ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3 Φεβρουαρίου 2021: Χρονική εξέλιξη σπιν παρουσία άλλου σπιν

Θεωρείστε ένα σύστημα από δύο σπιν $\frac{1}{2}$ που αλληλεπιδρούν μέσω της Χαμιλτονιανής $\hat{H} = -J\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2)$.

(i) Γράψτε τον πίνακα πυκνότητας του συστήματος την χρονική στιγμή $t = 0$. Κατόπιν υπολογίστε τον ανηγμένο πίνακα πυκνότητας του ενός σπιν για $t = 0$.

(ii) Γράψτε την Χαμιλτονιανή του συστήματος στη βάση συνολικού σπιν και της προβολής του στην κατεύθυνση z. Μετά υπολογίστε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t}$ χρησιμοποιώντας την φασματική αναπαράσταση μοναδιακού τελεστή $\hat{U} = e^{i\hat{A}} = \sum_{\ell} e^{i\lambda_{A,\ell}} |\ell\rangle\langle\ell|$ όπου $\hat{A}$ ερμιτιανός με πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_{A,\ell}$ και $|\ell\rangle$ οι αντίστοιχες ιδιοκαταστάσεις του.

(iii) Γράψτε τον τελεστή χρονικής εξέλιξης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα στην αρχική βάση $|a\rangle_1 \otimes |b\rangle_2$ με $a = 0, 1$ και $b = 0, 1$. Στη συνέχεια προσδιορίστε τους τελεστές Kraus που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη του ανηγμένου πίνακα πυκνότητας του ενός σπιν.

12 Οκτωβρίου 2020: Εφαρμογή σε σύστημα από σπινς

Δίνεται ο τελεστής της Χαμιλτονιανής:

$$\hat{H} = g\left(\hat{\sigma}_+^{(S)} \otimes \hat{\sigma}_-^{(E)} + \hat{\sigma}_-^{(S)} \otimes \hat{\sigma}_+^{(E)}\right)$$

όπου g πραγματική σταθερά και $\hat{\sigma}_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$ με $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ τους πίνακες του Pauli. Η ανωτέρω Χαμιλτονιανή περιγράφει ένα διμερές σύστημα που αποτελείται από τα υποσυστήματα S και E. Μπορεί να δειχθεί ότι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης του συστήματος είναι:

$$\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(gt) & -isin(gt) & 0 \\ 0 & -isin(gt) & cos(gt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Να υπολογιστούν:

(i) Ο πίνακας πυκνότητας του διμερούς $\hat{\rho}_{SE}(t)$ την χρονική στιγμή t θεωρώντας ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει την μορφή:

$$\hat{\rho}_{SE}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_E(0)$$

με:

$$\hat{\rho}_S(0) = \begin{pmatrix} p & q \\ q^* & 1-p \end{pmatrix} \quad ; \quad \hat{\rho}_E(0) = |0\rangle_E\ {}_E\langle 0|$$

όπου $p \geq 0$ και $|0\rangle_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Ο ανηγμένος πίνακας πυκνότητας:

$$\hat{\rho}_{R,S}(t) = \mathrm{Tr}_E \hat{\rho}_{SE}(t)$$

(iii) Οι χρόνοι για τους οποίους η $\hat{\rho}_{R,S}$ περιγράφει καθαρή κατάσταση. Αν θεωρήσουμε ότι μελετάμε τη χρονική εξέλιξη του S σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$ πόσο πρέπει να είναι το T για να έχουμε N χρονικές στιγμές στις οποίες το S είναι σε καθαρή κατάσταση;

9 Ιουλίου 2020: Μη μοναδιακή χρονική εξέλιξη

Θεωρείστε σύστημα Σ τριών καταστάσεων $|0\rangle$, $|1\rangle$ και $|2\rangle$ σε περιβάλλον Π δύο καταστάσεων $|-\rangle$, $|+\rangle$ που εξελίσσεται χρονικά μέσω του τελεστή $\hat{U}$ με την εξής δράση:

$$\hat{U}|0\rangle \otimes |-\rangle = |0\rangle \otimes |-\rangle$$

$$\hat{U}|1\rangle \otimes |-\rangle = \sqrt{p}\,|0\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{1-p}\,|1\rangle \otimes |-\rangle$$

$$\hat{U}|2\rangle \otimes |-\rangle = \sqrt{p}\,|1\rangle \otimes |+\rangle + \sqrt{1-p}\,|2\rangle \otimes |-\rangle$$

Αρχικά ($t = 0$) το σύστημα Σ βρίσκεται στην κατάσταση:

$$|\Psi_\Sigma(0)\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\,|2\rangle$$

ενώ το περιβάλλον Π βρίσκεται στην κατάσταση $|-\rangle$.

1. Προσδιορείστε τον πίνακα πυκνότητας που περιγράφει το σύστημα Σ καθώς και τον πίνακα πυκνότητας του σύνθετου συστήματος (περιβάλλον Π και σύστημα Σ) την χρονική στιγμή $t = 0$.

2. Προσδιορείστε τους τελεστές Kraus $\mathbf{K_i}$ $(i = 0, .., M-1)$ που καθορίζουν την χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας του συστήματος Σ.

3. Δείξτε ότι ικανοποιείται η σχέση πληρότητας:
$$\sum_{i=0}^{M-1} \mathbf{K_i}^{\dagger} \mathbf{K_i} = \mathbf{I}$$

4. Ο πίνακας πυκνότητας μετά από n-οστή εφαρμογή της απεικόνισης Kraus παίρνει την μορφή:
$$\rho_\Sigma(n) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n}{2}(1-p)^{n-1}p - \frac{(1-p)^n}{2} & 0 & \frac{(1-p)^{n/2}}{2} \\ 0 & \frac{n}{2}(1-p)^{n-1}p & 0 \\ \frac{(1-p)^{n/2}}{2} & 0 & \frac{(1-p)^n}{2} \end{pmatrix}$$
Μελετείστε την συμπεριφορά του $\rho_\Sigma(n)$ για $n \to \infty$ προσδιορίζοντας αν το σύστημα Σ σε άπειρο χρόνο πηγαίνει σε μικτή ή καθαρή κατάσταση.

5. Βρείτε την εξίσωση Lindblad που περιγράφει την χρονική εξέλιξη του $\rho_\Sigma(t)$ για συνεχείς τιμές του χρόνου t. Για τον σκοπό αυτό θεωρείστε ότι $p = \Gamma \Delta t$ και μελετείστε την συμπεριφορά των τελεστών Kraus για $\Delta t \to 0$.

4 Οκτωβρίου 2019: Χρονική εξέλιξη συζευγμένων σπινς

Σύστημα δύο ηλεκτρονίων A, B βρίσκεται αρχικά στην κατάσταση
$$|\Psi_{A,B}\rangle(t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_A, +_B\rangle - |+_A, -_B\rangle\right) \tag{1}$$
όπου $+, -$ αναφέρονται στο πρόσημο της τρίτης συνιστώσας του σπιν του κάθε σωματιδίου.

1. Να υπολογίσετε τις ανηγμένες μήτρες πυκνότητας $\rho_A(t=0)$ και $\rho_B(t=0)$ και να δείξετε ότι αυτές αντιστοιχούν σε καθαρές καταστάσεις.

2. Να υπολογίσετε την χρονικά εξελιγμένη κατάσταση $|\Psi_{A,B}\rangle(t)$ υπό τον Χαμιλτονιανό τελεστή αλληλεπίδρασης $H = \frac{g}{\hbar^2}\vec{S}_A\vec{S}_B$.

3. Να δείξετε ότι η χρονικά εξελιγμένη ανηγμένη μήτρα πυκνότητας του B αντιστοιχεί εν γένει σε μικτή κατάσταση.

4. Να υπολογίσετε μέσω των τελεστών Kraus την ανηγμένη μήτρα πυκνότητας $\rho_A(t)$. Υπάρχουν χρονικές στιγμές που αντιστοιχεί σε καθαρή κατάσταση και αν ναι ποιές είναι αυτές;

4 Οκτωβρίου 2019: Κανάλι αποπόλωσης

Έστω σύνθετο σύστημα που αποτελείται από τα υποσυστήματα A και E. Το υποσύστημα E μπορεί να βρεθεί στις καταστάσεις: $|0_E\rangle$, $|1_E$, $|2_E\rangle$ και $|3_E\rangle$ που αποτελούν ορθοκανονική βάση. Αρχικά το σύνθετο σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\phi_a\rangle \bigotimes |0_E\rangle$. Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης του συστήματος U_{AE} δρα σε αυτή τη κατάσταση με τον εξής τρόπο:

- Με πιθανότητα $1-p$ αφήνει την κατάσταση αναλλοίωτη.

- Με πιθανότητα $\frac{p}{3}$ μετατρέπει την κατάσταση $|0_E\rangle$ στην κατάσταση $|i_E\rangle$ και ταυτόχρονα την κατάσταση $|\phi_a\rangle$ στην κατάσταση $\sigma_i|\phi_a\rangle$ όπου $i=1,2,3$, ενώ σ_i είναι οι πίνακες Pauli.

Να βρεθούν οι τελεστές Kraus που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του A και να δοθεί η δράση τους στον ανηγμένο πίνακα πυκνότητας ρ_A. Κατόπιν γράψτε τον πίνακα ρ_A τη χρονική στιγμή $t=0$ στη μορφή $\rho_A(0) = \frac{1}{2}\left(1+\vec{\sigma}\cdot\vec{b}\right)$ προσδιορίζοντας το $\vec{b}$. Επίσης γράψτε τον ρ_A μετά την δράση της απεικόνισης Kraus στην μορφή $\rho_A(\Delta t) = \frac{1}{2}\left(1+\vec{\sigma}\cdot\vec{d}\right)$ προσδιορίζοντας το $\vec{d}$. Συγκρίνατε το $\vec{b}$ με το $\vec{d}$. Τι παρατηρείτε;

9 Ιουλίου 2019: Κανάλι απόσβεσης πλάτους

Δίνονται οι τελεστές Kraus:

$$\mathbf{M}_0 = \sqrt{\gamma}|0\rangle\langle 1| \quad ; \quad \mathbf{M}_1 = |0\rangle\langle 0| + \sqrt{1-\gamma}|1\rangle\langle 1| \quad , \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

1. Γράψτε τους σε μορφή πίνακα και ελέγξτε αν αποτελούν πλήρες σύνολο.

2. Οι τελεστές $\mathbf{M}_0$ και $\mathbf{M}_1$ ορίζουν απεικόνιση Kraus $\mathcal{N}$ που καλείται κανάλι απόσβεσης πλάτους. Θεωρείστε τον πίνακα πυκνότητας ενός συστήματος δύο καταστάσεων της μορφής:

$$\begin{pmatrix} 1-p & \eta \\ \eta^* & p \end{pmatrix}$$

με $0 \leq p \leq 1$ και $\eta \in C$. Βρείτε τη δράση της απεικόνισης Kraus $\mathcal{N}$ στον πίνακα αυτόν.

3. Έστω $\mathcal{N}_1$ η απεικόνιση Kraus, με τους ανωτέρω τελεστές, που αντιστοιχεί στην επιλογή $\gamma = \gamma_1$ και $\mathcal{N}_2$ η αντίστοιχη απεικόνιση με $\gamma = \gamma_2$. Δείξτε ότι η σύνθεση $\mathcal{N}_1 \circ \mathcal{N}_2$ είναι κανάλι απόσβεσης πλάτους με $\gamma = (1-\gamma_1)(1-\gamma_2)$.

9 Ιουλίου 2019: Οπτική άντληση

Οπτική άντληση είναι η διαδικασία στην οποία 2 καταστάσεις $|0\rangle$ και $|1\rangle$ είναι συζευγμένες με μία διεγερμένη κατάσταση $|2\rangle$ μέσω ενός λέηζερ που έχει συχνότητα προσαρμοσμένη στην ενεργειακή διαφορά των καταστάσεων $|1\rangle$ και $|2\rangle$. Η κατάσταση $|2\rangle$ διασπάται αυθόρμητα σε γραμμικό συνδυασμό των καταστάσεων $|0\rangle$ και $|1\rangle$. Για κάθε a, b η διαδικασία περιγράφεται από έναν τελεστή χρονικής εξέλιξης με την ακόλουθη δράση:

$$\hat{U}(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |V\rangle = (a|0\rangle + b|2\rangle) \otimes |V\rangle$$

$$\hat{U}(a|0\rangle + b|2\rangle) \otimes |V\rangle = a|0\rangle \otimes |V\rangle + bA_0|0\rangle \otimes |\phi_0\rangle + bA_1|1\rangle \otimes |\phi_1\rangle$$

όπου $|V\rangle$, $|\phi_0\rangle$ και $|\phi_1\rangle$ είναι οι καταστάσεις του κενού και των φωτονίων που εκπέμπονται από τις μεταβάσεις $2 \to 0$ και $2 \to 1$ αντίστοιχα. Αυτές είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και αποτελούν το περιβάλλον του μελετούμενου συστήματος. Τα A_0 και A_1 αποτελούν πλάτη πιθανότητας για την διάσπαση της $|2\rangle$ σε $|0\rangle$ και $|1\rangle$ αντίστοιχα. Βρείτε τους τελεστές Kraus της διαδικασίας και κατόπιν μελετείστε τι θα συμβεί στο σύστημα αν η διαδικασία επαναληφθεί πολλές φορές.

27 Ιουνίου 2018: Δισταθμικό άτομο σε περιβάλλον

Θεωρείστε άτομο A με 2 ενεργειακές στάθμες $|0_A\rangle$ (θεμελιώδης), $|1_A\rangle$ (διεγερμένη) που αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του E. Το περιβάλλον χαρακτηρίζεται και αυτό από δύο καταστάσεις $|0_E\rangle$ και $|1_E\rangle$. Θεωρείστε ότι το περιβάλλον την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι στη κατάσταση $|0_E\rangle$. Η δυναμική του συστήματος καθορίζεται ως εξής: Αν το άτομο είναι στη θεμελιώδη κατάσταση τότε δεν αλλάζει η κατάστασή του και το περιβάλλον παραμένει στη κατάσταση $|0_E\rangle$. Αν το άτομο είναι στη διεγερμένη κατάσταση τότε με πιθανότητα p αποδιεγείρεται και μεταβαίνει στη θεμελιώδη ενώ ταυτόχρονα το περιβάλλον μεταβαίνει στην κατάσταση $|1_E\rangle$.

(i) Διατυπώστε τη δράση του μοναδιακού τελεστή χρονικής εξέλιξης $\hat{U}_{AE}$ στις καταστάσεις $|0_A 0_E\rangle$ και $|1_A 0_E\rangle$. Κατόπιν προσδιορείστε τους τελεστές Kraus που αφορούν στη χρονική εξέλιξη του ανηγμένου τελεστή πυκνότητας, $\hat{\rho}_A^R$, του ατόμου.

(ii) Εξαρτάται η μορφή των τελεστών Kraus που βρήκατε στο ερώτημα (i) από την βάση που έχει επιλεχθεί για την περιγραφή των καταστάσεων του περιβάλλοντος; Έστω ότι χρησιμοποιούσατε τη βάση $|\pm_E\rangle = \frac{|0_E\rangle \pm |1_E\rangle}{\sqrt{2}}$. Ποιά θα ήταν η μορφή των τελεστών Kraus σε αυτή τη περίπτωση;

(iii) Διατυπώστε την εξίσωση Lindblad που καθορίζει την χρονική εξέλιξη του τελεστή $\hat{\rho}_A^R$. Πως εξαρτάται η εξίσωση αυτή από τη βάση περιγραφής του περιβάλλοντος;

(iv) Υπολογίστε τον ανηγμένο τελεστή πυκνότητας του ατόμου την χρονική στιγμή t. Σχολιάστε το όριο $t \to \infty$. Τι παρατηρείτε;

(v) Έστω ότι υπάρχει και ένα δεύτερο άτομο B, δύο καταστάσεων $|0_B\rangle$ και $|1_B\rangle$. Έστω ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ τα άτομα A και B είναι εναγκαλισμένα: $|\Psi_{AB}\rangle = \frac{|1_A 0_B\rangle + |0_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}}$. Το περιβάλλον περιγράφεται στη βάση $|0_E\rangle$, $|1_E\rangle$ και αλληλεπιδρά με το άτομο A σύμφωνα με τους κανόνες που διατυπώθηκαν στη αρχή του ζητήματος. Να βρεθεί η $\hat{\rho}_A^R(t) = Tr_{BE}\hat{\rho}_{ABE}(t)$ και να δείξετε ότι, στο όριο $t \to \infty$, είναι μια καθαρή κατάσταση.

Διευκρίνηση: Εννοείται ότι σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι το περιβάλλον θα βρίσκεται στη κατάσταση $|0_E\rangle$ την χρονική $t = 0$.