-2\alpha\mathrm{Re}(\rho)+\alpha|\rho|^2$, δευτεροβάθμιο τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.36. Κάθε πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη: Αν όλες οι ρίζες ήταν καθαρές μιγαδικές, αυτές χωρίζονται σε ζεύγη συζυγών $\rho,\bar{\rho}$ και παράγουν τα ανάγωγα $\big($στο $\mathbb{R}\big)$ δευτεροβάθμια τριώνυμα $x^2-2\mathrm{Re}(\rho)+|\rho|^2$ υψωμένα στη πολλαπλότητα της ρ, έστω r. Προφανώς $\deg\big((x^2-2\mathrm{Re}(\rho)+|\rho|^2)^r\big)=2r$ άρτιος. Επομένως ο βαθμός του $f(x)$ θα ήταν άθροισμα αρτίων ακεραίων, άρα άρτιος. Άτοπο. ■

Σημείωση: Το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει και από το θεώρημα Bolzano. Έστω $f(x) = \alpha_{2n+1}x^{2n+1}+\alpha_{2n}x^{2n}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0$ με $\alpha_{2n+1}\neq 0$. Αρκούμαστε στην περίπτωση $\alpha_{2n+1}>0$. Τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Άρα υπάρχουν $\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\delta<\varepsilon$ και $f(\delta)<0$ και $f(\varepsilon)>0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(\delta,\varepsilon)$, τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.37. **(i)** Αν $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m$ είναι διαφορετικές ανά δύο ρίζες ενός πολυωνύμου $f(x)$, τότε

$$(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_m)\mid f(x).$$

(ii) Ένα πολυώνυμο $f(x)$ το πολύ βαθμού $n\geq 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από n διαφορετικές ρίζες. Άρα ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού n με τουλάχιστον $n+1$ διαφορετικές ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Απόδειξη: **(i)** Αν $m=1$, τότε αυτό είναι το περιεχόμενο της πρότασης **2.27**. Υποθέτουμε ότι

$m > 1$. Εφόσον ρ_1 είναι ρίζα του $f(x)$, τότε $x - \rho_1 \mid f(x)$, δηλαδή $f(x) = (x - \rho_1)\pi(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$. Επειδή $f(\rho_k) = (\rho_k - \rho_1)\pi(\rho_k) = 0$ και $\rho_k - \rho_1 \neq 0$, για κάθε $k = 2, 3, \ldots, m$, έπεται ότι $\pi(\rho_k) = 0$, για κάθε $k = 2, 3, \ldots, m$. Επαγωγικά προκύπτει ότι $\pi(x) = (x - \rho_2)(x - \rho_3) \cdots (x - \rho_m)\pi'(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\pi'(x)$. Επομένως

$$f(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_m)\pi'(x).$$

(ii) Έστω $n = 0$, δηλαδή $f(x) = \alpha_0$, σταθερά. Αν ρ είναι μια ρίζα του $f(x)$, τότε $f(x) = \alpha_0 = f(\rho) = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $0 \leq \deg f(x) < n$, όπου n θετικός ακέραιος.

Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει $n + 1$ διαφορετικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \rho_{n+1}$. Εφόσον το ρ_{n+1} είναι ρίζα του $f(x)$, τότε σύμφωνα με την πρόταση **2.27** το $f(x)$ γράφεται $f(x) = (x - \rho_{n+1})g(x)$, όπου προφανώς $\deg g(x) = \deg f(x) - 1 = n - 1$. Επειδή $f(\rho_k) = (\rho_k - \rho_{n+1})g(\rho_k) = 0$ και $\rho_k - \rho_{n+1} \neq 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, έπεται ότι $g(\rho_k) = 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$, δηλαδή το $g(x)$ βαθμού $n - 1$ έχει n διαφορετικές ρίζες. Με επαγωγή στο n οδηγούμαστε σε άτοπο. ■

Ασκήσεις

142. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} + \dfrac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}$ με $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \neq 0$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $f(x) = 1$.

Απόδειξη: Επειδή στον αριθμητή κάθε κλάσματος εμφανίζεται το x^2 συμπεραίνουμε ότι το $f(x)$, άρα και το $f(x) - 1$ είναι το πολύ δευτέρου βαθμού. Παρατηρούμε ότι $f(\alpha) = 0 + 1 + 0 = 1$, $f(\beta) = 0 + 0 + 1 = 1$ και $f(\gamma) = 1 + 0 + 0 = 1$. Άρα το πολυώνυμο $f(x) - 1$, αν δεν ήταν το μηδενικό, θα είχε περισσότερες ρίζες από το βαθμό του, άτοπο. Άρα $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$. ■

143. Αν $\rho \neq 0$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ $\big(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}\big)$, τότε το ρ^{-1} είναι ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n$.

Απόδειξη: $f(\rho) = \alpha_n\rho^n + \alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \underset{\rho\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{\rho^n}\big(\alpha_n\rho^n + \alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1\rho + \alpha_0\big) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot \dfrac{1}{\rho} + \alpha_{n-2} \cdot \dfrac{1}{\rho^2} + + \cdots + \alpha_1 \cdot \dfrac{1}{\rho^{n-1}} + \alpha_0 \cdot \dfrac{1}{\rho^n} = 0.$ ■

144. Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{Z}[x]$, δηλαδή $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ακέραιοι $\big($Προσοχή! Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα$\big)$ με $\alpha_n, \alpha_0 \neq 0$ και $\rho = \dfrac{\kappa}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $(\kappa, \lambda) = 1$, δηλαδή το κλάσμα $\dfrac{\kappa}{\lambda}$ είναι ανάγωγο, τότε το κ είναι διαιρέτης του α_0 και το λ διαιρέτης του α_n.

Απόδειξη: $f\left(\dfrac{\kappa}{\lambda}\right) = \alpha_n \cdot \dfrac{\kappa^n}{\lambda^n} + \alpha_{n-1} \cdot \dfrac{\kappa^{n-1}}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \alpha_1 \cdot \dfrac{\kappa}{\lambda} + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \kappa\big(\alpha_n\kappa^{n-1} + \alpha_{n-1}\kappa^{n-2}\lambda + \cdots + \alpha_1\lambda^{n-1}\big) = -\alpha_0\lambda^n$. Άρα το κ διαιρεί το $\alpha_0\lambda^n$ και επειδή είναι πρώτο προς το λ, διαιρεί το α_0. Επίσης, $\lambda\big(\alpha_{n-1}\kappa^{n-1} + \alpha_{n-2}\kappa^{n-2}\lambda + \cdots + \alpha_1\kappa\lambda^{n-2}\big) = -\alpha_n\kappa^n$. Άρα το λ διαιρεί το $\alpha_n\kappa^n$ και επειδή είναι πρώτο προς το κ, διαιρεί το α_n. ■

Σημείωση: Από την αριθμητική ξέρουμε ότι κάθε μη μηδενικός ακέραιος διασπάται σε γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλαδή είναι της μορφής $\pm p_1^{r_1}p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ όπου p_i πρώτοι και $p_i \neq p_j$ για $i \neq j$. Αν $\kappa = \pm p_1^{r_1}p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$, τότε επειδή κάθε p_i διαιρεί τον κ δεν μπορεί να διαιρεί και τον λ, γιατί τότε το κλάσμα $\dfrac{\kappa}{\lambda}$ δεν θα ήταν ανάγωγο. Κατά συνέπεια δεν εμφανίζεται στην ανάλυση του λ

σε γινόμενο πρώτων, άρα ούτε και στην ανάλυση του λ^n. Επειδή όμως διαιρεί τον $-\alpha_0\lambda^n$, θα εμφανίζεται στην ανάλυση του α_0 σε γινόμενο πρώτων. Άρα ολόκληρος ο $\kappa = \pm p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$ διαιρεί τον α_0. Την ίδια επιχειρηματολογία χρησιμοποιούμε και όταν ο λ διαιρεί τον $\alpha_n\kappa^n$.

145. Να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$ και στο $\mathbb{C}[x]$ το πολυώνυμο x^4+1.
Λύση: Πρώτα στο $\mathbb{R}[x]$. Έχουμε $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2 = \left(x^2+1\right)^2 - \left(\sqrt{2}x\right)^2 = \left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$. Τα μονικά πολυώνυμα $x^2\pm\sqrt{2}x+1$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$ γιατί έχουν αρνητική διακρίνουσα $\Delta = 2-4 = -2$. Στο $\mathbb{C}[x]$ όμως $x^2+\sqrt{2}x+1 = \left(x-\dfrac{-\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)$ και $x^2-\sqrt{2}x+1 = \left(x-\dfrac{\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)$.
Συνεπώς $x^4+1 = \left(x+\dfrac{\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}}{2}\right)$ με ρίζες τους μιγαδικούς $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Στις ίδιες ρίζες και στην ίδια ανάλυση του x^4+1 θα καταλήγαμε αν βρίσκαμε τις 4^ες ρίζες του $-1 = \cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi$. $z_0 = \cos\dfrac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = \cos\dfrac{\pi+2\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\dfrac{\pi+2\pi}{4} = \cos\dfrac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \cos\dfrac{5\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{5\pi}{2} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ και $z_3 = \cos\dfrac{7\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\dfrac{7\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ■

146. (i) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^{n\alpha_{n-1}+n-1}+x^{n\alpha_{n-2}+n-2}+\cdots+x^{n\alpha_1+1}+x^{n\alpha_0}$ διαιρείται με το πολυώνυμο $g(x) = x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$, όπου $n,\alpha_{n-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0$ θετικοί ακέραιοι.
(ii) Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = \left(x^{r-1}+\alpha x^{r-2}+\alpha^2x^{r-3}+\cdots+\alpha^{r-2}x+\alpha^{r-1}\right)x^{(r+1)^n+1}+\alpha^{(r+1)^n+r}$$

διαιρείται από το πολυώνυμο $g(x) = x^r+\alpha x^{r-1}+\alpha^2x^{r-2}+\cdots+\alpha^{r-1}x+\alpha^r$ όπου $\alpha\in\mathbb{C}$ και n,r θετικοί ακέραιοι.
Απόδειξη: **(i)** Για κάθε $k=0,1,\ldots,n-1$ έχουμε: $x^{n\alpha_k+k}-x^k = x^k(x^{n\alpha_k}-1) = x^k((x^n)^{\alpha_k}-1)$. Επίσης, $(x^n)^{\alpha_k}-1 = (x^n-1)\left(x^{n(\alpha_k-1)}+x^{n(\alpha_k-2)}+\cdots+x^n+1\right) = (x^n-1)L_k(x)$, όπου $L_k(x) = x^{n(\alpha_k-1)}+x^{n(\alpha_k-2)}+\cdots+x^n+1$. Επομένως $f(x)-g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(x^{n\alpha_k+k}-x^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}x^k(x^n-1)L_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1}x^kL_k(x)(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) = \sum_{k=0}^{n-1}x^kL_k(x)(x-1)g(x)$.
Κατά συνέπεια $f(x) = g(x)\left(1+\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}x^kL_k(x)(x-1)\right)$.
(ii) $f(x) = \left(x^{r-1}+\alpha x^{r-2}+\alpha^2x^{r-3}+\cdots+\alpha^{r-2}x+\alpha^{r-1}\right)x^{(r+1)^n+1}+\alpha^{(r+1)^n+r} = \left(x^r+\alpha x^{r-1}+\alpha^2x^{r-2}+\cdots+\alpha^{r-2}x^2+\alpha^{r-1}x\right)x^{(r+1)^n}+\alpha^{(r+1)^n+r} = \left(x^r+\alpha x^{r-1}+\alpha^2x^{r-2}+\cdots+\alpha^{r-2}x^2+\alpha^{r-1}x+\alpha^r\right)x^{(r+1)^n}+\alpha^{(r+1)^n+r}-\alpha^rx^{(r+1)^n} = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^{(r+1)^n+r}-\alpha^rx^{(r+1)^n} = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left(\alpha^{(r+1)^n}-x^{(r+1)^n}\right) = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left((\alpha^{r+1})^{(r+1)^{n-1}}-(x^{r+1})^{(r+1)^{n-1}}\right)$.
Θέτουμε $k=(r+1)^{n-1}$, οπότε η τελευταία παράσταση ισούται με $g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left((\alpha^{r+1})^k-(x^{r+1})^k\right) = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left(\alpha^{r+1}-x^{r+1}\right)\left(\left(\alpha^{r+1}\right)^{k-1}+\left(\alpha^{r+1}\right)^{k-2}x^{r+1}+\cdots+\alpha^{r+1}\left(x^{r+1}\right)^{k-2}+\left(x^{r+1}\right)^{k-1}\right)$. Θέτουμε $\varphi(x) = \left(\alpha^{r+1}\right)^{k-1}+\left(\alpha^{r+1}\right)^{k-2}x^{r+1}+\cdots+\alpha^{r+1}\left(x^{r+1}\right)^{k-2}+\left(x^{r+1}\right)^{k-1}$ και άρα $f(x) = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left(\alpha^{r+1}-x^{r+1}\right)\varphi(x) = g(x)x^{(r+1)^n}+\alpha^r\left(\alpha-x\right)g(x)\varphi(x) =$

$= g(x)\Big(x^{(r+1)^n} + \alpha^r\big(\alpha - x\big)\varphi(x)\Big).$ ∎

147. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ με το $x^2 - \alpha^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ισούται με

$$\upsilon(x) = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha}x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}$$

Απόδειξη: Εφόσον $\deg(x^2 - \alpha^2) = 2$, το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $f(x) : (x^2 - \alpha^2)$ είναι το πολύ πρώτου βαθμού. Έστω $\upsilon(x) = \kappa x + \lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ και άρα $f(x) = (x^2 - \alpha^2)\pi(x) + \kappa x + \lambda$, όπου $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Τότε $\begin{cases} f(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda \text{ και} \\ f(-\alpha) = -\kappa\alpha + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) + f(-\alpha) = 2\lambda \\ f(\alpha) - f(-\alpha) = 2\kappa\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \dfrac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} \\ \lambda = \dfrac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2} \end{cases}.$ ∎

148. Βρείτε ένα πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού με $f(0) = 0$ και $f(x) - f(x-1) = x^2$. Στη συνέχεια υπολογίστε το άθροισμα $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση: Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$. Τότε $f(x) - f(x-1) = 3\alpha x^2 + (-3\alpha + 2\beta)x + \alpha - \beta + \gamma = x^2$.

Επομένως $\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\beta = \dfrac{1}{2}$ και $\gamma = \dfrac{1}{6}$, δηλαδή $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x$.

Επομένως $\sigma_n = \big(f(n) - f(n-1)\big) + \big(f(n-1) - f(n-2)\big) + \cdots + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(1) - f(0)\big) \underset{f(0)=0}{=} f(n) = \dfrac{1}{3}n^3 + \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{6}n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. ∎

149. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x^2 + 9\alpha x - \alpha$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει τρεις θετικές $\big($πραγματικές$\big)$ ρίζες. Να βρεθεί το α και οι ρίζες του $f(x)$.

Λύση: 1^ος^ τρόπος: Από τις σχέχεις Vieta προκύπτει ότι το άθροισμα των ριζών είναι $-\dfrac{-1}{1} = 1$. Άρα για κάθε ρίζα λ έχουμε $0 < \lambda < 1$. Επίσης για κάθε ρίζα λ έχουμε $9\alpha\lambda - \alpha = \lambda^2 - \lambda^3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha(9\lambda - 1) = \lambda^2(1-\lambda) > 0$. Κατά συνέπεια $9\lambda - 1 \neq 0$ και μάλιστα $9\lambda - 1 > 0$ γιατί το α από τις σχέσεις Vieta, ισούται με το γινόμενο των ριζών, άρα είναι θετικό. Επομένως $\alpha = \dfrac{\lambda^2(1-\lambda)}{9\lambda - 1}$.

Αν λοιπόν λ μια ρίζα του πολυωνύμου, τότε $f(x) = f(x) - f(\lambda) = x^3 - \lambda^3 - x^2 + \lambda^2 + 9\alpha(x - \lambda) = = (x-\lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) - (x-\lambda)(x+\lambda) + 9\alpha(x-\lambda) = (x-\lambda)(x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 9\alpha)$.

Το τριώνυμο $x^2 + (\lambda-1)x + \lambda^2 - \lambda + 9\alpha$ έχει τις άλλες δύο θετικές ρίζες του $f(x)$. Επομένως η διακρίνουσά του είναι μη αρνητική, δηλαδή $\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 9\alpha) \geq 0$.

Αντικαθιστώντας την τιμή $\alpha = \dfrac{\lambda^2(1-\lambda)}{9\lambda - 1}$ παίρνουμε: $(1-\lambda)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) - \dfrac{36\lambda^2(1-\lambda)}{9\lambda - 1} = = (1-\lambda)\Big(1 - \lambda + 4\lambda - \dfrac{36\lambda^2}{9\lambda - 1}\Big) \geq 0 \underset{1-\lambda>0}{\Leftrightarrow} 1 + 3\lambda - \dfrac{36\lambda^2}{9\lambda - 1} \geq 0 \underset{9\lambda-1>0}{\Leftrightarrow} 9\lambda - 1 + 27\lambda^2 - 3\lambda - 36\lambda^2 \geq \geq 0 \Leftrightarrow -9\lambda^2 + 6\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(9\lambda^2 - 6\lambda + 1) = -(3\lambda - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3\lambda - 1)^2 \leq 0$. Επομένως $3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{3}$, για κάθε ρίζα λ του $f(x)$. Το γινόμενο των ριζών $\alpha = \dfrac{1}{27}$ και τελικώς $f(x) = x^3 - x^2 + \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{27} = \Big(x - \dfrac{1}{3}\Big)^3$. ∎

2^ος^ τρόπος: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα Lagrange για τις τριάδες $\big(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}\big)$ και $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)$ και παίρνουμε

$$\Big(\big(\sqrt{\lambda_1}\big)^2 + \big(\sqrt{\lambda_2}\big)^2 + \big(\sqrt{\lambda_3}\big)^2\Big)\left(\frac{1}{\big(\sqrt{\lambda_1}\big)^2} + \frac{1}{\big(\sqrt{\lambda_2}\big)^2} + \frac{1}{\big(\sqrt{\lambda_3}\big)^2}\right) -$$

$$-\left(\sqrt{\lambda_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\sqrt{\lambda_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}+\sqrt{\lambda_3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2=\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \sqrt{\lambda_2}\\ \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^{-1}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_2} & \sqrt{\lambda_3}\\ \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_3}\right)^{-1}\end{vmatrix}^2+$$
$$+\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_3} & \sqrt{\lambda_1}\\ \left(\sqrt{\lambda_3}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1}\end{vmatrix}^2. \qquad \mathbf{(1)}$$

Αλλά $\left(\left(\sqrt{\lambda_1}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda_2}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda_3}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_1}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_2}\right)^2}+\frac{1}{\left(\sqrt{\lambda_3}\right)^2}\right)=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$
$\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}\right)\underset{\text{σχέσεις Vieta}}{=}1\cdot\frac{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\underset{\text{σχέσεις Vieta}}{=}\frac{9\alpha}{\alpha}=9$ και
$\left(\sqrt{\lambda_1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}+\sqrt{\lambda_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}+\sqrt{\lambda_3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2=3^2=9$. Άρα το αριστερό μέλος της $\mathbf{(1)}$ είναι μηδέν.
Κατά συνέπεια θα είναι μηδέν και το δεξιό μέλος και επειδή αυτό είναι άθροισμα τετραγώνων, όλοι οι όροι θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \sqrt{\lambda_2}\\ \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^{-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_2} & \sqrt{\lambda_3}\\ \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_3}\right)^{-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_3} & \sqrt{\lambda_1}\\ \left(\sqrt{\lambda_3}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1}\end{vmatrix}=0.$$

Τώρα, $\begin{vmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \sqrt{\lambda_2}\\ \left(\sqrt{\lambda_1}\right)^{-1} & \left(\sqrt{\lambda_2}\right)^{-1}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\sqrt{\lambda_1\lambda_2^{-1}}=\sqrt{\lambda_2\lambda_1^{-1}}\Leftrightarrow\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Leftrightarrow\lambda_1^2=\lambda_2^2\underset{\lambda_1,\lambda_2>0}{\Leftrightarrow}\lambda_1=\lambda_2$.
Ομοίως προκύπτει ότι και $\lambda_2=\lambda_3$ και επειδή το άθροισμα των ριζών είναι 1, έχουμε $\lambda_1=\lambda_2=$ $=\lambda_3=\frac{1}{3}$ και το γινόμενό τους $\alpha=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$. ■

150. Αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$P(x)=\frac{x^n}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{x^{n-1}}{\alpha_2\alpha_3}+\cdots+\frac{x^2}{\alpha_{n-1}\alpha_n}-\frac{n-1}{\alpha_1\alpha_n}$$

διαιρείται με το $x-1$.

Απόδειξη: $P(1)=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n-1}\alpha_n}-\frac{n-1}{\alpha_1\alpha_n}$. Έστω ω η διαφορά της προόδου, δηλαδή $\alpha_{k+1}=\alpha_k+\omega$, για κάθε $k=1,2,\ldots,n-1$.
Γράφουμε $\frac{1}{\alpha_k\alpha_{k+1}}=\frac{1}{\alpha_k(\alpha_k+\omega)}=\frac{A}{\alpha_k}+\frac{B}{\alpha_k+\omega}$, A,B προσδιοριστέοι συντελεστές. Έχουμε $1=A(\alpha_k+\omega)+B\alpha_k=A\omega+(A+B)\alpha_k$. Επειδή το 1 δεν εξαρτάται από τα α_k, έχουμε $A=-B$. Ακόμη, $1=A\omega\Leftrightarrow A=\frac{1}{\omega}$ και $B=-\frac{1}{\omega}$. Επομένως $\frac{1}{\alpha_k\alpha_{k+1}}=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\alpha_k}-\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)$ και κατά συνέπεια
$P(1)=\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\alpha_1}-\cancel{\frac{1}{\alpha_2}}+\cancel{\frac{1}{\alpha_2}}-\cancel{\frac{1}{\alpha_3}}+\cancel{\frac{1}{\alpha_3}}-\cancel{\frac{1}{\alpha_4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{\alpha_{n-1}}}-\frac{1}{\alpha_n}\right)-\frac{n-1}{\alpha_1\alpha_n}=\frac{1}{\omega}\frac{\alpha_n-\alpha_1}{\alpha_1\alpha_n}-\frac{n-1}{\alpha_1\alpha_n}=$
$=\frac{1}{\omega}\frac{\alpha_1+(n-1)\omega-\alpha_1}{\alpha_1\alpha_n}-\frac{n-1}{\alpha_1\alpha_n}=0$. Άρα $x-1\mid P(x)$. ■

151. Να βρεθεί μονικό πολυώνυμο, του οποίου οι ρίζες είναι οι αντίστροφες των ριζών του πολυωνύμου $f(x)=\alpha_nx^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1x+\alpha_0$, όπου $\alpha_n,\alpha_0\neq0$.

Λύση: Έστω $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$ οι μη διακεκριμένες ρίζες του $f(x)$. Ένα τέτοιο πολυώνυμο θα είναι αναγκαστικά το $g(x)=\left(x-\frac{1}{\rho_1}\right)\left(x-\frac{1}{\rho_2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{\rho_n}\right)=x^n-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_k}\right)x^{n-1}+$
$+\left(\sum_{1\le k_1<k_2\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}}\right)x^{n-2}-\left(\sum_{1\le k_1<k_2<k_3\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_{k_3}}\right)x^{n-3}+\cdots+$

$$+ (-1)^{n-1}\left(\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_{n-1}\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_{n-1}}}\right)x+(-1)^n\frac{1}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}.$$

Παρατηρούμε ότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\rho_k}=\frac{\rho_2\cdots\rho_n+\rho_1\rho_3\cdots\rho_n+\cdots+\rho_1\rho_2\rho_3\cdots\rho_{n-1}}{\rho_1\rho_2\rho_3\cdots\rho_n}=\frac{e_{n-1}}{e_n}$ και γενικά, αν $1\le t<n$, τότε τα κλάσματα που απαρτίζουν το άθροισμα $\displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_t\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_t}}$ για να γίνουν ομώνυμα με παρονομαστή $\rho_1\rho_2\cdots\rho_n$, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τα υπόλοιπα $n-t$ το πλήθος ρ_k που λείπουν από τους παρονομαστές. Επειδή για τους παρονομαστές έχουμε πάρει όλα τα δυνατά γινόμενα t το πλήθος από τα ρ_k, στον αριθμητή θα εμφανιστεί το άθροισμα όλων των γινομένων των ρ_k ανά $n-t$. Επομένως θα έχουμε

$$\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_t\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_t}}=\frac{\displaystyle\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_{n-t}\le n}\rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_{n-t}}}{\rho_1\rho_2\cdots\rho_n}=\frac{e_{n-t}}{e_n}.$$

Αλλά $\displaystyle\frac{e_{n-t}}{e_n}=\frac{(-1)^{n-t}\cdot\frac{\alpha_t}{\alpha_n}}{(-1)^n\cdot\frac{\alpha_0}{\alpha_n}}=(-1)^{-t}\cdot\frac{\alpha_{n-t}}{\alpha_0}$. Επομένως $\displaystyle(-1)^t\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_t\le n}\frac{1}{\rho_{k_1}\rho_{k_2}\cdots\rho_{k_t}}=$ $\displaystyle=\frac{\alpha_{n-t}}{\alpha_0}$. Άρα $\displaystyle g(x)=x^n+\frac{\alpha_1}{\alpha_0}x^{n-1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_0}x^{n-2}+\cdots+\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}+\frac{\alpha_n}{\alpha_0}$. ■

152. Να βρείτε το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων των ριζών του πολυωνύμου $f(x)=$ $=2x^3-6x^2+x-10$.

<u>Λύση</u>: Έστω $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-\dfrac{-6}{2}=3$. Επομένως $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=$ $=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2-2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)=3^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=8$.

Από την ταυτότητα των τριών κύβων του Euler έχουμε $\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=3\lambda_1\lambda_2\lambda_3+(\lambda_1+\lambda_2+$ $+\lambda_3)\big(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\big)=-3\cdot\dfrac{-10}{2}+3\Big(8-\dfrac{1}{2}\Big)=15+\dfrac{45}{2}=\dfrac{75}{2}$. ■

Για όσους ακόμα πιστεύουν ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι «εξωπραγματικοί» ας δουν την επόμενη άσκηση.

153. Αν $n\ge 2$ θετικός ακέραιος, υπολογίστε το γινόμενο $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$.

<u>Λύση</u>: Θεωρούμε το πολυώνυμο $\displaystyle x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x-z^k)$, όπου $z=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ με ρίζες τις n-στές ρίζες της μονάδας. Απ' την άλλη μεριά, $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$. Τελικώς διαγράφουμε τον κοινό όρο $x-1$ και παίρνουμε $\displaystyle x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=\prod_{k=1}^{n-1}(x-z^k)$.

Θέτουμε $x=1$ στην έκφραση αυτή. Έχουμε $\displaystyle\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{ το πλήθος}}=\prod_{k=1}^{n-1}(1-z^k)$, δηλαδή $n=$ $\displaystyle=\prod_{k=1}^{n-1}(1-z^k)$. Τώρα, $1-z^k=1-\cos\dfrac{2k\pi}{n}-\mathbf{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}=1-\Big(1-2\sin^2\dfrac{k\pi}{n}\Big)-2\sin\dfrac{k\pi}{n}\cos\dfrac{k\pi}{n}=$ $=2\sin\dfrac{k\pi}{n}\Big(\sin\dfrac{k\pi}{n}-\mathbf{i}\cos\dfrac{k\pi}{n}\Big)$. Ακόμη, $0<\dfrac{k\pi}{n}<\pi$, για κάθε $k=1,2,\dots,n-1$. Άρα $\sin\dfrac{k\pi}{n}>$

> 0, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Επίσης, $\left|\sin\frac{k\pi}{n} - \mathbf{i}\cos\frac{k\pi}{n}\right| = 1$, για κάθε $k = 1, \ldots, n-1$. Παίρνοντας λοιπόν τα μέτρα στη σχέση $n = \prod_{k=1}^{n-1}(1-z^k)$ προκύπτει ότι $n = \prod_{k=1}^{n-1}|1-z^k| =$ $= \prod_{k=1}^{n-1}\left(2\sin\frac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

Άρα $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$. ■

154. Θεωρούμε κανονικό πολύγωνο $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\cdots\mathrm{A}_n$, όπου $n \geq 3$, εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο. Δείξτε ότι $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{A}_3 \cdot \mathrm{A}_1\mathrm{A}_4 \cdots \mathrm{A}_1\mathrm{A}_n = n$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι κορυφές $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n$ αντιστοιχούν στις n-στές ρίζες της μονάδας με $\mathrm{A}_1 = 1$, $\mathrm{A}_2 = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, $\mathrm{A}_3 = \cos\frac{4\pi}{n} +$ $+\mathbf{i}\sin\frac{4\pi}{n}$ και γενικά $\mathrm{A}_k = \cos\frac{2(k-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2(k-1)\pi}{n}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$. Επομένως το $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_k$ είναι το μέτρο του μιγαδικού $\cos\frac{2(k-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2(k-1)\pi}{n} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{(k-1)\pi}{n} +$ $+2\sin\frac{(k-1)\pi}{n}\cos\frac{(k-1)\pi}{n} - 1 = 2\sin\frac{(k-1)\pi}{n}\left(-\sin\frac{(k-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right)$, για κάθε $k = 2, 3, \ldots, n$. Επειδή προφανώς $\left|-\sin\frac{(k-1)\pi}{n} + \mathbf{i}\cos\frac{(k-1)\pi}{n}\right| = 1$ και $0 < \frac{(k-1)\pi}{n} <$ π, οπότε και $\sin\frac{(k-1)\pi}{n} > 0$, για κάθε $k = 2, 3, \ldots, n$, το ζητούμενο γινόμενο ισούται με $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = 2^{n-1}\cdot\frac{n}{2^{n-1}} = n$, βάσει της προηγούμενης ασκήσεως. ■

155. Αν $n \geq 2$ θετικός ακέραιος, να υπολογίσετε το γινόμενο $\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$.

Λύση: Θεωρούμε το πολυώνυμο $x^n - (-1)^n = (x+1)\big(x^{n-1} + x^{n-2}(-1) + x^{n-3}(-1)^2 + \cdots +$ $+x^2(-1)^{n-3} + x(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\big)$. Οι ρίζες βρίσκονται ως εξής: $x^n - (-1)^n = 0 \Leftrightarrow (-x)^n - 1 =$ $= 0$ και επομένως οι ρίζες είναι οι -1 και $-z^k$, όπου $z = \cos\frac{\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{\pi}{n}$ και $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Επομένως $x^n - (-1)^n = (x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x+z^k)$. Διαγράφοντας από την ισότητα $(x+1)\big(x^{n-1} +$ $+x^{n-2}(-1) + x^{n-3}(-1)^2 + \cdots + x^2(-1)^{n-3} + x(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1}\big) = (x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x+z^k)$ το $x+1$ παίρνουμε

$$x^{n-1} + x^{n-2}(-1) + x^{n-3}(-1)^2 + \cdots + x^2(-1)^{n-3} + x(-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x+z^k).$$

Τέλος, θέτουμε $x = 1$ και παίρνουμε

$$1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-3} + (-1)^{n-2} + (-1)^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(1+z^k).$$

Παρατηρούμε ότι $1 + z^k = 1 + \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = 1 + 2\cos^2\frac{k\pi}{n} - 1 + 2\mathbf{i}\cos\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n} =$ $= 2\cos\frac{k\pi}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\right)$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $n = 2m$ άρτιος. Τότε $\cos\frac{m\pi}{2m} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ και άρα $\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = 0$. Αυτό προκύπτει και από $1^{\text{ο}}$ μέλος, αφού αυτό χωρίζεται σε ζευγάρια αντιθέτων $1 + (-1)$.

β) Έστω $n = 2m + 1$ περιττός, όπου $m \geq 1$. Τότε $n - 1 = 2m$. Παρατηρούμε ότι $\pi - \frac{k\pi}{n} = \frac{(n-k)\pi}{n}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m$. Επειδή $\cos\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = -\cos\frac{k\pi}{n}$ και $\sin\left(\pi - \frac{k\pi}{n}\right) = \sin\frac{k\pi}{n}$, έχουμε:

$$\prod_{k-1}^{n-1}(1+z^k) = \prod_{k=1}^{n-1} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big)\cdot$$

$$\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big)\cdot \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-2)\cos\Big(\pi - \frac{k\pi}{n}\Big)$$

$$\Big(-\cos\Big(\pi - \frac{k\pi}{n}\Big) + \mathbf{i}\sin\Big(\pi - \frac{k\pi}{n}\Big)\Big) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big)\cdot \prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-2)\cos\Big(\frac{(n-k)\pi}{n}\Big)$$

$\left(-\cos\Big(\frac{(n-k)\pi}{n}\Big) + \mathbf{i}\sin\Big(\frac{(n-k)\pi}{n}\Big)\right)$. Παρατηρούμε ότι στο δεύτερο γινόμενο, καθώς το k διατρέχει τους αριθμούς $\frac{n+1}{2}, \frac{n+3}{2}, \ldots, \frac{n-1}{2}$, το $n-k$ διατρέχει τους αριθμούς $\frac{n-1}{2}, \frac{n-3}{2}, \ldots, \frac{n+3}{2}, \frac{n+1}{2}$, δηλαδή τους ίδιους, αλλά ανάποδα. Επομένως,

$$\prod_{k-1}^{n-1}(1+z^k) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\cos\frac{k\pi}{n}\Big(\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big)\cdot\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\Big(-\cos\frac{k\pi}{n}\Big)\Big(-\cos\frac{k\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{2\cdot\frac{n-1}{2}}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\frac{k\pi}{n}\Big(\mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n} - \cos\frac{k\pi}{n}\Big)\Big(\mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n} + \cos\frac{k\pi}{n}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos^2\frac{k\pi}{n}\Big(\mathbf{i}^2\sin^2\frac{k\pi}{n} - \cos^2\frac{k\pi}{n}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{k\pi}{n}\Big(-\cos\frac{k\pi}{n}\Big)\Big(\sin^2\frac{k\pi}{n} + \cos^2\frac{k\pi}{n}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\Big(-\cos\frac{k\pi}{n}\Big) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\Big(\pi - \frac{k\pi}{n}\Big) =$$

$$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{k\pi}{n}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{(n-k)\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{k\pi}{n}\underbrace{\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}}_{\text{όπως προηγουμένως}} =$$

$= (-1)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$. Επειδή ο n είναι περιττός έχουμε

$$\underbrace{1 + (-1) + (-1)^2 + \cdots + (-1)^{n-3} + (-1)^{n-2}}_{n-1 \text{ το πλήθος, άρα}=0} + (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1} = 1.$$

Άρα $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k\pi}{n} = \cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}$.

Επομένως $$\cos\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{n} = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}, & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases}$$ ■

Και ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα.

156. Δείξτε ότι $\displaystyle\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}$, όπου ζ η συνάρτηση του Riemann. (Θα μάθετε γι' αυτήν στο μάθημα Μιγαδική Ανάλυση).

Απόδειξη: Προτάσσουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: Αν m είναι θετικός ακέραιος, τότε ισχύει η σχέση:

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right)+\cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)+\cot^2\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right)+\cdots+\cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

Απόδειξη ισχυρισμού: $(\cos\alpha+\mathbf{i}\sin\alpha)^{2m+1} = \cos(2m+1)\alpha+\mathbf{i}\sin(2m+1)\alpha$.

Κατά Newton όμως έχουμε:

$$\big(\cos\alpha+\mathbf{i}\sin\alpha\big)^{2m+1} = \sum_{n=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{2m+1-n}\cos^{2m+1-n}\alpha\cdot\mathbf{i}^n\sin^n\alpha$$

Το άθροισμα $\displaystyle\sum_{n=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{2m+1-n}\cos^{2m+1-n}\alpha\cdot\mathbf{i}^n\sin^n\alpha$ περιέχει $2m+1+1 = 2(m+1)$ όρους.

Επομένως τα μισά n είναι άρτια και τα άλλα μισά περιττά.

Τα άρτια είναι της μορφής $n = 2\rho$, όπου $\rho = 0,1,\ldots,m$ και τα περιτά είναι της μορφής $n = 2\rho+1$, όπου $\rho = 0,1,2,\ldots,m$. Συνεπώς το παραπάνω άθροισμα διασπάται ως εξής:

$$\sum_{\rho=0}^{m}\mathbf{i}^{2\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)+1}\cos^{2(m-\rho)+1}\alpha\cdot\sin^{2\rho}\alpha+\sum_{\rho=0}^{m}\mathbf{i}^{2\rho+1}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cos^{2(m-\rho)}\alpha\cdot\sin^{2\rho+1}\alpha =$$

$$=\sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)+1}\cos^{2(m-\rho)+1}\alpha\cdot\sin^{2\rho}\alpha+\mathbf{i}\sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cos^{2(m-\rho)}\alpha\cdot\sin^{2\rho+1}\alpha.$$

Επομένως, αν $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, τότε $\displaystyle\sin(2m+1)\alpha = \sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cos^{2(m-\rho)}\alpha\cdot\sin^{2\rho+1}\alpha =$

$$= \sin^{2m+1}\alpha\cdot\sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cot^{2(m-\rho)}\alpha.$$

Αν στην τελευταία σχέση θέσουμε $\alpha = \dfrac{n\pi}{2m+1}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, όπου $n = 1,2,\ldots,m$, θα πάρουμε

$$0 = \sin(n\pi) = \sin\left((2m+1)\frac{n\pi}{2m+1}\right) =$$

$$= \sin^{2m+1}\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right)\cdot\sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cot^{2(m-\rho)}\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right).$$

Επειδή δε $\sin^{2m+1}\left(\dfrac{n\pi}{2m+1}\right) > 0$, έπεται ότι

$$\sum_{\rho=0}^{m}(-1)^{\rho}\binom{2m+1}{2(m-\rho)}\cot^{2(m-\rho)}\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right) = 0,$$

δηλαδή οι αριθμοί $\cot^2\left(\dfrac{n\pi}{2m+1}\right)$, $n = 1, 2, \ldots, m$ είναι ρίζες του πολυωνύμου

$$f(x) = \sum_{\rho=0}^{m}(-1)^\rho\binom{2m+1}{2m-2\rho}x^{m-\rho} =$$
$$= \binom{2m+1}{2m}x^m - \binom{2m+1}{2m-2}x^{m-1} + \binom{2m+1}{2m-4}x^{m-2} - \cdots + (-1)^m\binom{2m+1}{0}.$$

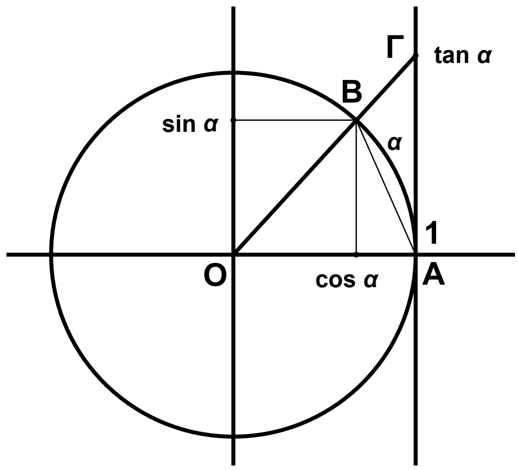
Σύμφωνα με τις σχέσεις Vieta το άθροισμα των ριζών αυτών ισούται με

$$\frac{\binom{2m+1}{2m-2}}{\binom{2m+1}{2m}} = \frac{(2m+1)!(2m)!}{6(2m+1)!(2m-2)!} = \frac{m(2m-1)}{3}, \text{ δηλαδή}$$

$$\cot^2\left(\frac{\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right) + \cot^2\left(\frac{3\pi}{2m+1}\right) + \cdots + \cot^2\left(\frac{m\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

■

Απόδειξη της σχέσης: Τώρα αν $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, τότε $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha < \alpha^2 < \tan^2\alpha \Leftrightarrow \cot^2\alpha < \dfrac{1}{\alpha^2} < \dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot^2\alpha$. Το διπλανό σχήμα είναι βοηθητικό για την ανισότητα αυτή: (Συγκρίνατε τα εμβαδά του τριγώνου ΟΑΒ, του κυκλικού τομέως $O\overset{\frown}{AB}$ και του τριγώνου ΟΑΓ ή χρησιμοποιείστε παραγώγους).



Σχήμα 39

Οπότε για $\alpha = \dfrac{n\pi}{2m+1}$, $n = 1, 2, \ldots, m$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{m}\cot^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right) < \sum_{n=1}^{m}\frac{(2m+1)^2}{n^2\pi^2} < m + \sum_{n=1}^{m}\cot^2\left(\frac{n\pi}{2m+1}\right) \Leftrightarrow$$
$$\frac{m(2m-1)}{3} < \sum_{n=1}^{m}\frac{(2m+1)^2}{n^2\pi^2} < \frac{2m(m+1)}{3},$$

δηλαδή

$$\frac{m(2m-1)\pi^2}{3(2m+1)^2} < \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} < \frac{2m(m+1)\pi^2}{3(2m+1)^2}.$$

Αλλά $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\frac{m(2m-1)}{3(2m+1)^2} = \frac{1}{6} = \lim_{m\to+\infty}\frac{2m(m+1)}{3(2m+1)^2}$.

Κατά συνέπεια $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ■

Αυτή είναι η πιο απλή απόδειξη που έχω δει. Το εκπληκτικό είναι πως η αντίστροφη $\dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$

της ποσότητας αυτής ισούται με την πιθανότητα, επιλέγοντας στην τύχη δύο ακεραίους, αυτοί να είναι πρώτοι μεταξύ τους! Η ποσότητα $\dfrac{1}{\zeta(2)} = \dfrac{6}{\pi^2}$ ισούται με τη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^2}$, όπου

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 1, \\ (-1)^k, & \text{αν } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ όπου } p_1, p_2, \dots, p_k \text{ διακεκριμένοι πρώτοι και} \\ 0, & \text{αν } p^2 | n, \text{ για κάποιον πρώτο } p. \end{cases}$$

Η συνάρτηση μ λέγεται **συνάρτηση του Möbius**.

157. Αν z_1, z_2 είναι οι καθαρές μιγαδικές κυβικές ρίζες της μονάδας, δείξτε ότι:
(i) $z_1^2 = z_2 = \overline{z}_1 = z_1^{-1}$ και $z_2^2 = z_1 = \overline{z}_2 = z_2^{-1}$.
(ii) $(1 + 2z_1 + 3z_2)(1 + 2z_2 + 3z_1) = 3$.
(iii) $(1 + z_1 - z_2)^3 = (1 + z_2 - z_1)^3$.

158. Αν $z = \cos\vartheta + \mathbf{i}\sin\vartheta \neq -1$, $\big($ισοδύναμα $\vartheta \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\big)$, δείξτε ότι η εξίσωση $z = \dfrac{1 + x\mathbf{i}}{1 - x\mathbf{i}}$ έχει πραγματική ρίζα x.

159. Δείξτε ότι αν $\omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ καθαρή μιγαδική κυβική ρίζα της μονάδας και αν $x, y, z \in \mathbb{R}$, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5) = 9$.
(ii) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + y\omega + z\omega^2)(x + y\omega^2 + z\omega)$.
(iii) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + y\omega + z\omega^2)(x + y\omega^2 + z\omega)$.
(iv) $x^3 + y^3 = (x + y)(x\omega + y\omega^2)(x\omega^2 + y\omega)$.
(v) $(x + y + z)^3 + (x + y\omega + z\omega^2)^3 + (x + y\omega^2 + z\omega)^3 = 3(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz)$.
(vi) Αν n θετικός ακέραιος, τότε οι μοναδικές τιμές της παράστασης $K = \omega^{2n} + \omega^n$ είναι -1 και 2.

160. Στη 2η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ δείξαμε τον τύπο $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)$. Επαγωγικά γενικεύστε:
Αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, τότε $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Re}\,(\bar{z}_i z_j) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \bar{z}_i z_j\right).$$

161. Έστω $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ τυχόντες μιγαδικοί και $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.
Θέτουμε $A_k = z_1 + \omega^k z_2 + \omega^{2k} z_3 + \omega^{3k} z_4 + \cdots + \omega^{k(n-1)} z_n$, για κάθε $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
Δείξτε ότι $|A_0|^2 + |A_1|^2 + |A_2|^2 + \cdots + |A_{n-1}|^2 = n\big(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2\big)$.
Απόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε:

$$|A_k|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\omega^{(i-1)k} z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \overline{\omega}^{(i-1)k} \bar{z}_i \cdot \omega^{(j-1)k} z_j\right) \underset{|\omega|=1}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} |\omega|^{(i-1)k} \bar{z}_i \cdot \omega^{(j-i)k} z_j\right) \underset{|\omega|=1}{=} \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \bar{z}_i z_j \cdot \omega^{(j-i)k}\right).$$

Επομένως $\sum_{k=1}^{n}|A_k|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{1\le i<j\le n}\bar{z}_i z_j\cdot\omega^{(j-i)k}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right) +$
$+2\mathrm{Re}\left(\sum_{1\le i<j\le n}\bar{z}_i z_j\sum_{k=1}^{n}\omega^{(j-i)k}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right) + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1\le i<j\le n}\bar{z}_i z_j\omega^{j-i}\cdot\frac{\omega^{n(j-i)}-1}{\omega^{j-i}-1}\right) \underset{\omega^n=1}{=}$
$= n\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right) + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{1\le i<j\le n}\bar{z}_i z_j\omega^{j-i}\cdot\frac{1-1}{\omega^{j-i}-1}\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right).$ ■

162. Αποδείξτε το **(iii)** και της άσκησης **101** με τη χρήση της τριγωνομετρικής μορφής μιγαδικού, δηλαδή:
Έστω $z_1+z_2+z_3=0$ και $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\rho>0$. Τότε $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$.
Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\rho=|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$. Πράγματι, αν $u_k=\frac{z_k}{\rho}$, $k=$ $=1,2,3$, τότε $|u_1|=|u_2|=|u_3|=1$ και $u_1+u_2+u_3=0$. Αν δείξουμε ότι $|u_1-u_2|=|u_2-u_3|=$ $=|u_3-u_1|$, τότε, πολλαπλασιάζοντας επί ρ προκύπτει η αποδεικτέα.
Εφόσον υποθέσαμε ότι $|z_k|=1,\ k=1,2,3$, τότε μπορούμε να γράψουμε $z_1=\cos\alpha+\mathbf{i}\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+\mathbf{i}\sin\beta$ και $z_3=\cos\gamma+\mathbf{i}\sin\gamma$. Η σχέση $z_1+z_2+z_3=0$ είναι ισοδύναμη με τις σχέσεις

$$\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0\\ \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-\cos\gamma\\ \sin\alpha+\sin\beta=-\sin\gamma\end{cases}$$

Με ύψωση στο τετράγωνο παίρνουμε $\begin{cases}\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\cos^2\gamma\\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\sin^2\gamma\end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta+2\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=\cos^2\gamma+\sin^2\gamma \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2+2\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\right)=1 \Leftrightarrow \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}}$.
Επίσης, $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2^2|-2\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)=2-2\mathrm{Re}\left((\cos\alpha+\mathbf{i}\sin\alpha)(\cos\beta-\mathbf{i}\sin\beta)\right)=$
$=2-2\mathrm{Re}\left(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta+\mathbf{i}(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\right)=$
$=2-2\mathrm{Re}\left(\cos(\alpha-\beta)+\mathbf{i}\sin(\alpha-\beta)\right)=2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\left(-\frac{1}{2}\right)=3.$ Επομένως $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Ομοίως προκύπτει ότι $|z_2-z_3|=|z_3-z_1|=\sqrt{3}$. ■

163. Δείξτε ότι αν $n\ge 2$ είναι θετικός ακέραιος, τότε ισχύουν οι σχέσεις:
(i) $x^{2n}-1=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$.
(ii) $\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{2\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{2n}=\cos\frac{\pi}{2n}\cos\frac{2\pi}{2n}\cos\frac{3\pi}{2n}\cdots\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
(iii) $\tan\frac{\pi}{2n}\tan\frac{2\pi}{2n}\tan\frac{3\pi}{2n}\cdots\tan\frac{(n-1)\pi}{2n}=\cot\frac{\pi}{2n}\cot\frac{2\pi}{2n}\cot\frac{3\pi}{2n}\cdots\cot\frac{(n-1)\pi}{2n}=1$.
Απόδειξη: **(i)** Θεωρούμε το πολυώνυμο $x^{2n}-1$. Οι ρίζες του είναι οι $2n$-στές ρίζες της μονάδας, δηλαδή οι μικαδικοί $\cos\frac{2k\pi}{2n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{2n}=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}$, όπου $k=0,1,2,\ldots,2n-1$.
Εκτός από το $1=\cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{2n}+\mathbf{i}\sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{2n}$ και το $-1=\cos\frac{2n\pi}{2n}+\mathbf{i}\sin\frac{2n\pi}{2n}$, $\big(k=0$ ή $k=n\big)$, όλες οι άλλες ρίζες χωρίζονται σε $n-1$ ζεύγη συζυγών της μορφής
$\cos\frac{2k\pi}{2n}+\mathbf{i}\sin\frac{2k\pi}{2n}=\cos\frac{k\pi}{n}+\mathbf{i}\sin\frac{k\pi}{n}$ και

$\cos\dfrac{2k\pi}{2n} - \mathbf{i}\sin\dfrac{2k\pi}{2n} = \cos\left(2\pi - \dfrac{2k\pi}{2n}\right) + \mathbf{i}\sin\left(2\pi - \dfrac{2k\pi}{2n}\right) = \cos\dfrac{2(2n-k)\pi}{2n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{2(2n-k)\pi}{2n} =$
$= \cos\dfrac{(2n-k)\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\dfrac{(2n-k)\pi}{n}$, όπου $k \neq 0, n$. Το άθροισμα αυτών των συζυγών είναι $2\cos\dfrac{n\pi}{n}$ και το γινόμενό τους 1. Επομένως είναι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1$, όπου $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $x^{2n} - 1 = (x-1)(x+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1\right) =$
$= (x^2-1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{k\pi}{n} + 1\right)$.

(ii) Παρατηρούμε ότι $x^{2n} - 1 = (x^2)^n - 1 = (x^2-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^{2k}$. Από το **(i)** προκύπτει ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \qquad \textbf{(1)}.$$

Θέτουμε $x = 1$ και παίρνουμε $n = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(2 - 2\cos\dfrac{k\pi}{n}\right) = 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - \cos\dfrac{k\pi}{n}\right) =$
$= 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(1 - \left(1 - 2\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}\right)\right) = 2^{2n-2}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}$. Αλλά $1 \le k \le n-1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{\pi}{2n} \le \dfrac{k\pi}{2n} \le$
$\le \dfrac{(n-1)\pi}{2n} < \dfrac{n\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}$. Επομένως $\sin\dfrac{k\pi}{2n} > 0$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$ και κατά συνέπεια $\sqrt{n} = 2^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{kn}{2n} \Leftrightarrow \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n} = \sin\dfrac{\pi}{2n}\sin\dfrac{2\pi}{2n}\sin\dfrac{3\pi}{2n}\cdots\sin\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Ακόμη $\dfrac{k\pi}{2n} + \dfrac{(n-k)\pi}{2n} = \dfrac{\pi}{2}$ και άρα $\cos\dfrac{k\pi}{2n} = \sin\dfrac{(n-k)\pi}{2n}$, για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Επομένως
$\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cos\dfrac{k\pi}{2n} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{(n-k)\pi}{2n} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.

Σημείωση: Η σχέση $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\cos\dfrac{k\pi}{2n} = \cos\dfrac{\pi}{2n}\cos\dfrac{2\pi}{2n}\cos\dfrac{3\pi}{2n}\cdots\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ προκύπτει από τη σχέση (1) αν θέσουμε $x = -1$ και κινηθούμε ανάλογα.

(iii) Οι σχέσεις $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\tan\dfrac{k\pi}{2n} = \prod\limits_{k=1}^{n-1}\cot\dfrac{k\pi}{2n} = 1$ προκύπτουν άμεσα από τις σχέσεις $\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\dfrac{k\pi}{2n} =$
$= \prod\limits_{k=1}^{n-1}\cos\dfrac{k\pi}{2n} = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$ αν διαιρέσουμε το πρώτο μέλος με το δεύτερο ή το δεύτερο με το πρώτο αντίστοιχα. ■

Κεφάλαιο 3

Σύνολα και Συναφείς Έννοιες

3.1 Γενικότητες-Πράξεις Μεταξύ Συνόλων

Στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε σχεδόν παντού την έννοια του **συνόλου**. Είτε μιλάμε για σύνολα αριθμών, είτε για σύνολα συναρτήσεων είτε για διανυσματικούς χώρους ή άλλες αλγεβρικές δομές, πάντοτε θα καταφεύγουμε στην έννοια του συνόλου.
Δύο είναι οι λόγοι:
1. Τα μαθηματικά αποτελέσματα, για να έχουν αξία, θα πρέπει να αναφέρονται σε ευρείες κλάσεις αντικειμένων. Συνήθως άπειρες.
2. Τα αντικείμενα αυτά θα πρέπει να είναι σαφώς καθορισμένα, αλλιώς λέμε «αερολογίες».
Το σύνολο λοιπόν των αντικειμένων-εννοιών είναι το πλαίσιο στο οποίο κινείται αυστηρά κάθε μαθηματική θεωρία. Για να είμαστε ακριβείς σ' αυτά που ορίζουμε και λέμε, το πλαίσιο-σύνολο των εννοιών θα πρέπει να είναι σαφώς καθορισμένο.
Για παράδειγμα, όταν μιλάμε για συνεχείς συναρτήσεις από ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και τιμές πραγματικές είναι αυτονόητο ότι κινούμαστε στο σύνολο $C[\alpha,\beta]=\{f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\mid f \text{ συνεχής}\}$.
Όταν μιλάμε για ακέραιους αριθμούς, τότε το πλαίσιο στο οποίο κινούμαστε είναι το σύνολο $\mathbb{Z}$.
Όταν λέμε «αρλούμπες», τότε απλά δεν γνωρίζουμε για ποιες έννοιες μιλάμε και φυσικά δεν έχουμε ορίσει κανένα πλαίσιο-σύνολο, τα στοιχεία του οποίου μελετάμε. Απλώς ανακατεύουμε άσχετα πράγματα χωρίς κάποιου είδους λογική συνάφεια. (Παρακολουθείστε «αψιμαχίες» πολιτικών, οι οποίοι αποφεύγουν να τοποθετηθούν σε ένα συγκεκριμένο θέμα και λένε άσχετα πράγματα είτε γιατί δεν θέλουν να δώσουν κάποια σαφή απάντηση είτε γιατί δεν γνωρίζουν το θέμα είτε γιατί δεν κατάλαβαν την ερώτηση. Είτε και για τους τρεις λόγους μαζί!).
Άρα παντού σύνολα; Θα λέγαμε ναι. (Οι ειδικοί της Θεωρίας Κατηγοριών θα διαφωνήσουν).
Επειδή χρειαζόμαστε μια Θεωρία για τα σύνολα, θα έπρεπε να θεωρήσουμε το σύνολο όλων των συνόλων. Μια τέτοια έννοια όμως οδηγεί σε αντιφάσεις. Άρα **αυτή καθεαυτή η έννοια του συνόλου είναι μια πρωταρχική έννοια**. Ως πρωταρχική έννοια δεν είναι δυνατόν να οριστεί με τη βοήθεια άλλων πιο πρωταρχικών εννοιών. Είναι όπως, για παράδειγμα οι έννοιες του σημείου, της ευθείας ή του επιπέδου στη Γεωμετρία. Δεν υπάρχει ορισμός γι' αυτές τις πρωταρχικές έννοιες. Αλλά στη Γεωμετρία το ρόλο των ορισμών παίζουν τα αξιώματα, τα οποία ουσιαστικά περιγράφουν τις πρωταρχικές αυτές έννοιες μέσω των μεταξύ τους σχέσεων.
Για τους παραπάνω λόγους δεν υπάρχει ορισμός για την έννοια του συνόλου.
Εμείς θα αρκεστούμε στη διαισθητική αντίληψη ότι «*σύνολο είναι μια συλλογή από κάποια αντικείμενα σαφώς καθορισμένα*».
Στην παραπάνω φράση έχουμε απλώς αντικαταστήσει τη λέξη «σύνολο» με τη λέξη «συλλογή». Άρα στην ουσία δεν έχουμε δώσει κανέναν ορισμό για την έννοια του συνόλου.

Τα σύνολα συνήθως τα παριστάνουμε με κεφαλαία γράμματα του ελληνικού ή λατινικού αλφαβήτου. Αυτό φυσικά δεν είναι πάντοτε ο κανόνας.

Ένα σύνολο μπορεί να παρασταθεί κατά δύο τρόπους:
α) Με **αναγραφή** των στοιχείων του. Έτσι, γράφουμε $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ή $B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}$
ή
β) με **περιγραφή** των στοιχείων του, δηλαδή γράφουμε $\{x \mid \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } p\}$. Έτσι, στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να γράψουμε $A = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι θετικός περιττός ακέραιος μικρότερος του } 10\}$ και $B = \{x \mid \text{το } x \text{ είναι φωνήεν του ελληνικού αλφαβήτου}\}$. Συνήθως η παράσταση ενός συνόλου με περιγραφή είναι προτιμητέα όταν το σύνολο είναι άπειρο. Υπάρχουν και εξαιρέσεις. Για παράδειγμα, γράφουμε $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ και οι τελείες υπονοούν τα στοιχεία που λείπουν.

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε **το x ανήκει στο A**. Για λόγους ευελιξίας, όταν είμαστε αναγκασμένοι να γράψουμε πρώτα το σύνολο και μετά το στοιχείο γράφουμε $A \ni x$ και διαβάζουμε **το A περιέχει το x**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα** αν περιέχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Δηλαδή $A = B$ αν και μόνον αν, για κάθε x ισχύει η ισοδυναμία: $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε το A λέγεται **υποσύνολο** του B ή ισοδύναμα ότι το B είναι **υπερσύνολο** του A, αν και μόνον αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B. Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε $A \subseteq B$ ή ισοδύναμα $B \supseteq B$. Δηλαδή $A \subseteq B$ αν και μόνον αν, για κάθε x ισχύει η συνεπαγωγή: $x \in A \Rightarrow x \in B$.
Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$, τότε το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B ή ισοδύναμα το B **γνήσιο υπερσύνολο** του A. Αυτό το συμβολίζουμε με $A \subsetneq B$ ή ισοδύναμα $B \supsetneq A$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3. Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ και } B \subseteq A)$. Προφανώς $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4. Δεχόμαστε την ύπαρξη ενός συνόλου, το οποίο παριστάνουμε με $\varnothing$ και το οποίο δεν περιέχει στοιχεία. Το σύνολο αυτό λέγεται το **κενό** σύνολο.
Για παράδειγμα, $\{x \in \mathbb{Q} \mid \ x^2 = 2\} = \varnothing$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. (i) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.
(ii) $\varnothing \subseteq A$, για κάθε σύνολο A και
(iii) Αν $A \subseteq \varnothing$, τότε $A = \varnothing$.
Απόδειξη: (i) Έχουμε: $x \in A \underset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \underset{B \subseteq \Gamma}{\Rightarrow} x \in \Gamma$.
(ii) Αν $\varnothing \nsubseteq A$, τότε θα υπήρχε $x \in \varnothing$ με $x \notin A$. Αυτό είναι άτοπο γιατί δεν υπάρχει στοιχείο x, με $x \in \varnothing$.
(iii) Αν $A \neq \varnothing$, τότε θα υπήρχε $x \in A \underset{A \subseteq \varnothing}{\Rightarrow} x \in \varnothing$, άτοπο. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.6. Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε η **ένωσή** τους $A \cup B$ είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του A και όλων των στοιχείων του B. Δηλαδή, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}$. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία: $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ή } x \in B)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.7. (i) $A \cup B = B \cup A$.
(ii) $A \cup A = A$.

(iii) $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$.
(iv) $A \cup \varnothing = A$.
(v) Αν $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \cup B \subseteq \Gamma$.
(vi) Αν $A \subseteq A_1$ και $B \subseteq B_1$, τότε $A \cup B \subseteq A_1 \cup B_1$.
(vii) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$.
(viii) $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$, για κάθε τρία σύνολα A, B και Γ.
Απόδειξη: (i)-(iv) Άμεσες από τον ορισμό της ένωσης δύο συνόλων και εν πάση περιπτώσει αφήνονται ως άσκηση για τον αναγνώστη.
(v) Έστω $x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A$ ή $x \in B)$. Αν $x \in A \subseteq \Gamma$, τότε $x \in \Gamma$. Συμμετρικά αν $x \in B \subseteq \Gamma$, τότε $x \in \Gamma$. Άρα $x \in A \cup B \Rightarrow x \in \Gamma$.
(vi) $A \subseteq A_1 \subseteq A_1 \cup B_1$. Ομοίως $B \subseteq A_1 \cup B_1$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το **(v)** για $\Gamma = A_1 \cup B_1$.
(vii) Αν $A \cup B = A$, τότε $B \subseteq A \cup B = A$. Αντιστρόφως, $B \subseteq A$ και $A \subseteq A$, οπότε $A \cup B \subseteq$ $\subseteq A \cup A = A$. Επειδή και $A \subseteq A \cup B$, έπεται ότι $A \cup B = A$.
(viii) $x \in (A \cup B) \cup \Gamma \Leftrightarrow (x \in A \cup B$ ή $x \in \Gamma) \Leftrightarrow ((x \in A$ ή $x \in B)$ ή $x \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A$ ή $x \in$ $\in B$ ή $x \in \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A$ ή $(x \in B$ ή $x \in \Gamma)) \Leftrightarrow (x \in A$ ή $x \in B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup \Gamma)$. ■

Σημείωση: Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ γράφουμε απλά $A \cup B \cup \Gamma$, αντί $(A \cup B) \cup \Gamma$ ή $A \cup (B \cup \Gamma)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.8. Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε η **τομή** τους $A \cap B$ είναι το σύνολο των **κοινών** στοιχείων του A και του B. Δηλαδή, $\boldsymbol{A \cap B = \{x \mid x \in A}$ **και** $\boldsymbol{x \in B\}}$. Δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία: $x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A$ και $x \in B)$. Δύο σύνολα A και B λέγονται **ξένα μεταξύ τους)** αν $A \cap B = \varnothing$, δηλαδή δεν έχουν κοινά στοιχεία.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. (i) $A \cap B = B \cap A$.
(ii) $A \cap A = A$.
(iii) $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$.
(iv) $A \cap \varnothing = \varnothing$.
(v) Αν $\Gamma \subseteq A$ και $\Gamma \subseteq B$, τότε $\Gamma \subseteq A \cap B$.
(vi) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.
(vii) Αν $A \subseteq A_1$ και $B \subseteq B_1$, τότε $A \cap B \subseteq A_1 \cap B_1$.
(viii) $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$, για κάθε τρία σύνολα A, B και Γ.
(ix) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, για κάθε τρία σύνολα A, B και Γ.
(x) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$, για κάθε τρία σύνολα A, B και Γ.
Απόδειξη: Αποδεικνύουμε μόνον την **(ix)**, αφήνοντας τις υπόλοιπες ως άσκηση.
Έστω $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$. Τότε $x \in A$ και $x \in B \cup \Gamma \Leftrightarrow (x \in B$ ή $x \in \Gamma)$. Αν $x \in B$, τότε, επειδή $x \in A$, $x \in A \cap B \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$. Ομοίως, αν $x \in \Gamma$, τότε $x \in A \cap \Gamma \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$. Σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Άρα $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
Αντιστρόφως, έστω $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \Leftrightarrow (x \in A \cap B$ ή $x \in A \cap \Gamma)$.
Αν $x \in A \cap B$, τότε $x \in A$ και $x \in B \subseteq B \cup \Gamma$. Συνεπώς $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$. Ομοίως, αν $x \in A \cap \Gamma$, τότε $x \in A$ και $x \in \Gamma \subseteq B \cup \Gamma$. Συνεπώς $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$. Σε κάθε περίπτωση λοιπόν $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$.
Άρα $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$. ■

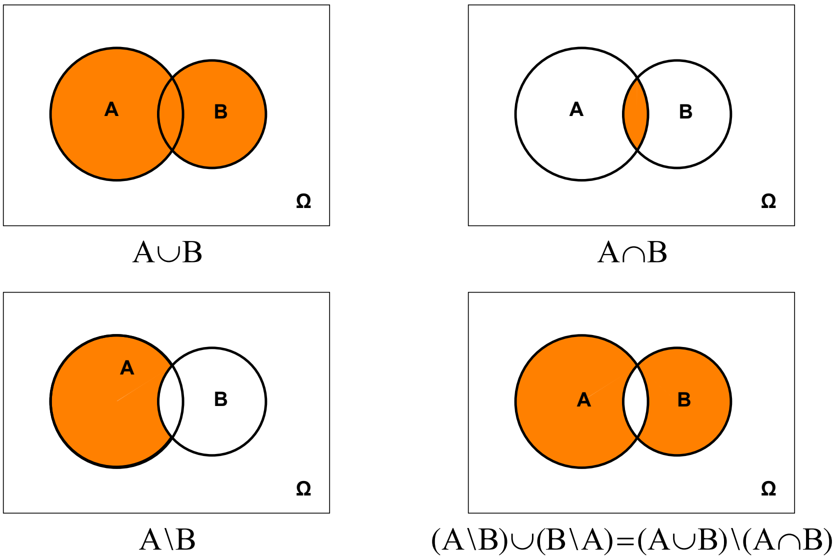
ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10. Έστω A και B δύο σύνολα. Η **συνολοθεωρητική διαφορά** $A \setminus B$ είναι **το σύνολο των στοιχείων του $\boldsymbol{A}$ που δεν ανήκουν στο $\boldsymbol{B}$**. Δηλαδή $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. **(i)** $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
(ii) $A \setminus B \subseteq A$.
(iii) $A \setminus A = \varnothing$.
(iv) $A \setminus B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
(v) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$.
(vi) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
(vii) $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
(viii) $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) \cap (A \cap B) = \varnothing$.
Απόδειξη: **(i)** Έστω $x \in A \setminus B$. Αν $x \in A \cap B \subseteq B$, τότε $x \in B$, άτοπο γιατί $x \in A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$. Άρα $x \notin A \cap B \Rightarrow x \in A \setminus (A \cap B)$. Αντιστρόφως, έστω $x \in A \setminus (A \cap B)$. Επειδή $x \in A$ θα πρέπει $x \notin B$ γιατί αλλιώς $x \in A \cap B$. Άρα $x \in A$ και $x \notin B$, συνεπώς $x \in A \setminus B$.
(ii)-(iii) Άμεσες, από τον ορισμό της διαφοράς $A \setminus B$.
(iv) Έστω $A \setminus B = A$. Αν $A \cap B \neq \varnothing$, τότε υπάρχει $x \in A \cap B \Rightarrow x \notin A \setminus (A \cap B) \underset{\textbf{(i)}}{=} A \setminus B = A$, αντίφαση. Αντιστρόφως, αν $A \cap B = \varnothing$ και $x \in A$, τότε $x \notin B$, γιατί αλλιώς $x \in A \cap B = \varnothing$. Άρα $x \in A \setminus B$, δηλαδή $A \subseteq A \setminus B$. Η σχέση $A \setminus B \subseteq A$ είναι προφανής.
(v) Έστω $A \setminus B = \varnothing$. Αν $x \in A$, τότε θα δείξουμε ότι $x \in B$. Πράγματι, αν $x \notin B$, τότε $x \in A \setminus B = \varnothing$, άτοπο. Άρα $x \in B$, για κάθε $x \in A$, δηλαδή $A \subseteq B$. Για το αντίστροφο, έστω $A \subseteq B$. Τότε $A \setminus B \subseteq B \setminus B = \varnothing$.
(vi) Έστω $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$. Αν $x \in A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$, τότε $x \notin A \cap B \subseteq B$. Ομοίως, αν $x \in B \setminus A$, τότε $x \notin A \cap B \subseteq A$. Σε κάθε περίπτωση $x \notin A \cap B$, ενώ $x \in A \cup B$. Άρα $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Αντιστρόφως, έστω $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq A \cup B$. Αν $x \in A$, τότε $x \notin B$, γιατί σε αντίθετη περίπτωση $x \in A \cap B$, άτοπο. Άρα $x \in A \setminus B$. Ομοίως, αν $x \in B$, τότε $x \in B \setminus A$. Σε κάθε περίπτωση $(x \in A \setminus B$ ή $x \in B \setminus A) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
(vii) Έστω ότι υπάρχει x, με $x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$. Τότε $x \in A \setminus B$ και $x \in B \setminus A$, άρα **α)** $x \in A$ και **β)** $x \notin B$ και επίσης **γ)** $x \in B$ και **δ)** $x \notin A$. Οι σχέσεις **α)** και **δ)** (ή οι σχέσεις **β)** και **γ)**) συνιστούν αντίφαση. Συνεπώς τέτοιο x δεν υπάρχει, ήτοι $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
(viii) Από το **(i)** έχουμε $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Άρα $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = (A \setminus \Gamma) \cap \Gamma$, όπου $\Gamma = A \cap B$.
Τώρα $(A \setminus \Gamma) \cap \Gamma = \{x \mid x \in A \setminus \Gamma$ και $x \in \Gamma\} = \{x \mid x \in A$ και $x \notin \Gamma$ και $x \in \Gamma\} = \varnothing$, γιατί δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις $x \notin \Gamma$ και $x \in \Gamma$. Ομοίως $(B \setminus A) \setminus (A \cap B) = \varnothing$.
Επίσης, $\big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\big) \cap (A \cap B) \underset{\substack{\text{από το } \textbf{(ix)} \\ \text{της προηγούμενης} \\ \text{πρότασης}}}{=} \big((A \setminus B) \cap (A \cap B)\big) \cup \big((B \setminus A) \cap (A \cap B)\big) =$
$= \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.12. **(i)** $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$.
(ii) $A \setminus (B \setminus \Gamma) = (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$.
(iii) $(A \setminus B) \setminus \Gamma = A \setminus (B \cup \Gamma) = (A \setminus B) \cap (A \setminus \Gamma)$.
(iv) $(A \cup B) \cap (\Gamma \cup \Delta) = (A \cap \Gamma) \cup (A \cap \Delta) \cup (B \cap \Gamma) \cup (B \cap \Delta)$.
Απόδειξη: **(i)** $A \subseteq A$ και $(B \setminus A) \subseteq B$. Επομένως $A \cup (B \setminus A) \underset{\textbf{(vi) A'.7}}{\subseteq} A \cup B$. Αντιστρόφως, έστω $x \in A \cup B$. Αν $x \in A \subseteq A \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus A)$. Αν $x \notin A$, τότε $x \in B \setminus A \subseteq A \cup (B \setminus A) \Rightarrow x \in A \cup (B \setminus A)$. Άρα $A \cup B \subseteq A \cup (B \setminus A)$.
(ii) Έστω $x \in A \setminus (B \setminus \Gamma)$. Αν $x \notin B$, τότε $x \in A \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$. Αν $x \in B$ και $x \notin \Gamma$, τότε $x \in B \setminus \Gamma$, άτοπο γιατί $x \notin B \setminus \Gamma$. Άρα $x \in \Gamma$ και επειδή $x \in A$, έπεται ότι $x \in A \cap \Gamma \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$. Συνεπώς $A \setminus (B \setminus \Gamma) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$
Αντιστρόφως, έστω $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$. Προφανώς $x \in A$. Αν $x \notin \Gamma$, τότε $x \notin A \cap \Gamma$ και

επειδή $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap \varGamma)$, έπεται ότι $x \in A \setminus B$. Άρα $x \notin B \supseteq B \setminus \varGamma \Rightarrow x \notin B \setminus \varGamma$. Επειδή προφανώς $x \in A$, έπεται ότι $x \in A \setminus (B \setminus \varGamma)$. Αν τώρα $x \in \varGamma$, τότε $x \notin B \setminus \varGamma$. Επειδή $x \in A$, έπεται πάλι ότι $x \in A \setminus (B \setminus \varGamma)$.
(iii) $\big(x \in (A \setminus B) \setminus \varGamma\big) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ και } x \notin \varGamma\big) \Leftrightarrow \big(x \in A \text{ και } (x \notin B \text{ και } x \notin \varGamma)\big) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \big(x \in A \text{ και } x \notin B \cup \varGamma)\big) \Leftrightarrow x \in A \setminus (B \cup \varGamma)$.
Επίσης $\big(x \in (A \setminus B) \setminus \varGamma\big) \Leftrightarrow \big((x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ και } x \notin \varGamma\big) \Leftrightarrow \big(x \in A \text{ και } x \notin B \text{ και } x \notin \varGamma\big) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \big((x \in A \text{ και } x \notin B) \text{ και } (x \in A \text{ και } x \notin \varGamma)\big) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus \varGamma)$.
(iv) Η απόδειξη είναι θέμα ρουτίνας και προκύπτει με αλλεπάλληλες εφαρμογές των **(ix)** και **(x)** της **Α΄.9**. ■

Σε μια μαθηματική θεωρία συνήθως θεωρούμε ένα **βασικό σύνολο** στο οποίο περιέχονται οι διάφορες έννοιες-στοιχεία και ορισμένα από τα υποσύνολά του (ή και όλα) αποτελούν αντικείμενο μελέτης. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών ή το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ αποτελούν βασικά σύνολα στον Λογισμό μιας Μεταβλητής. Κάθε φορά ορίζουμε το βασικό μας σύνολο και εξετάζουμε τις ιδιότητες των στοιχείων του που ανήκουν σε συγκεκριμένα υποσύνολά του.
Στην απόδειξη των διαφόρων ιδιοτήτων των πράξεων μεταξύ συνόλων (ένωση, τομή, συνολοθεωρητική διαφορά κτλ) σημαντική βοήθεια παρέχουν τα λεγόμενα **διαγράμματα Euler-Venn**. Σ' αυτά το βασικό σύνολο, το οποίο συμβολίζεται συνήθως με Ω, παριστάνεται με ένα ορθογώνιο και τα διάφορα υποσύνολά του με κύκλους, ελλείψεις κτλ, που περιέχονται στο ορθογώνιο αυτό.



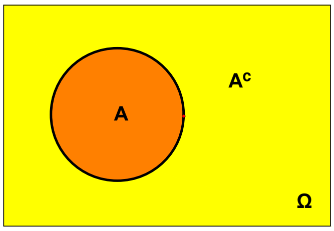
Σχήμα 40

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.13. Το σύνολο $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, το οποίο αποδείξαμε στο **(vi)** της πρότασης **Α΄.11** ότι ισούται με $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ονομάζεται **συμμετρική διαφορά των A και B** και συμβολίζεται με $A \triangle B$. Προφανώς $A \triangle B = B \triangle A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.14. Έστω A ένα σύνολο. Τότε με $\mathcal{P}(A)$ συμβολίζουμε **το σύνολο όλων των υποσυνόλων του** A. Το $\mathcal{P}(A)$ ονομάζεται **δυναμοσύνολο του A**. Επομένως $\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. Προφανώς $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$ και $A \in \mathcal{P}(A)$.

Αν Ω είναι το βασικό μας σύνολο (και όλα τα άλλα σύνολα είναι υποσύνολα αυτού), τότε έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.15. Έστω $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Το **συμπλήρωμα του συνόλου A** είναι το σύνολο των στοιχείων του Ω που **δεν ανήκουν στο A**. Το συμπλήρωμα του A συμβολίζεται με A^c. Δηλαδή, $A^c = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$.



Σχήμα 41

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.16. **(i)** $A^{cc} := (A^c)^c = A$.
(ii) $A \cap A^c = \varnothing$.
(iii) $A \cup A^c = \Omega$.
(iv) $A \cap B^c = A \setminus B$.
Απόδειξη: Άσκηση. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.17. (**ΝΟΜΟΙ του De MORGAN-ΑΠΛΗ ΜΟΡΦΗ**) Έστω A και B δύο υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω. Τότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ και **(ii)** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Απόδειξη: **(i)** $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow (x \in \Omega \text{ και } x \notin A \cup B) \Leftrightarrow (x \in \Omega \text{ και } x \notin A \text{ και } x \notin B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big((x \in \Omega \text{ και } x \notin A) \text{ και } (x \in \Omega \text{ και } x \notin B)\big) \Leftrightarrow (x \in A^c \text{ και } x \in B^c) \Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$.
(ii) $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow (x \in \Omega \text{ και } x \notin A \cap B) \Leftrightarrow \big(x \in \Omega \text{ και } (x \notin A \text{ ή } x \notin B)\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big((x \in \Omega \text{ και } x \notin A) \text{ ή } (x \in \Omega \text{ και } x \notin B)\big) \Leftrightarrow (x \in A^c \text{ ή } x \in B^c) \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$. ■

Συμβολισμός: Το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου A συμβολίζεται με $\#A$ ή $|A|$. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τον δεύτερο συμβολισμό.
Ας εξετάσουμε την περίπτωση που το A είναι πεπερασμένο με $n = |A|$ στοιχεία, όπου $n \geq 0$.
Αν $A = \varnothing$, δηλαδή $n = 0$, τότε το μόνο υποσύνολο του A είναι το $\varnothing$. Επομένως $|\mathcal{P}(A)| = 1 = 2^0$.
Αν $n = |A| = 1$, δηλαδή το A περιέχει ένα μόνο στοιχείο, π.χ. $A = \{\alpha\}$, τότε τα μόνα υποσύνολα του A είναι τα $\varnothing$ και το $A = \{\alpha\}$. Επομένως $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1$.
Αν $n = |A| = 2$, π.χ. $A = \{\alpha, \beta\}$, τότε τα υποσύνολα του A είναι τα $\varnothing$, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ και το $A = \{\alpha, \beta\}$. Επομένως $|\mathcal{P}(A)| = 4 = 2^2$.
Από τα προηγούμενα παραδείγματα δημιουργείται η εικασία ότι αν $|A| = n$, όπου n μη αρνητικός ακέραιος, τότε $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Πράγματι, αν $|A| = n \geq 0$ και k ακέραιος με $0 \leq k \leq n$, τότε το πλήθος των υποσυνόλων του A ισούται με $\binom{n}{k}$. Επομένως το πλήθος όλων των υποσυνόλων του A ισούται με

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

από του διώνυμο του Newton.

3.2 Καρτεσιανό Γινόμενο-Διμελείς Σχέσεις-Συναρτήσεις

Γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο του επιπέδου παριστάνεται, ως προς ένα σύστημα αξόνων, ως ένα **ζεύγος** (α, β) πραγματικών αριθμών. Το α λέγεται τετμημένη και το β τεταγμένη του σημείου. Γενικότερα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.18. Έστω A και B δύο σύνολα. Αν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, τότε με το σύμβολο (α, β) παριστάνουμε το **διατεταγμένο ζεύγος των α και β**. Η ισότητα μεταξύ διατεταγμένων ζευγών ορίζεται ως εξής:

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta') \Leftrightarrow (\alpha = \alpha' \text{ και } \beta = \beta'),$$

για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$ και $\beta, \beta' \in B$.

Υπενθυμίζουμε ότι το διατεταγμένο ζεύγος (α, β) δεν είναι το σύνολο $\{\alpha, \beta\}$. **Το ποιο στοιχείο είναι πρώτο και ποιο είναι δεύτερο παίζει ουσιώδη ρόλο**. Υπάρχει ένα συνολοθεωρητικό τέχνασμα για να ορίσουμε το διατεταγμένο ζεύγος (α, β), το οποίο οφείλεται στον Kuratowski. Ορίζουμε

$$(\alpha, \beta) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\}.$$

Με βάση αυτόν τον ορισμό θα αποδείξουμε ότι: $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow (\alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta)$.
Διακρίνουμε περιπτώσεις:
α) $\alpha = \beta$. Τότε $(\alpha, \beta) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \alpha\}\} = \{\{\alpha\}, \{\alpha\}\} = \{\{\alpha\}\}$. Εφόσον $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$, θα έχουμε $\{\{\alpha\}\} = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\}$. Εφόσον $\{\gamma, \delta\} \in \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\} = \{\{\alpha\}\}$, παίρνουμε $\{\gamma, \delta\} = \{\alpha\}$. Άρα $\gamma \in \{\alpha\} \Rightarrow \gamma = \alpha$. Ομοίως $\delta = \alpha$. Τελικώς $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
β) $\gamma = \delta$. Εντελώς ανάλογα παίρνουμε πάλι $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.
γ) Έστω $\alpha \neq \beta$ και $\gamma \neq \delta$. Από τη σχέση $\{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \delta\}\}$ θα έχουμε $\{\alpha\} = \{\gamma\}$ ή $\{\alpha\} = \{\gamma, \delta\}$. Αν $\{\alpha\} = \{\gamma, \delta\}$, τότε $\gamma = \alpha = \delta$, άτοπο από υπόθεση. Άρα $\{\alpha\} = \{\gamma\} \Leftrightarrow \alpha = \gamma$. Επομένως $(\gamma, \delta) = (\alpha, \delta) = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \delta\}\}$ και συνεπώς $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) = (\alpha, \delta) \Leftrightarrow \{\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}\} = \{\{\alpha\}, \{\alpha, \delta\}\}$. Άρα $\{\alpha, \beta\} \in \{\{\alpha\}, \{\alpha, \delta\}\} \Leftrightarrow (\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\}$ ή $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \delta\})$. Αν $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha\}$, τότε $\beta = \alpha$, άτοπο από υπόθεση. Άρα $\{\alpha, \beta\} = \{\alpha, \delta\} \Rightarrow \Rightarrow \beta \in \{\alpha, \delta\} \underset{\beta \neq \alpha}{\Rightarrow} \beta = \delta$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.19. Έστω A, B δύο σύνολα. Το σύνολο

$$A \times B = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in A \text{ και } \beta \in B\}$$

ονομάζεται **καρτεσιανό γινόμενο του A επί το B**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.20. Ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow (A = \varnothing \text{ ή } B = \varnothing)$.
(ii) $A \times (B \setminus \Gamma) = (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$.
(iii) $(A \setminus \Gamma) \times B = (A \times B) \setminus (\Gamma \times B)$.
Απόδειξη: **(i)** Έστω $A \times B = \varnothing$. Υποθέτουμε ότι $A \neq \varnothing$ και $B \neq \varnothing$. Τότε υπάρχει $\alpha \in A$ και $\beta \in B$. Αλλά τότε $(\alpha, \beta) \in A \times B \Rightarrow A \times B \neq \varnothing$, άτοπο. Αντιστρόφως, έστω $A = \varnothing$. Αν $A \times B \neq \varnothing$, τότε θα υπήρχαν $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, ώστε $(\alpha, \beta) \in A \times B$. Αλλά από τη σχέση $\alpha \in A$ προκύπτει ότι $A \neq \varnothing$, άτοπο. Άρα $A \times B = \varnothing$. Παρόμοια προκύπτει ότι αν $B = \varnothing$, τότε $A \times B = \varnothing$.
(ii) $(\alpha, \beta) \in A \times (B \setminus \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in A \text{ και } \beta \in B \setminus \Gamma) \Leftrightarrow (\alpha \in A \text{ και } \beta \in B \text{ και } \beta \notin \Gamma) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \big((\alpha, \beta) \in A \times B \text{ και } (\alpha, \beta) \notin A \times \Gamma\big) \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \in (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$.
(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια με την προηγούμενη. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.21. Αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε ένα υποσύνολο G του $A \times B$ λέμε ότι ορίζει μια **διμελή σχέση μεταξύ των A και B**.

Ακριβέστερα, μια διμελής σχέση σ μεταξύ των A και B είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{P}(A \times B)$ της μορφής $\{A \times B, G\}$, όπου $G \subseteq A \times B$. Το $G \subseteq A \times B$ λέγεται **γράφημα** της σχέσης σ. Ενδιαφέρον υπάρχει όταν το G είναι μη κενό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.22. **(i)** Αν A και B είναι δύο σύνολα, τότε μια διμελής σχέση $f = \{A \times B, G\}$ θα λέγεται **συνάρτηση (ή απεικόνιση) από το A στο B** και θα γράφουμε $\boldsymbol{f : A \to B}$, αν ισχύει το εξής:
Για κάθε $x \in A$ υπάρχει μοναδικό $y \in B$ τέτοιο, ώστε $(x, y) \in G$.
Δηλαδή, αν $(x, y) \in G$ και $(x, y') \in G$, τότε $y = y'$. Η σχέση $(x, y) \in G$ γράφεται ισοδύναμα ως εξής: $f(x) = y$ ή $x \overset{f}{\mapsto} y$. Το $y = f(x)$ λέγεται **εικόνα ή τιμή** του x μέσω της συνάρτησης f.
(ii) Το σύνολο A λέγεται **πεδίο ορισμού της συνάρτησης f**.
(iii) Το σύνολο B λέγεται **πεδίο τιμών της συνάρτησης f**.
(iv) Το σύνολο $\{f(x) \mid x \in A\} \subseteq B$ λέγεται **σύνολο τιμών της f**. Αυτό παριστάνεται με $f(A)$.
Αν $f(A) = B$, τότε η συνάρτηση f λέγεται επί. (surjection)
(v) Αν για κάθε $x, x' \in A$, με $x \neq x'$ ισχύει $f(x) \neq f(x')$, τότε η f λέγεται ένα προς ένα $\big($1-1$\big)$ ή εμφύτευση του A στο B. (injection)
Η προηγούμενη συνθήκη είναι ισοδύναμη με την: Αν $x, x' \in A$ με $f(x) = f(x')$, τότε $x = x'$.
(vi) Αν μια συνάρτηση $f : A \to B$ είναι 1-1 και επί, τότε λέγεται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. (bijection).

Σχόλιο: Για κάποιον περίεργο λόγο στα σχολικά βιβλία όλες οι συναρτήσεις θεωρούνται επί! Προφανώς λόγω κάποιας «απλούστευσης» $\big($η οποία δεν είναι επιστημονικώς ορθή και δημιουργεί μετέπειτα σύγχυση, οι συγγραφείς των βιβλίων αυτών ταυτίζουν το σύνολο B με το σύνολο τιμών $f(A)\big)$.
Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **δεν είναι επί**. Το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[0, +\infty)$, αλλά το πεδίο τιμών της είναι όλο το $\mathbb{R}$.
Η συνάρτηση όμως $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $g(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι επί. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι μια συνάρτηση f ορίζεται από δύο πράγματα: **α)** Το σύνολο $A \times B$, το οποίο καθορίζει και το πεδίο ορισμού A και το πεδίο τιμών B. Προφανώς το B περιέχει το σύνολο τιμών. **β)** Το γράφημα $G \subseteq A \times B$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.23. Αν $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ είναι δύο συναρτήσεις με γραφήματα $G_1 \subseteq A \times B$ και $G_2 \subseteq B \times \Gamma$, τότε ορίζεται η συνάρτηση

$$g \circ f : A \to \Gamma \text{ με γράφημα } G_3 = \{\big(x, g(f(x))\big) \mid x \in A\} \subseteq A \times \Gamma,$$

δηλαδή $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, για κάθε $x \in A$. Η $g \circ f$ διαβάζεται **g σύνθεση f**.
Επομένως $(x, z) \in G_3 \Leftrightarrow$ (υπάρχει (μοναδικό) $y \in B$, τέτοιο ώστε $(x, y) \in G_1$ και $(y, z) \in$ $\in G_2$).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.24. Αν $f : A \to B$, $g : B \to \Gamma$ και $h : \Gamma \to \Delta$, τότε

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) : A \to \Delta.$$

Απόδειξη: Έστω $x \in A$. Τότε έχουμε: $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\big(g(f(x))\big) =$ $= h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$. ■

Έστω $f : A \to B$ μια 1-1 και επί απεικόνιση με γράφημα $G = \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in A\}$.
Ορίζουμε τη σχέση f^{-1} μεταξύ των B και A με γράφημα $G' = \{\big(f(x), x\big) \mid x \in A\} \subseteq B \times A$.
Η f^{-1} είναι μια απεικόνιση από το B στο A, η οποία είναι επίσης 1-1 και επί.
Πράγματι, αν $y \in B$, τότε επειδή η f είναι επί, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $y = f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y) = \big(x, f(x)\big) \in G \Leftrightarrow (y,x) = \big(f(x), x\big) \in G'$. Επειδή η f είναι 1-1, το $x \in A$ είναι μοναδικό. Άρα, για κάθε $y \in B$ υπάρχει μοναδικό $x \in A$ τέτοιο, ώστε $(y,x) \in G'$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ μέσω της ισοδυναμίας: $(x,y) \in G \Leftrightarrow (y,x) \in G'$ ή αλλιώς $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.
Η συνάρτηση f^{-1} είναι 1-1. Πράγματι, έστω $f^{-1}(y) = f^{-1}(y') = x$. Τότε $(y,x) \in G' \Leftrightarrow (x,y) \in$ $\in G$ και $(y',x) \in G' \Leftrightarrow (x,y') \in G$, δηλαδή $y = f(x)$ και $y' = f(x)$. Επομένως $y = y'$.
Τέλος, η $f^{-1} : B \to A$ είναι επί. Πράγματι, αν $x \in A$ και $y = f(x)$, τότε $x = f^{-1}(y)$, από τον ορισμό της f^{-1}.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.25. Αν $f : A \to B$ είναι 1-1 και επί, η συνάρτηση $f^{-1} : B \to A$ που ορίσαμε προηγουμένως λέγεται **αντίστροφη της f**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.26. Αν $A \neq \varnothing$, η συνάρτηση $\mathbf{1}_A : A \to A$ με γράφημα τη **διαγώνιο** $\{(x,x) \mid x \in$ $\in A\}$ του A, δηλαδή $\mathbf{1}_A(x) = x$, για κάθε $x \in A$, λέγεται **η ταυτοτική συνάρτηση του A**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.27. Έστω $f : A \to B$ μια 1-1 και επί συνάρτηση. Τότε ισχύουν οι σχέσεις: $f^{-1} \circ f = \mathbf{1}_A$ και $f \circ f^{-1} = \mathbf{1}_B$.
Απόδειξη: Έστω $x \in A$ και $y = f(x) \in B$, δηλαδή $f^{-1}(y) = x$. Τότε $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) =$ $= f^{-1}(y) = x = \mathbf{1}_A(x)$. Αντιστρόφως, έστω $y \in B$ και $x = f^{-1}(y) \in A$. Τότε $f(x) = y$. Άρα $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \mathbf{1}_B(y)$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.28. Έστω $f : A \to B$.
(i) Αν $X \subseteq A$, τότε το σύνολο $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$ ονομάζεται **εικόνα του X μέσω της f**.
(ii) Αν $Y \subseteq B$, τότε το σύνολο $f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$ ονομάζεται **αντίστροφη εικόνα του Y μέσω της f**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.29. Έστω $f : A \to B$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $f(\varnothing) = \varnothing$ και $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.
(ii) Αν $X, X' \subseteq A$, τότε $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$ και $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$.
(iii) Αν $Y, Y' \subseteq B$, τότε $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ και $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$.
Απόδειξη: **(i)** Έστω $f(\varnothing) \neq \varnothing$ και άρα υπάρχει $y \in f(\varnothing)$. Τότε **υπάρχει $x \in \varnothing$** με $y = f(x)$, άτοπο. Αν $f^{-1}(\varnothing) \neq \varnothing$ και $x \in f^{-1}(\varnothing)$, τότε $\boldsymbol{f(x) \in \varnothing}$, άτοπο.
(ii) Έστω $x \in X \cup X'$. Τότε $x \in X$ ή $x \in X'$. Αν $x \in X$, τότε $f(x) \in f(X) \subseteq f(X) \cup f(X')$. Ομοίως, αν $x \in X'$, τότε $f(x) \in f(X) \cup f(X')$. Άρα $f(X \cup X') \subseteq f(X) \cup f(X')$.
Αντιστρόφως, έστω $y \in f(X) \cup f(X')$. Τότε $y \in f(X)$ ή $y \in f(X')$. Αν $y \in f(X)$, τότε υπάρχει $x \in X \subseteq X \cup X'$, τέτοιο ώστε $y = f(x)$. Άρα $y \in f(X \cup X')$. Ομοίως, αν $y \in f(X')$, τότε $y \in f(X \cup X')$. Επομένως $f(X) \cup f(X') \subseteq f(X \cup X')$. Τελικώς $f(X \cup X') = f(X) \cup f(X')$.
Προφανώς, αν $T \subseteq S \subseteq A$, τότε $f(T) \subseteq f(S)$. Επομένως, $X \cap X' \subseteq X \Rightarrow f(X \cap X') \subseteq f(X)$. Ομοίως, $X \cap X' \subseteq X' \Rightarrow f(X \cap X') \subseteq f(X')$. Επομένως $f(X \cap X') \subseteq f(X) \cap f(X')$.
Ισότητα εν γένει δεν ισχύει στην περίπτωση αυτή, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα: $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ με $f(x) = x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $X = \{-1\}$ και $X' = \{1\}$. Τότε $X \cap X' = \varnothing$ και συνεπώς $f(X \cap X') = f(\varnothing) = \varnothing$. Αλλά $f(X) = f(X') = \{1\} = f(X) \cup f(X')$.
(iii) $x \in f^{-1}(Y \cup Y') \Leftrightarrow f(x) \in Y \cup Y' \Leftrightarrow \big(f(x) \in Y$ ή $f(x) \in Y'\big) \Leftrightarrow \big(x \in f^{-1}(Y)$ ή $x \in$ $\in f^{-1}(Y')\big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$.
$x \in f^{-1}\big(Y \cap Y') \Leftrightarrow f(x) \in Y \cap Y' \Leftrightarrow \big(f(x) \in Y$ και $f(x) \in Y'\big) \Leftrightarrow \big(x \in f^{-1}(Y)$ και $x \in$ $\in f^{-1}(Y')\big) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.30. Μια ακολουθία στοιχείων ενός συνόλου X είναι μια απεικόνιση $\alpha : \mathbb{N} \to X$ ή $\alpha : \mathbb{Z}_{>0} \to X$, όπου $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ και $\mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ τα σύνολα των φυσικών και θετικών ακεραίων, αντίστοιχα. Στις ακολουθίες συνήθως γράφουμε α_n αντί $\alpha(n)$. Μια **πεπερασμένη** ακολουθία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ή το $\{1, 2, \ldots, n\}$. Γενικότερα, αν I είναι ένα **σύνολο δεικτών**, μια **οικογένεια με δείκτες από το I** είναι μια απεικόνιση $\alpha : I \to X$. Συνήθως μια οικογένεια παριστάνεται με το σύμβολο $(\alpha_i)_{i\in\, I}$.
Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{A}$ είναι ένα μη κενό σύνολο υποσυνόλων ενός βασικού συνόλου Ω, δηλαδή $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. (Για ένα σύνολο συνόλων προτιμούμε τον όρο «συλλογή»). Αν υπάρχει ανάγκη «παραμετρικοποίησης» των στοιχείων-συνόλων της συλλογής με βάση ένα σύνολο δεικτών I, δηλαδή αν θέλουμε να διαφοροποιήσουμε τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ με βάση κάποιους δείκτες από ένα σύνολο I, θεωρούμε την $\mathcal{A}$ ως σύνολο εικόνων μιας οικογένειας και γράφουμε $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ ή αλλιώς $\{A_i\}_{i\in I}$. Λόχου χάριν, αν η $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη, γράφουμε $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \{\mathrm{A}_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = \{A_i\}_{1\leq i\leq n}$.
Αυτό μπορεί να συμβεί και όταν το σύνολο δεικτών δεν είναι υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ή του $\mathbb{Z}_{>0}$. Αν δεν υπάρχει ανάγκη ιδιαίτερου συμβολισμού, γράφουμε $A \in \mathcal{A}$ ή (τετριμμένα) $\mathcal{A} = \{A \mid A \in \mathcal{A}\}$. Στην τελευταία περίπτωση έχουμε θεωρήσει το $\mathcal{A}$ σαν το σύνολο των εικόνων της ταυτοτικής οικογένειας $\mathbf{1}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ με σύνολο δεικτών το ίδιο το $\mathcal{A}$.
Για παράδειγμα, θεωρούμε τη συλλογή $\mathcal{A}$ όλων των υποδιαστημάτων του $\mathbb{R}$ της μορφής

$$\big[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1\big), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η $\mathcal{A}$ μπορεί να γραφεί $\mathcal{A} = \Big\{\big[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1\big) \mid x \in \mathbb{R}\Big\}$, όπου $\lfloor x\rfloor$ το ακέραιο μέρος του πραγματικού x. Εδώ το σύνολο δεικτών I είναι το $\mathbb{R}$ και αντί του συμβόλου i χρησιμοποιούμε το x. Μπορούμε επίσης να γράψουμε

$$\mathcal{A} = \Big\{\big[\lfloor x\rfloor, \lfloor x\rfloor + 1\big)\Big\}_{x\in\mathbb{R}}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.31. Έστω $\mathcal{A}$ μια μη κενή συλλογή-οικογένεια υποσυνόλων ενός βασικού συνόλου Ω. Τότε ορίζονται οι εξής έννοιες:

(i) Η **ένωση $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$ όλων των συνόλων της συλλογής $\mathcal{A}$**, ως το σύνολο των στοιχείων x, τα οποία ανήκουν **σε κάποιο** $A \in \mathcal{A}$.
Δηλαδή $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in \Omega \mid x \in A, \text{ για κάποιο } A \in \mathcal{A}\}$. Πολλές φορές γράφουμε απλώς $\bigcup \mathcal{A}$ αντί $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{A}} A$. Αν η οικογένεια $\mathcal{A}$ εξαρτάται από ένα σύνολο δεικτων I, δηλαδή $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, τότε γράφουμε $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Τέλος, αν η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη, ήτοι $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, μπορούμε να γράψουμε την ένωση αυτή ως $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ ή πιο σύντομα $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(ii) Η **τομή $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$ όλων των συνόλων της συλλογής $\mathcal{A}$**, ως το σύνολο των στοιχείων x, τα οποία ανήκουν **σε κάθε** σύνολο $A \in \mathcal{A}$.
Δηλαδή $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A = \{x \in \Omega \mid x \in A, \text{ για κάθε } A \in \mathcal{A}\}$. Πολλές φορές γράφουμε απλώς $\bigcap \mathcal{A}$ αντί $\bigcap\limits_{A\in\mathcal{A}} A$. Αν η οικογένεια $\mathcal{A}$ εξαρτάται από ένα σύνολο δεικτων I, δηλαδή $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$, τότε γράφουμε $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$. Τέλος, αν η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι πεπερασμένη, ήτοι $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$,

μπορούμε να γράψουμε την τομή αυτή ως $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ ή πιο σύντομα $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.32. $\big($**ΝΟΜΟΙ του De MORGAN-ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ**$\big)$ Έστω $\mathcal{A} = \big\{A_i\big\}_{i\in I}$ μια μη κενή συλλογή υποσυνόλων ενός βασικού συνόλου Ω, δηλαδή $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i)
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

(ii)
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

Απόδειξη: (i) Έστω $x \in \Omega$. Τότε $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega \mid\ x \in A_i,$ για κάποιο $i \in I\} \Leftrightarrow \big(x \notin A_i,$ για κάθε $i \in I\big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i^c,$ για κάθε $i \in I\big) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c$.

(ii) Έστω $x \in \Omega$. Τότε $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c \Leftrightarrow x \notin \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in \Omega \mid\ x \in A_i,$ για κάθε $i \in I\} \Leftrightarrow \big(x \notin A_i,$ για κάποιο $i \in I\big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i^c,$ για κάποιο $i \in I\big) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I} A_i^c$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.33. Έστω $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ όπως παραπάνω και $B \subseteq \Omega$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$ και

(ii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$.

Απόδειξη: **(i)** $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B \Leftrightarrow \Big(x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ και $x \in B\Big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i,$ για κάποιο $i \in I$ και $x \in B\big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i \cap B,$ για κάποιο $i \in I\big) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$.

(ii) $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B \Leftrightarrow \Big(x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ ή $x \in B\Big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i,$ για κάθε $i \in I$ ή $x \in B\big) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \big(x \in A_i$ ή $x \in B,$ για κάθε $i \in I\big) \Leftrightarrow \big(x \in A_i \cup B,$ για κάθε $i \in I\big) \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.34. **(i)** Αν $\mathcal{A} = \{A_i\}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X και $B \subseteq Y$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcup_{i\in I}(A_i \times B) \text{ και } \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B).$$

(ii) Αν $A \subseteq X$ και $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Y, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$A \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i) \text{ και } A \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i).$$

Απόδειξη: **(i)** $(\alpha, \beta) \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B \Leftrightarrow \Big(\alpha \in \bigcup_{i\in I} A_i$ και $\beta \in B\Big) \Leftrightarrow \big(\alpha \in A_i,$ για κάποιο

$i \in I$ και $\beta \in B\big) \Leftrightarrow \big((\alpha,\beta) \in A_i \times B,$ για κάποιο $i \in I\big) \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times B)$.

Επίσης, $(\alpha,\beta) \in \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \times B \Leftrightarrow \left(\alpha \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \text{ και } \beta \in B\right) \Leftrightarrow \big(\alpha \in A_i,$ για κάθε $i \in I$ και $\beta \in B\big) \Leftrightarrow \big((\alpha,\beta) \in A_i \times B,$ για κάθε $i \in I\big) \Leftrightarrow (\alpha,\beta) \in \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \times B)$.

(ii) Παρόμοια με την προηγούμενη. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.35. Έστω $\sigma = \{A \times A, G\}$ μια διμελής σχέση, όπου $A \neq \varnothing$ και $G \neq \varnothing$. Αυτή λέγεται **μια διμελής σχέση στο A**.
Αντί $(x,y) \in G$, θα γράφουμε $\boldsymbol{x\sigma y}$.
(i) Μια σχέση σ στο A λέγεται **αυτοπαθής** ή **ανακλαστική**, αν και μόνον αν $x\sigma x$, για κάθε $x \in A$.
(ii) Μια σχέση σ στο A λέγεται **συμμετρική**, αν και μόνον αν, για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η ισοδυναμία: $x\sigma y \Leftrightarrow y\sigma x$.
(iii) Μια σχέση σ στο A λέγεται **αντισυμμετρική**, αν και μόνον αν, για κάθε $x, y \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\big(x\sigma y$ και $y\sigma x\big) \Rightarrow x = y$.
(iv) Μια σχέση σ στο A λέγεται **μεταβατική**, αν και μόνον αν, για κάθε $x, y, z \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: $\big(x\sigma y$ και $y\sigma z\big) \Rightarrow x\sigma z$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.36. Έστω σ μια $\big($διμελής$\big)$ σχέση στο $A \neq \varnothing$. Η σ λέγεται **σχέση μερικής διάταξης** ή **μερική διάταξη του A** και το A **μερικώς διατεταγμένο σύνολο**, αν η σ είναι:
(i) Ανακλαστική, **(ii)** αντισυμμετρική και **(iii)** μεταβατική.
Επηρεασμένοι από τη διάταξη «$\leq$» στο $\mathbb{R}$, συνήθως αντί του σ χρησιμοποιούμε κάποιο από τα σύμβολα $\leq, \preceq, \subseteq, \sqsubseteq, \leqslant, \lesssim, \precsim$ κτλ.
Μια μερική διάταξη $\preceq$ λέγεται **ολική** ή **γραμμική** αν κάθε δύο στοιχεία του A είναι συγκρίσιμα, δηλαδή, για κάθε $x, y \in A$ έχουμε $x \preceq y$ ή $y \preceq x$.

<u>Παραδείγματα:</u> 1) Έστω Ω ένα βασικό σύνολο και $A = \mathcal{P}(\Omega)$. Η σχέση $\subseteq$ του «περιέχεσθαι» είναι μια μερική διάταξη στο A. Αν το Ω περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία α και β, η σχέση αυτή δεν είναι γραμμική διάταξη. $\big($Γιατί τα σύνολα $\{\alpha\}$ και $\{\beta\}$ δεν είναι συγκρίσιμα$\big)$.
Αν όμως $A = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}, \{0,1,2\}\} \subseteq \mathcal{P}\big(\{0,1,2\}\big)$, η σχέση $\subseteq$ είναι γραμμική στο A.
2) Η σχέση $\leq$ είναι γραμμική διάταξη σε κάθε μη κενό υποσύνολο A του $\mathbb{R}$.
3) Έστω A το σύνολο των κύκλων του επιπέδου **με το ίδιο κέντρο Ο**. Αν $C_1, C_2 \in A$ μπορούμε να γράψουμε $C_1 \preceq C_2$ αν και μόνον αν η ακτίνα του C_1 είναι μικρότερη ή ίση της ακτίνας του C_2. Η $\preceq$ είναι μια γραμμική διάταξη στο A.
4) Έστω $V \neq \{0\}$ ένας διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ ή του $\mathbb{C}$. Αν X είναι το σύνολο των διανυσματικών υπόχωρων του V, τότε η σχέση $\leqslant$ μεταξύ των υπόχωρων είναι μια σχέση μερικής διάταξης στο X.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.37. Έστω σ μια $\big($διμελής$\big)$ σχέση στο $A \neq \varnothing$. Η σ λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** ή απλά **ισοδυναμία** στο A, αν η σ είναι:
(i) Ανακλαστική, **(ii)** συμμετρική και **(iii)** μεταβατική.
Εδώ αντί του σ, χρησιμοποιούμε κάποιο από τα σύμβολα $\sim, \simeq, \equiv$ κτλ.

Παραδείγματα: 1) Η **ισότητα** των στοιχείων ενός μη κενού συνόλου A είναι σχέση ισοδυναμίας.

2) Στη Γεωμετρία έχουμε μάθει ότι δύο κύκλοι είναι ίσοι αν και μόνον αν έχουν ίσες ακτίνες. Επειδή δύο τέτοιοι κύκλοι εν γένει ως σύνολα δεν ταυτίζονται, εκτός αν έχουν το ίδιο κέντρο, αφού εν γένει περιέχουν διαφορετικά σημεία, είναι προτιμότερο να θεωρούνται **ισοδύναμοι**. Η σχέση λοιπόν $C_1 \equiv C_2$ αν και μόνον αν οι κύκλοι C_1 και C_2 έχουν ίσες ακτίνες, είναι σχέση ισοδυναμίας.
3) Στο σύνολο των κύκλων του επιπέδου ορίζουμε τη σχέση $\sim$ με $C_1 \sim C_2$ αν και μόνον αν οι κύκλοι C_1 και C_2 είναι ομόκεντροι. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.
4) Δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του επιπέδου $\big($ή του χώρου$\big)$ θα λέγονται ισοδύναμες αν και μόνον αν ταυτίζονται ή είναι παράλληλες. Μπορούμε να γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$. Η σχέση // είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ευθειών του χώρου.
5) Στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών ορίζουμε την εξής σχέση: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Πράγματι, $x - x = 0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \sim x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Ανακλαστική), $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y - x = -(x - y) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow y \sim x$ (Συμμετρική) και αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x - y \in \mathbb{Q}$ και $y - z \in \mathbb{Q}$ και συνεπώς $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \sim z$ (Μεταβατική).

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.38. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό. Αν $x \in Q$, τότε ορίζουμε την **κλάση ισοδυναμίας** $\mathrm{Cl}(x)$ του x ως το σύνολο των στοιχείων του X, τα οποία είναι ισοδύναμα με το x, δηλαδή $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in X \mid y \sim x\}$. Προφανώς $x \in \mathrm{Cl}(x)$, αφού $x \sim x$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.39. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας σ' αυτό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(i) $x \sim y$.
(ii) $y \in \mathrm{Cl}(x)$.
(iii) $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$.
(iv) $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) \neq \varnothing$.
Απόδειξη: (i) $\Leftrightarrow$ **(ii)** Άμεση, από τον ορισμό της κλάσης ισοδυναμίας.
(i) $\Leftrightarrow$ **(iii)** Έστω $x \sim y$. Έστω $z \in \mathrm{Cl}(x) \Leftrightarrow z \sim x$. Επειδή $x \sim y$, λόγω της μεταβατικότητας της $\sim$, $z \sim y \Leftrightarrow z \in \mathrm{Cl}(y)$. Άρα $\mathrm{Cl}(x) \subseteq \mathrm{Cl}(y)$. Αντιστρόφως, έστω $z \in \mathrm{Cl}(y) \Leftrightarrow z \sim y$. Επειδή $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$, λόγω της μεταβατικότητας της $\sim$, $z \sim x \Leftrightarrow z \in \mathrm{Cl}(x)$. Άρα $\mathrm{Cl}(y) \subseteq \mathrm{Cl}(x)$. Τελικώς $\mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$.
Αντιστρόφως, αν $\mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$, τότε $y \in \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$ και άρα $y \sim x$.
(iii) $\Leftrightarrow$ **(iv)** Έστω $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$, άρα $\mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(x) \neq \varnothing$ είναι μη κενό $\big($γιατί προφανώς $x \in \mathrm{Cl}(x)\big)$.
Αντιστρόφως, έστω $z \in \mathrm{Cl}(x) \cap \mathrm{Cl}(y) \Rightarrow z \sim x \underset{\text{(i)}\Leftrightarrow\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Cl}(z) = \mathrm{Cl}(x)$. Ομοίως, $z \in \mathrm{Cl}(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow z \sim y \underset{\text{(i)}\Leftrightarrow\text{(iii)}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Cl}(z) = \mathrm{Cl}(y)$. Τελικώς $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(z)$. ■

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι μια σχέση ισοδυναμίας σ' ένα $\big($μη κενό$\big)$ σύνολο X χωρίζει το σύνολο αυτό σε μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, **τις κλάσεις ισοδυναμίας**. Κάθε $x \in X$ ανήκει σε μια μοναδική κλάση ισοδυναμίας. Κάθε στοιχείο x μιας κλάσης ισοδυναμίας λέγεται **αντιπρόσωπος** της κλάσης αυτής. Ολόκληρη η κλάση αποτελείται ακριβώς από τα στοιχεία του X που είναι ισοδύναμα με το x. Λέμε ότι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αποτελεί μια **διαμέριση του $\boldsymbol{X}$**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.40. Έστω $X \neq \varnothing$ και $\varnothing \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathrm{X})$. Λέμε ότι το $\mathcal{A}$ αποτελεί μια **διαμέριση του $\boldsymbol{X}$**, αν και μόνον αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $\varnothing \notin \mathcal{A}$.

(ii) Για κάθε $A, A' \in \mathcal{A}$ με $A \neq A'$, ισχύει $A \cap A' = \varnothing$.
(iii) $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A = X$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.41. Έστω $\mathcal{A}$ μια διαμέριση ενός συνόλου $X \neq \varnothing$. Τότε η $\mathcal{A}$ ορίζει μια **μοναδική** σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο X, ως εξής: $x \sim y \Leftrightarrow$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο, ώστε $x, y \in A$.
Απόδειξη: Η ανακλαστική και η συμμετρική ιδιότητα προκύπτουν άμεσα. Όσον αφορά στη μεταβατική, υποθέτουμε ότι $x \sim y$ και $y \sim z$. Τότε υπάρχουν $A, A' \in \mathcal{A}$ τέτοια, ώστε $x, y \in A$ και $y, z \in A'$. Εφόσον $y \in A \cap A'$, η τομή $A \cap A'$ είναι μη κενή. Από τον ορισμό της διαμέρισης προκύπτει ότι $A = A'$. Άρα $x, z \in A$ και συνεπώς $x \sim z$. ■

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι σε ένα μη κενό σύνολο X, το πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας που μπορούμε να ορίσουμε σ' αυτό συμπίπτει με το πλήθος των διαμερίσεων αυτού. Αν $|X| = n > 0$, θετικός ακέραιος, το πλήθος αυτό ισούται με τον λεγόμενο **αριθμό Bell**, B_n. Μερικές τιμές για τους αριθμούς Bell: $B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15, B_5 = 52, \ldots$

Κεφάλαιο 4

Περί Αλγεβρικών Δομών-Σύντομη Εισαγωγή

Από το Δημοτικό έχουμε μάθει να κάνουμε διάφορες πράξεις. Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση. Μάθαμε να πολλαπλασιάζουμε έναν αριθμό με ένα διάνυσμα ή να παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Τι συμβολίζει αλήθεια το $3+2$;
Ουσιαστικά παίρνω ένα ζεύγος, εν προκειμένω το $(3, 2)$ και το απεικονίζω σε έναν άλλο αριθμό, το 5, το οποίο συμβολίζω με $3 + 2$. Επομένως **μια πράξη είναι μια απεικόνιση**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. Έστω A, B και Γ μη κενά σύνολα. Μια **(διμελής) πράξη με σύνολο τιμών στο Γ** είναι μια απεικόνιση της μορφής $\star : A \times B \to \Gamma$. Στις πράξεις δεν γράφουμε $\star(\alpha, \beta)$ ή πιο σωστά $\star((\alpha, \beta))$, αλλά $\alpha \star \beta$. Αν $A = B = \Gamma$, τότε η πράξη $\star : A \times A \to A$ λέγεται **εσωτερική πράξη του A**.

Τα σύνολα A και B δεν είναι κατ' ανάγκην τα ίδια. Ούτε το A με το Γ. Σε αυτήν την περίπτωση δεν μιλάμε για εσωτερική πράξη. Αλλά, για κάποιους λόγους αποφεύγουμε τον όρο «εξωτερική» πράξη. Για παράδειγμα, κάθε σώμα είναι διανυσματικός χώρος επί του εαυτού του. Π.χ. το $\mathbb{R}$. Η πράξη του πολλαπλασιασμού επί διάνυσμα, σ' αυτήν την περίπτωση είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών που είναι εσωτερική πράξη στο $\mathbb{R}$.
Για τις πράξεις χρησιμοποιούμε διάφορα σύμβολα, $+, \cdot, \times, \cap, \cup, \star, \circ, \diamond, \triangle, \oplus, \odot$ κτλ με συνηθέστερα τα $+, \cdot$.
Πολλές φορές όμως **χρησιμοποιούμε καταχρηστικά και για λόγους οικονομίας το ίδιο σύμβολο αναφερόμενοι σε διαφορετικές πράξεις**. Για παράδειγμα, το σύμβολο $+$ χρησιμοποιείται και για την πρόσθεση αριθμών, αλλά και διανυσμάτων, πινάκων, συναρτήσεων κτλ. Επίσης, το ίδιο ισχύει και για το σύμβολο του πολλαπλασιασμού $\cdot$. Το τελευταίο χρησιμοποιείται και για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Το αποτέλεσμα της τελευταίας αυτής πράξης δεν είναι διάνυσμα αλλά πραγματικός αριθμός. Δεν είναι ασυνήθιστο σε μια σχέση να χρησιμοποιείται το ίδιο σύμβολο, με διαφορετική σημασία κάθε φορά. Ο προσεκτικός σπουδαστής των μαθηματικών πρέπει να αναγνωρίζει τη σημασία του κάθε συμβόλου σε μια σχέση και να αποδίδει σε αυτό την πραγματική του έννοια, ενίοτε διαφορετική σε πολλές περιπτώσεις, χωρίς να δημιουργείται σύγχυση. Αλλιώς, θα έπρεπε να επινοήσουμε σωρεία διαφορετικών συμβόλων και τότε το μπέρδεμα θα ήταν μεγαλύτερο.

Αν ένα σύνολο A είναι εφοδιασμένο με κάποιες πράξεις $\star, \triangle, \ldots$ κτλ, γράφουμε $(A, \star, \triangle, \ldots)$ για να τονίσουμε την **αλγεβρική δομή** του συνόλου αυτού. Όταν οι πράξεις $\star, \triangle, \ldots$ είναι δεδομένες, γράφουμε χάριν απλότητος απλά το σύνολο A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. Έστω A μη κενό σύνολο και $\star : A \times A \to A$ μια εσωτερική πράξη στο A.

(i) Αν $\alpha \star (\beta \star \gamma) = (\alpha \star \beta) \star \gamma$, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$, τότε η πράξη $\star$ λέγεται **προσεταιριστική**. Το ζεύγος $(A, \star)$ ή απλά το A λέγεται **ημιομάδα**.
(ii) Αν $\alpha \star \beta = \beta \star \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in A$, τότε η πράξη $\star$ λέγεται **αντιμεταθετική** ή απλούστερα **μεταθετική**.

Αν έχουμε $n \geq 3$ στοιχεία του A, επειδή κάθε φορά εφαρμόζουμε την $\star$ με δύο, μπορούμε να βάζουμε παρενθέσεις σημειώνοντας την ιεραρχικότητα των πράξεων.
Για παράδειγμα, $x_1 \star ((x_2 \star x_3)x_4)$, $(x_1 \star x_2) \star (x_3 \star x_4)$, $((x_1 \star x_2) \star x_3) \star x_4$ κτλ. Είναι όλα τα αποτελέσματα τα ίδια; Στην περίπτωση που το ζεύγος $(A, \star)$ είναι ημιομάδα, αποδεικνύεται ότι **όλα αυτά είναι ίσα**. Αυτό δεν είναι κάτι τετριμμένο, αλλά χρειάζεται απόδειξη. Εμείς, για λόγους οικονομίας, θα το δεχτούμε χωρίς να το αποδείξουμε. Έστι σε μια ημιομάδα θα γράφουμε $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$, εννοώντας το αποτέλεσμα που προκύπτει αν βάλουμε παρενθέσεις, κρατώντας φυσικά τη σειρά των στοιχείων.

Παραδείγματα: 1) Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμών (ακεραίων, ρητών, πραγματικών) είναι προσεταιριστικές και μεταθετικές.
2) Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο και A είναι το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής

$$f : X \to X,$$

τότε η συνήθης σύνθεση $\circ$ των συναρτήσεων στο A είναι προσεταιριστική πράξη αλλά όχι (εν γένει) μεταθετική.
3) Στο σύνολο $\mathbb{R}^3$ των διανυσμάτων του χώρου η πράξη $\times$ δεν είναι μεταθετική γιατί $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha}$, για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$. Ούτε επίσης προσεταιριστική γιατί

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})\vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma},$$

για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$.
4) Αν $A = \mathcal{P}(X)$ είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X, τότε σ' αυτό οι πράξεις της ένωσης $\cup$ και της τομής $\cap$ των στοιχείων του A $\big($υποσυνόλων του $X\big)$ είναι και προσεταιριστικές και μεταθετικές.
5) Η πράξη $-$ της αφαίρεσης σε οποιοδήποτε αριθμοσύνολο που έχουμε ήδη μάθει, $\big($θα δούμε τι γίνεται στο $\mathbb{Z}_2\big)$ δεν είναι ούτε προσεταιριστική ούτε μεταθετική.
6) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε μια πράξη $\circ$ ως εξής: $x \circ y = x + y - xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι αν $x, y, z \in \mathbb{R}$, τότε $x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$ και $(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)z = x + y + z - xy - yz - zx + xyz$. Άρα η πράξη $\circ$ είναι προσεταιριστική. Επίσης, αν $x, y \in \mathbb{R}$, τότε $x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x$ και άρα η $\circ$ είναι και μεταθετική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.3. Έστω G μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη $\star$. Ένα στοιχείο $e \in G$ λέγεται **ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη** $\star$ αν και μόνον αν $e \star x = x \star e = x$, για κάθε $x \in G$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. Το ουδέτερο στοιχείο μιας εσωτερικής πράξης είναι μοναδικό.
Απόδειξη: Έστω e και e' δύο ουδέτερα στοιχεία μιας εσωτερικής πράξης $\star$ του G. Από τον ορισμό του e προκύπτει $\big($για $x = e'\big)$ ότι $e \star e' = e'$. Επίσης, από τον ορισμό του ουδέτερου στοιχείου e' προκύπτει $\big($για $x = e\big)$ ότι $e \star e' = e$. Επομένως $e = e' = e \star e'$. ■

Παραδείγματα: 1) Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών άλλοι το ορίζουν ως $\{0, 1, 2, \ldots\}$ και άλλοι ως $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Στην πρώτη περίπτωση το 0 είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και

το 1 το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Στη δεύτερη περίπτωση δεν έχουμε ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση, αλλά το 1 εξακολουθεί να είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
2) Στο σύνολα $\mathbb{R}$ των πραγματικών και στα υποσύνολά του $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ το μηδέν 0 είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και το ένα 1 το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού.
3) Στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(\Omega)$ ενός βασικού συνόλου Ω, το $\varnothing$ είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο της ένωσης και το Ω το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο της τομής.
4) Στο σύνολο A όλων των συναρτήσεων της μορφής $f : X \to X$, όπου $X \neq \varnothing$, η ταυτοτική συνάρτηση $\mathbf{1}_X : X \to X$ με $\mathbf{1}_X(x) = x$, για κάθε $x \in X$ είναι το μοναδικό ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.5. Έστω G ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη $\star$. Το ζεύγος $(G, \star)$ λέγεται **ομάδα** αν και μόνον αν ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) Το ζεύγος $(G, \star)$ είναι ημιομάδα, δηλαδή για κάθε $x, y, z \in G$ ισχύει η σχέση:
$$x \star (y \star z) = (x \star y) \star z.$$
(ii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο e ως προς την πράξη $\star$, δηλαδή
$$e \star x = x \star e = x,$$
για κάθε $x \in G$.
(iii) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει στοιχείο $\hat{x}$ με την ιδιότητα
$$x \star \hat{x} = \hat{x} \star x = e.$$
Το $\hat{x}$ λέγεται **συμμετρικό του x** ως προς την πράξη $\star$.

Στα επόμενα, όταν είναι σαφής η εσωτερική πράξη, θα λέμε απλώς η ομάδα G αντί η ομάδα $(G, \star)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. Έστω G μια ομάδα με πράξη $\star$. Στον ορισμό της ομάδας ορισμένα από τα αξιώματα είναι κατά το ήμισυ περιττά. Πιο συγκεκριμένα, ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη $\star$ είναι ομάδα αν και μόνον αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) Η G είναι ημιοομάδα ως προς την πράξη $\star$, δηλαδή $x\star(y\star z) = (x\star y)\star z$, για κάθε $x, y, z \in G$.
(ii) Υπάρχει $e \in G$, τέτοιο ώστε $e \star x = x$, για κάθε $x \in G$.
(iii) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $\hat{x} \in G$, τέτοιο ώστε $\hat{x} \star x = e$.
Απόδειξη: Έχουμε: $x\star\hat{x} = e\star x\star\hat{x} = (\widehat{(\hat{x})}\star\hat{x})\star x\star\hat{x} = \widehat{(\hat{x})}\star(\underbrace{\hat{x}\star x}_{e})\star\hat{x} = \widehat{(\hat{x})}\star e\star\hat{x} = \widehat{(\hat{x})}\star\hat{x} = e$.
Επίσης, $x\star e = x\star(\hat{x}\star x) = (x\star\hat{x})\star x$ και από το προηγούμενο, αυτό είναι ίσο με $e\star x = x$. ■

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.7. Το ουδέτερο στοιχείο και το συμμετρικό ενός στοιχείου μιας ομάδας G είναι μοναδικά.
Απόδειξη: Για το ουδέτερο στοιχείο, αυτό έχει αποδειχθεί στην πρόταση **Β΄.4**.
Όσον αφορά το συμμετρικό ενός στοιχείου x της G, υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο συμμετρικά $\hat{x}$ και x'. Τότε $x' = x' \star e = x' \star x \star \hat{x} = (x' \star x) \star \hat{x} = e \star \hat{x} = \hat{x}$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8. Μια ομάδα $(G, \star)$ λέγεται **αντιμεταθετική** ή **αβελιανή**[1] αν η πράξη $\star$ είναι μεταθετική.

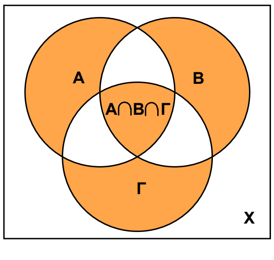
Παραδείγματα: **1)** Τα σύνολα των ακεραίων, των ρητών και των πραγματικών είναι αβελιανές ομάδες ως προς την πρόσθεση. Το συμμετρικό ενός στοιχείου x είναι το αντίθετό του $-x$.

[1]Προς τιμή του μεγάλου Νορβηγού μαθηματικού Niels Henrik Abel (1802-1829)!

Το σύνολο των φυσικών δεν είναι ομάδα ως προς την πρόσθεση, γιατί ο αντίθετος ενός φυσικού, πχ. του 1, δεν είναι πάντα φυσικός.
2) Τα σύνολα $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ και $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι αβελιανές ομάδες ως προς τον πολλαπλασιασμό. Το συμμετρικό ενός στοιχείου είναι το αντίστροφό του. Το $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ δεν είναι ομάδα ως προς τον πολλαπλασιασμό, γιατί ο αντίστροφος ενός ακεραίου, διαφορετικού του ± 1 δεν είναι ακέραιος.
3) Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Το σύνολο όλων των **1-1 και επί** απεικονίσεων της μορφής $f : X \to X$ είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση $\circ$ απεικονίσεων. Αυτές οι απεικονίσεις λέγονται **μεταθέσεις του X** και συμβολίζεται με $\mathrm{Sym}(X)$ ή αλλιώς με S_X.
Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $\mathbf{1}_X : X \to X$ με $\mathbf{1}_X(x) = x$, για κάθε $x \in X$.
Το συμμετρικό μιας απεικόνισης $f : X \to X$ είναι η αντίστροφη αυτής $f^{-1} : X \to X$. Η ομάδα $\mathrm{Sym}(X) = S_X$ των μεταθέσεων του X λέγεται **η συμμετρική ομάδα του X**.
Αν το X περιέχει ακριβώς $n \geq 1$ στοιχεία, για παράδειγμα αν $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, η S_X συμβολίζεται με S_n. Η S_n αποτελείται από $n!$ μεταθέσεις. Για $n \geq 3$ η S_n **δεν είναι αβελιανή**.
4) Έστω $\mathcal{P}(X)$ το δυναμοσύνολο ενός συνόλου X, το οποίο θα θεωρούμε ως βασικό σύνολο. Ορίζουμε στο $\mathcal{P}(X)$ την πράξη $\triangle$ της συμμετρικής διαφοράς, ως εξής:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

$\big($Ορισμός **Α'.13**$\big)$.
Τότε το ζεύγος $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ είναι αβελιανή ομάδα.
$\big($Το ότι $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ έχει αποδειχθεί στο **(vi)** της πρότασης **Α'.11**.$\big)$
Προφανώς η πράξη $\triangle$ είναι μεταθετική, λόγω συμμετρίας.
Θα αποδείξουμε ότι είναι και προσεταιριστική.
Πράγματι, έστω $A, B, \varGamma \subseteq X$.
Τότε $A \triangle (B \triangle \varGamma) = \big(A \cup (B \triangle \varGamma)\big) \setminus \big(A \cap (B \triangle \varGamma)\big) = \big(A \cup (B \triangle \varGamma)\big) \cap \big(A \cap (B \triangle \varGamma)\big)^c$.
Έχουμε $A \cup (B \triangle \varGamma) = A \cup \big((B \cup \varGamma) \setminus (B \cap \varGamma)\big) = A \cup \big((B \cup \varGamma) \cap (B \cap \varGamma)^c\big) = (A \cup B \cup \varGamma) \cap$
$\cap \big(A \cup (B \cap \varGamma)^c\big) = (A \cup B \cup \varGamma) \cap (A \cup B^c \cup \varGamma^c)$ και
$A \cap (B \triangle \varGamma) = A \cap \big((B \cup \varGamma) \setminus (B \cap \varGamma)\big) = A \cap \big((B \cup \varGamma) \cap (B \cap \varGamma)^c\big)$.
Άρα $\big(A \cap (B \triangle \varGamma)\big)^c = \Big(A \cap \big((B \cup \varGamma) \cap (B \cap \varGamma)^c\big)\Big)^c = A^c \cup \big((B \cup \varGamma) \cap (B \cap \varGamma)^c\big)^c =$
$= A^c \cup \big((B \cup \varGamma)^c \cup (B \cap \varGamma)\big) = A^c \cup \big((B^c \cap \varGamma^c) \cup (B \cap \varGamma)\big) = A^c \cup \big((B^c \cap \varGamma^c) \cup B\big) \cap \big((B^c \cap \varGamma^c) \cup \varGamma\big) =$
$= A^c \cup \Big(\big((B^c \cup B) \cap (\varGamma^c \cup B)\big) \cap \big((B^c \cup \varGamma) \cap (\varGamma^c \cup \varGamma)\big)\Big) = A^c \cup \Big(\big(X \cap (\varGamma^c \cup B)\big) \cap \big((B^c \cup \varGamma) \cap X\big)\Big) =$
$= A^c \cup \big((\varGamma^c \cup B) \cap (B^c \cup \varGamma)\big) = (A^c \cup \varGamma^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c \cup \varGamma)$.
Επομένως $A \triangle (B \triangle \varGamma) = (A \cup B \cup \varGamma) \cap (A \cup B^c \cup \varGamma^c) \cap (A^c \cup B \cup \varGamma^c) \cap (A^c \cup B^c \cup \varGamma)$.
Παρατηρούμε ότι η τελευταία παράσταση είναι συμμετρική ως προς A, B και $\varGamma$. Άρα και το αποτέλεσμα $\varGamma \triangle (A \triangle B)$ θα είναι το ίδιο, δηλαδή $A \triangle (B \triangle \varGamma) = \varGamma \triangle (A \triangle B)$ και λόγω της αντιμεταθετικότητας, το τελευταίο ισούται με $(A \triangle B) \triangle \varGamma$.



Σχήμα 42

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το $\varnothing$ αφού, για κάθε $A \in \mathcal{P}(X)$ έχουμε: $A \triangle \varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = = A \cup \varnothing = A$.
Το συμμετρικό κάθε $A \in \mathcal{P}(X)$ είναι ο εαυτός του.
Πράγματι, $A \triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.
5) Θεωρούμε τις n-στές ρίζες της μονάδας, όπου $n \geq 2$ θετικός ακέραιος. Με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό των μιγαδικών, το σύνολο των n-στών ριζών της μονάδας αποτελεί ομάδα. Ως σύνολο, οι n-στές ρίζες της μονάδας είναι οι $\{1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}\}$, όπου $z = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Το πλήθος των στοιχείων της, το οποίο ονομάζεται **τάξη της ομάδας** είναι n. Η ομάδα αυτή παράγεται από τον αριθμό z, υπό την έννοια ότι αποτελείται από δυνάμεις του z. Μια τέτοια ομάδα λέγεται **κυκλική τάξης n**. Το ουδέτερο στοιχείο είναι η μονάδα και ο αντίστροφος του z^k είναι ο $z^{-k} = \bar{z}^k$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.9. Έστω $(G, \star)$ μια ομάδα. Τότε ισχύουν τα εξής:
(i) (Νόμοι της διαγραφής) Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in G$ ισχύουν οι ακόλουθες ισοδυναμίες:

α) $\alpha \star \beta = \alpha \star \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$ και **β)** $\beta \star \alpha = \gamma \star \alpha \Leftrightarrow \beta = \gamma$.

(ii) Για κάθε $\alpha, \beta \in G$ οι εξισώσεις $\alpha \star x = \beta$ και $y \star \alpha = \beta$ έχουν μοναδική λύση.
Απόδειξη: Έστω e το ουδέτερο στοιχείο της G και $\hat{\alpha}$ το συμμετρικό του α ως προς την πράξη $\star$.
(i) Οι συνεπαγωγές $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha \star \beta = \alpha \star \gamma$ και $\beta = \gamma \Rightarrow \beta \star \alpha = \gamma \star \alpha$ είναι προφανείς.
Θα αποδείξουμε τις αντίστροφες συνεπαγωγές.
Έστω $\alpha \star \beta = \alpha \star \gamma$. Τότε $\hat{\alpha} \star (\alpha \star \beta) = \hat{\alpha} \star (\alpha \star \gamma) \underset{\star \text{ προσεταιριστική}}{\Leftrightarrow} (\hat{\alpha} \star \alpha) \star \beta = (\hat{\alpha} \star \alpha) \star \gamma \Leftrightarrow \Leftrightarrow e \star \beta = e \star \gamma \Leftrightarrow \beta = \gamma$. Ομοίως, $\beta \star \alpha = \gamma \star \alpha \Rightarrow (\beta \star \alpha) \star \hat{\alpha} = (\gamma \star \alpha) \star \hat{\alpha} \Leftrightarrow \beta \star (\alpha \star \hat{\alpha}) = = \gamma \star (\alpha \star \hat{\alpha}) \Leftrightarrow \beta \star e = \gamma \star e \Leftrightarrow \beta = \gamma$.
(ii) Από τους νόμους της διαγραφής έχουμε: $\alpha \star x = \beta \Leftrightarrow \hat{\alpha} \star (\alpha \star x) = \hat{\alpha} \star \beta \Leftrightarrow (\hat{\alpha} \star \alpha) \star x = \hat{\alpha} \star \beta \Leftrightarrow \Leftrightarrow e \star x = \hat{\alpha} \star \beta \Leftrightarrow x = \hat{\alpha} \star \beta$. Ομοίως, $y \star \alpha = \beta \Leftrightarrow (y \star \alpha) \star \hat{\alpha} = \beta \star \hat{\alpha} \Leftrightarrow y \star (\alpha \star \hat{\alpha}) = \beta \star \hat{\alpha} \Leftrightarrow y \star e = = \beta \star \hat{\alpha} \Leftrightarrow y = \beta \star \hat{\alpha}$. ■

Αν η ομάδα G είναι αβελιανή, τότε:
1) Αν η πράξη συμβολίζεται με $+$ και φυσικά θα λέγεται πρόσθεση, τότε ορίζεται μια νέα πράξη, η οποία λέγεται **αφαίρεση**, ως εξής: $x - y = x + (-y)$.
2) Αν η πράξη συμβολίζεται με $\cdot$ και φυσικά θα λέγεται πολλαπλασιασμός, τότε ορίζεται μια νέα πράξη, η οποία λέγεται **διαίρεση**, ως εξής: $x : y = \dfrac{x}{y} = xy^{-1}$. Η αφαίρεση και η διαίρεση είναι λοιπόν **παράγωγες** πράξεις, οι οποίες ορίζονται σε μια αβελιανή ομάδα μέσω της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.10. Έστω A ένα μη κενό σύνολο εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\star$ και $\circ$. Η πράξη $\circ$ λέγεται **αριστερά επιμεριστική** ως προς την πράξη $\star$ αν, για κάθε $x, y, z \in A$ ισχύει η σχέση:

$$x \circ (y \star z) = (x \circ y) \star (x \circ z).$$

Ανάλογα, η πράξη $\circ$ λέγεται **δεξιά επιμεριστική** ως προς την πράξη $\star$ αν, για κάθε $x, y, z \in A$ ισχύει η σχέση:

$$(y \star z) \circ x = (y \circ x) \star (z \circ x).$$

Αν η $\circ$ είναι και δεξιά και αριστερά επιμεριστική ως προς την $\star$, τότε η $\circ$ λέγεται απλώς **επιμεριστική** ως προς την $\star$.

Παραδείγματα: **1)** Ο συνήθης πολλαπλασιασμός αριθμών (φυσικών, ακεραίων, ρητών, πραγματικών, μιγαδικών) είναι επιμεριστικός ως προς την αντίστοιχη πρόσθεση.
2) Στο δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$ ενός συνόλου X η ένωση είναι επιμεριστική ως προς την τομή, αλλά

και η τομή είναι επιμεριστική ως προς την ένωση.
3) Στο σύνολο $\mathbb{F}$ των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, όπου $\mathbb{F}$ μπορεί να είναι κάποιο από τα γνωστά αριθμοσύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.11. Θεωρούμε ένα $\big($μη κενό$\big)$ σύνολο R εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+$ και $\cdot$. Την πράξη $+$ θα τη λέμε ως συνήθως **πρόσθεση** και την πράξη $\cdot$ **πολλαπλασιασμό**. Υποθέτουμε τα εξής:
α) Το ζεύγος $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα. Δηλαδή:
(i) $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in R$.
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in R$.
(iii) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο, το οποίο ως συνήθως συμβολίζεται με 0 ή για έμφαση με 0_R, τέτοιο ώστε $x + 0 = x$, για κάθε $x \in R$.
$\big($Η σχέση $0 + x = x$ είναι περιττή, αφού η ομάδα $(R, +)$ είναι αβελιανή$\big)$.
(iv) Για κάθε $x \in R$ υπάρχει $'\big($μοναδικό$\big)$ στοιχείο $-x$ τέτοιο, ώστε $x + (-x) = 0$.
$\big($Και εδώ, για τον ίδιο λόγο, η σχέση $(-x) + x = 0$ είναι περιττή$\big)$.
β) Το ζεύγος $(R, \cdot)$ είναι ημιομάδα, δηλαδή ο πολλαπλασιασμός είναι προσεταιριστικός, δηλαδή
(v) $\qquad x(yz) = (xy)z$, για κάθε $x, y, z \in R$.
γ) Ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση, δηλαδή
(vi) $\qquad x(y + z) = xy + xz \qquad$ και $\qquad (x + y)z = xz + yz$, για κάθε $x, y, z \in R$.
Τότε το σύνολο R ή ακριβέστερα η τριάδα $(R, +, \cdot)$ λέγεται **δακτύλιος**.
Αν ο πολλαπλασιασμός είναι μεταθετικός, ήτοι $xy = yx$, για κάθε $x, y \in R$, τότε ο δακτύλιος R λέγεται **μεταθετικός δακτύλιος**.
Αν ο πολλαπλασιασμός έχει ουδέτερο στοιχείο, το οποίο συμβολίζεται ως συνήθως με 1 ή 1_R, τότε ο δακτύλιος λέγεται **μοναδιαίος** ή **δακτύλιος με μονάδα**.
Τέλος, αν ο δακτύλιος είναι και μεταθετικός, αλλά και μοναδιαίος, τότε λέγεται **μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος** ή **μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα**.

Παρατηρούμε ότι το μονοσύνολο $\{0\}$ πληροί τα αξιώματα ενός μεταθετικού δακτυλίου με μονάδα. **Εδώ το 0 και το 1 ταυτίζονται!** Ο δακτύλιος αυτός λέγεται **τετριμμένος δακτύλιος**. Συνήθως ασχολούμαστε με μη τετριμμένους δακτυλίους.

Παραδείγματα: **1)** Οι ακέραιοι, οι ρητοί και οι πραγματικοί αποτελούν $\big($με τις προφανείς πράξεις$\big)$ μοναδιαίους μεταθετικούς δακτυλίους.
2) Το σύνολο $\mathbb{F}$ των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων, όπου $\mathbb{F}$ μπορεί να είναι κάποιο από τα γνωστά αριθμοσύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ με τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων είναι μοναδιαίος δακτύλιος. **Δεν είναι όμως μεταθετικός**. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ έχουμε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ αλλά } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Αν A είναι ένα μη κενό σύνολο και $\mathbb{R}^A$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{R}$, τότε το $\mathbb{R}^A$ με πράξεις τις πράξεις $+$ και $\cdot$, όπου $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ και $(fg)(x) = f(x)g(x)$, για κάθε $x \in A$ είναι μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος. Το μηδενικό στοιχείο είναι η συνάρτηση $\mathbf{0} : A \to \mathbb{R}$ με $\mathbf{0}(x) = 0$, για κάθε $x \in A$ και μονάδα η συνάρτηση $\mathbf{1} : A \to \mathbb{R}$ με $\mathbf{1}(x) = 1$, για κάθε $x \in A$. Χρησιμοποιήσαμε **bold** στοιχεία προς αποφυγήν συγχύσεως. Μάλλον δεν ήταν αναγκαίο.

4) Οι δακτύλιοι δεν είναι κατ' ανάγκην άπειρα σύνολα. Για παράδειγμα στο σύνολο $\{0,1\}$ ορίζουμε τις πράξεις $\oplus$ (πρόσθεση) και $\odot$ (πολλαπλασιασμός), όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Το σύνολο $\{0,1\}$, το οποίο ας συμβολίσουμε με $\mathbb{Z}_2$, αποτελεί ως προς τις παραπάνω πράξεις έναν μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα. Βλέπετε, αποφύγαμε τη χρήση του συμβόλου $+$ και του συμβόλου $\cdot$ για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό αντίστοιχα, επειδή κάποιος μπορεί να μπερδευτεί και να θεωρήσει ότι η σχέση $1+1=0$ ισχύει στους ακεραίους αριθμούς! Θα μπορούσαμε να κρατήσουμε για την πρόσθεση το σύμβολο $+$ και να γράφαμε $\{\langle 0\rangle_2, \langle 1\rangle_2\}$ αντί $\{0,1\}$. Τα σύμβολα $\langle 0\rangle_2$ και $\langle 1\rangle_2$ εκφράζουν συγκεκριμένες έννοιες: Το $\langle 0\rangle_2$ εκφράζει την κλάση των **αρτίων ακεραίων** και το $\langle 1\rangle_2$ την κλάση των **περιττών**. Έτσι, οι πίνακες

$+$	$\langle 0\rangle_2$	$\langle 1\rangle_2$
$\langle 0\rangle_2$	$\langle 0\rangle_2$	$\langle 1\rangle_2$
$\langle 1\rangle_2$	$\langle 1\rangle_2$	$\langle 0\rangle_2$

$\cdot$	$\langle 0\rangle_2$	$\langle 1\rangle_2$
$\langle 0\rangle_2$	$\langle 0\rangle_2$	$\langle 0\rangle_2$
$\langle 1\rangle_2$	$\langle 0\rangle_2$	$\langle 1\rangle_2$

εκφράζουν τους κανόνες: «άρτιος + άρτιος = άρτιος», «άρτιος + περιττός = περιττός», «περιττός + περιττός = άρτιος» (1+1=0), «άρτιος · άρτιος = άρτιος», «άρτιος · περιττός = άρτιος» και «περιττός · περιττός = περιττός».

5) Έστω X ένα μη κενό σύνολο. $\big($Αυτό θα θεωρούμε ως βασικό σύνολο). Τότε το $\mathcal{P}(X)$ περιέχει προφανώς δύο τουλάχιστον στοιχεία: το X και το $\varnothing$. Γνωρίζουμε ότι η $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ είναι αβελιανή ομάδα. $\big($βλέπε παράδειγμα **4)** μετά τον ορισμό **Β′.8**$\big)$.

Η $\triangle$ θα είναι η «πρόσθεσή» μας στο $\mathcal{P}(X)$. Γνωρίζουμε ότι είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη στο $\mathcal{P}(X)$. Το μηδενικό στοιχείο στο $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ είναι το $\varnothing$ και το αντίθετο ενός $A \in \mathcal{P}(X)$ είναι το ίδιο το A. Πράγματι, $A\triangle\varnothing = (A \setminus \varnothing) \cup (\varnothing \setminus A) = A \cup \varnothing = A$ και $A\triangle A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$. Άρα το ζεύγος $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Η τομή $\cap$ θα είναι ο «πολλαπλασιασμός» μας. Γνωρίζουμε ότι η τομή είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική πράξη στο $\mathcal{P}(X)$. Επίσης $A \cap X = A$, για κάθε $A \subseteq X$. Άρα το X είναι το μοναδιαίο στοιχείο της τομής.

Θα αποδείξουμε ότι η τομή είναι επιμεριστική ως προς τη συμμετρική διαφορά $\triangle$. Έστω λοιπόν $A, B, \Gamma \subseteq X$. Έχουμε $B\triangle\Gamma = (B \setminus \Gamma) \cup (B \setminus \Gamma) = (B \cap \Gamma^c) \cup (\Gamma \cap B^c)$,
όπου $Y^c = X \setminus Y$, το συμπλήρωμα του τυχόντος υποσυνόλου Y ως προς X.

Επομένως $A \cap (B\triangle\Gamma) = A \cap \big((B \cap \Gamma^c) \cup (\Gamma \cap B^c)\big) = (A \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = \big((A \cap B) \setminus \Gamma\big) \cup \big((A \cap \Gamma) \setminus B\big)$.

Επίσης, $(A \cap B)\triangle(A \cap \Gamma) = \big((A \cap B) \setminus (A \cap \Gamma)\big) \cup \big((A \cap \Gamma) \setminus (A \cap B)\big)$

Παρατηρούμε ότι: $(A \cap B) \setminus (A \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap (A \cap \Gamma)^c = (A \cap B) \cap (A^c \cup \Gamma^c) = (A \cap B \cap A^c) \cup (A \cap B \cap \Gamma^c) = \big((A \cap A^c) \cap B\big) \cup (A \cap B \cap \Gamma^c) = (\varnothing \cap B) \cup (A \cap B \cap \Gamma^c) = \varnothing \cup (A \cap B \cap \Gamma^c) = A \cap B \cap \Gamma^c$.

Παρόμοια παίρνουμε: $(A \cap \Gamma) \setminus (A \cap B) = (A \cap \Gamma) \cap (A \cap B)^c = (A \cap \Gamma) \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap \Gamma \cap A^c) \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = \big((A \cap A^c) \cap \Gamma\big) \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = (\varnothing \cap \Gamma) \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = \varnothing \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = A \cap \Gamma \cap B^c$.

Επομένως $(A \cap B)\triangle(A \cap \Gamma) = (A \cap B \cap \Gamma^c) \cup (A \cap \Gamma \cap B^c) = \big((A \cap B) \setminus \Gamma\big) \cup \big((A \cap \Gamma) \setminus B\big) = A \cap (B\triangle\Gamma)$.

Η τριάδα λοιπόν $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ είναι μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος.

Αν υποθέσουμε ότι το X είναι μονοσύνολο, ήτοι $X = \{x\}$, τότε $\mathcal{P}(X) = \{\varnothing, X\}$. Οι πίνακες της συμμετρικής διαφοράς $\triangle$ και της τομής $\cap$ είναι οι ακόλουθοι:

$\triangle$	$\varnothing$	X
$\varnothing$	$\varnothing$	X
X	X	$\varnothing$

$\cap$	$\varnothing$	X
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
X	$\varnothing$	X

Προσέξτε την ομοιότητα με τους πίνακες των πράξεων του προηγούμενου παραδείγματος! Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι δακτύλιοι $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ και $(\mathcal{P}(\mathrm{X}), \triangle, \cap)$ είναι **ισόμορφοι**.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.12. Σε κάθε δακτύλιο $(R, +, \cdot)$ $\big($μεταθετικό ή μη$\big)$ ισχύουν τα ακόλουθα:
(i) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$, για κάθε $\alpha \in \mathrm{R}$.
(ii) $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.
Απόδειξη: (i) $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$, δηλαδή $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 + (-(\alpha \cdot 0)) = = (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) + (-(\alpha \cdot 0)) \Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 + (-(\alpha \cdot 0))) \Leftrightarrow 0 = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha \cdot 0$.
Ανάλογα έχουμε: $0 \cdot \alpha = (0+0) \cdot \alpha = 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha \Rightarrow 0 \cdot \alpha - 0 \cdot \alpha = (0 \cdot \alpha + 0 \cdot \alpha) - 0 \cdot \alpha \Leftrightarrow 0 = = 0 \cdot \alpha + (0 \cdot \alpha - 0 \cdot \alpha) \Leftrightarrow 0 = 0 \cdot \alpha + 0 = 0 \cdot \alpha$.
(ii) $(-\alpha)\beta + \alpha\beta = (-\alpha + \alpha)\beta = 0 \cdot \beta = 0$. Επομένως $(-\alpha)\beta = -\alpha\beta$. Ανάλογα, $\alpha(-\beta) + \alpha\beta = = \alpha(-\beta + \beta) = \alpha \cdot 0 = 0$. Άρα $\alpha(-\beta) = -\alpha\beta$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.13. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας μη τετριμμένος μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος. Ο R λέγεται **ακέραια περιοχή** αν από κάθε σχέση της μορφής $\alpha\beta = 0$, όπου $\alpha, \beta \in R$, προκύπτει ότι $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

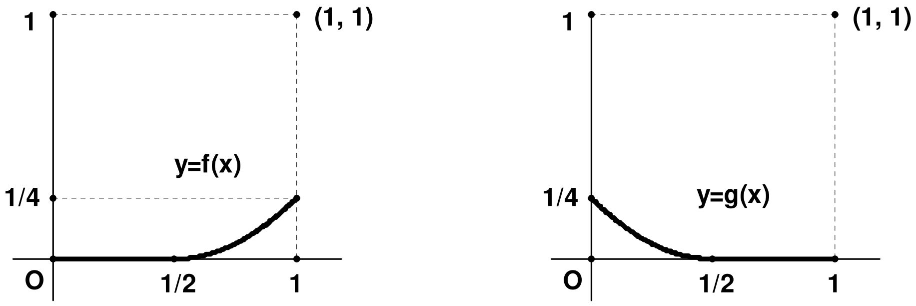
Παραδείγματα: 1) Οι δακτύλιοι των ακεραίων, ρητών, πραγματικών είναι προφανώς ακέραιες περιοχές.

2) Ο δακτύλιος $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ που ορίστηκε παραπάνω είναι ακέραια περιοχή, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει με ευκολία, ελέγχοντας τον πίνακα του πολλαπλασιασμού. Το ίδιο προφανώς ισχύει και για τον δακτύλιο $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, όταν το X είναι μονοσύνολο. Αν όμως το X περιέχει δύο τουλάχιστον στοιχεία, τότε ο $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$ **δεν είναι ακέραια περιοχή**. Πράγματι, αν $\alpha, \beta \in X$ με $\alpha \neq \beta$, τότε $\{\alpha\} \cap \{\beta\} = \varnothing$, ενώ $\{\alpha\} \neq \varnothing$ και $\{\beta\} \neq \varnothing$.

3) Έστω $C([0,1])$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Το $C([0,1])$ είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος με τις προφανείς πράξεις: $f + g : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $fg : [0,1] \to \mathbb{R}$, όπου $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ και $(fg)(x) = f(x)g(x)$, για κάθε $x \in [0,1]$. Μηδενικό στοιχείο είναι η συνάρτηση $\mathbf{0} : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\mathbf{0}(x) = 0$, για κάθε $x \in [0,1]$ και μοναδιαίο στοιχείο η συνάρτηση $\mathbf{1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\mathbf{1}(x) = 1$, για κάθε $x \in [0,1]$. Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f, g \in C([0,1])$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2, & \text{αν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \begin{cases} \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2, & \text{αν } 0 \leq x < \dfrac{1}{2} \\ 0, & \text{αν } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Μάλιστα, οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες. Προφανώς $f, g \neq \mathbf{0}$, αλλά $fg = \mathbf{0}$. Επομένως το $C([0,1])$ δεν είναι ακέραια περιοχή. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι οι ακόλουθες:



Σχήμα 43

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.14. Έστω $(R, +, \cdot)$ ένας μη τετριμμένος μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος. Έστω $R^* = R \setminus \{0\}$ το σύνολο των μη μηδενικών στοιχείων του. Προφανώς $1 \in R^*$. Αν το R^* εφοδιασμένο με την πράξη $\cdot$ του πολλαπλασιασμού είναι (αβελιανή) ομάδα, τότε ο δακτύλιος $(R, +, \cdot)$ λέγεται **σώμα**.

Με άλλα λόγια, ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος είναι σώμα αν και μόνον αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο του έχει αντίστροφο. Το αντίστροφο ενός $\alpha \in R^*$ συμβολίζεται ως συνήθως με α^{-1}. Αναφέρουμε αναλυτικά τις ιδιότητες του σώματος:

(i) $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in R$.
(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, για κάθε $x, y, z \in R$.
(iii) Υπάρχει (μοναδικό) προσθετικό ουδέτερο στοιχείο, το οποίο ως συνήθως συμβολίζεται με 0, τέτοιο ώστε $x + 0 = x$, για κάθε $x \in R$.
(iv) Για κάθε $x \in R$ υπάρχει (μοναδικό) στοιχείο $-x$ τέτοιο, ώστε $x + (-x) = 0$.
(v) $x(yz) = (xy)z$, για κάθε $x, y, z \in R$.
(vi) $xy = yx$, για κάθε $x, y \in R$.
(vii) $x(y + z) = xy + xz$, για κάθε $x, y, z \in R$.
(viii) Υπάρχει (μοναδικό) πολλαπλασιαστικό ουδέτερο στοιχείο, το οποίο ως συνήθως συμβολίζεται με 1, τέτοιο ώστε $x \cdot 1 = x$, για κάθε $x \in R$.
(ix) Για κάθε $x \in R^* = R \setminus \{0\}$ υπάρχει (μοναδικό) στοιχείο x^{-1} τέτοιο, ώστε $x \cdot x^{-1} = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.15. Κάθε σώμα είναι ακέραια περιοχή. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.
Απόδειξη: Έστω $(R, +, \cdot)$ σώμα και $\alpha, \beta \in R$, τέτοια ώστε $\alpha\beta = 0$. Αν $\alpha \neq 0$, τότε υπάρχει το αντίστροφο α^{-1} του α με $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$. Επομένως $\alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha\beta) = \alpha^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)\beta = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$. Παρόμοια προκύπτει ότι αν $\beta \neq 0$, τότε $\alpha = 0$.
Μια ακέραια περιοχή δεν είναι όμως απαραίτητα σώμα. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων δεν είναι σώμα γιατί κάθε ακέραιος διάφορος του ± 1 δεν αντιστρέφεται στο $\mathbb{Z}$. ■

Παραδείγματα: **1)** Τα σύνολα των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών με τις συνηθισμένες πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού είναι σώματα. Τίθεται το ερώτημα: Υπάρχει κάποιο σώμα ανάμεσα στους ρητούς και τους πραγματικούς; Ή ανάμεσα στους πραγματικούς και τους μιγαδικούς; Η απάντηση είναι καταφατική, όπως προκύπτει από το επόμενο παράδειγμα.
2) Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{\alpha + \beta\sqrt{2} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{R}$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0$, τότε $\alpha = \beta = 0$.

Πράγματι, έστω $\alpha + \beta\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \beta\sqrt{2} = -\alpha$. Αν $\beta \neq 0$, τότε $\sqrt{2} = -\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, άτοπο. Άρα $\beta = 0$ και συνεπώς και $\alpha = 0$. Επίσης, αν $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Q}$, τότε

$$(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2}) \pm (\alpha_2 + \beta_2\sqrt{2}) = (\alpha_1 \pm \alpha_2) + (\beta_1 \pm \beta_2)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \text{ και}$$
$$(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{2})(\alpha_2 + \beta_2\sqrt{2}) = (\alpha_1\alpha_2 + 2\beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}].$$

Το $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ και το $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ είναι τα ουδέτερα στοιχεία της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντίστοιχα.
Άρα το $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ είναι ένας μοναδιαίος μεταθετικός δακτύλιος (και προφανώς ακέραια περιοχή, αφού $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subsetneq \mathbb{R}$).
Αν τώρα $\alpha + \beta\sqrt{2} \neq 0$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, δηλαδή κάποιο από τα α, β δεν είναι μηδέν, τότε και ο αριθμός $\alpha - \beta\sqrt{2}$ δεν είναι μηδέν. Επομένως $(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2}) = \alpha^2 - 2\beta^2 \neq 0$.
Προφανώς $\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} - \dfrac{\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Αλλά $(\alpha + \beta\sqrt{2})\left(\dfrac{\alpha}{\alpha^2 - 2\beta^2} - \dfrac{\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}\sqrt{2}\right) =$
$= (\alpha+\beta\sqrt{2})\dfrac{\alpha - \beta\sqrt{2}}{(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha - \beta\sqrt{2})} = 1$, δηλαδή $(\alpha+\beta\sqrt{2})^{-1} = \dfrac{\alpha}{\alpha - 2\beta^2} - \dfrac{\beta}{\alpha^2 - 2\beta^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
Γενικά, υπάρχουν άπειρα σώματα μεταξύ του $\mathbb{Q}$ και του $\mathbb{R}$.
Όπως προκύπτει από τη θεωρία αριθμών, αν n είναι θετικός ακέραιος, ο οποίος δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$. Με παρόμοιες μεθόδους προκύπτει ότι το σύνολο $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{\alpha + \beta\sqrt{n} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ είναι σώμα που περιέχεται γνήσια στο $\mathbb{R}$ και περιέχει γνήσια το $\mathbb{Q}$. Αλλά και μεταξύ του $\mathbb{R}$ και του $\mathbb{C}$ υπάρχουν ενδιάμεσα σώματα.
Π.χ. το $\mathbb{R}[\mathbf{i}\sqrt{3}] = \{\alpha + \beta\mathbf{i}\sqrt{3} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

3) Εύκολα μπορεί να ελέγξει κανείς ότι το $\mathbb{Z}_2 = \{\langle 0\rangle_2, \langle 1\rangle_2\}$ με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ που περιγράψαμε στους αντίστοιχους πίνακες, είναι σώμα. Γνωρίζουμε ήδη ότι είναι ακέραια περιοχή. Αυτό δεν είναι τυχαίο, όπως αποδεικνύεται στην επόμενη πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.16. Κάθε πεπερασμένη ακέραια περιοχή R είναι σώμα.
Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $R = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, όπου n θετικός ακέραιος. Έστω $\alpha = \alpha_i \in R$, για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $\alpha \neq 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $T_\alpha : R \to R$ με $T_\alpha(\alpha_j) = \alpha\alpha_j$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$.
Παρατηρούμε ότι αν $T_\alpha(\alpha_i) = T_\alpha(\alpha_k)$, τότε $\alpha\alpha_j = \alpha\alpha_k \Leftrightarrow \alpha(\alpha_j - \alpha_k) = 0$. Επειδή ο R είναι ακέραια περιοχή και $\alpha \neq 0$, θα πρέπει $\alpha_j - \alpha_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = \alpha_k$, ήτοι $j = k$. Επομένως η απεικόνιση $T_\alpha : R \to R$ είναι 1-1 και επειδή το R είναι πεπερασμένο, θα είναι και επί. Συνεπώς, αν $1 = \alpha_t$, για κάποιο $t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, θα υπάρχει κάποιο α_j, τέτοιο ώστε $T_\alpha(\alpha_j) = \alpha_t = 1$, δηλαδή $\alpha\alpha_j = 1$. Επομένως $\alpha_j = \alpha^{-1}$.
Δείξαμε λοιπόν ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο της R έχει αντίστροφο. Συνεπώς η ακέραια περιοχή R είναι σώμα. ■