Φαινομενολογία ανοικτών κβαντικών συστημάτων

Μέγεθος $O \Rightarrow$ τελεστής $\hat{O}$

Κατάσταση υπέρθεσης: $|\psi\rangle = c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

Στη γενική περίπτωση τα $|\psi_i\rangle$ $(i=1,2,..)$ δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του $\hat{O}$

Αναμενόμενη τιμή του $\hat{O}$:
(σε μέτρηση)

$$\langle O\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = |c_1|^2\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_1\rangle + |c_2|^2\langle\psi_2|\hat{O}|\psi_2\rangle + \underbrace{2\mathrm{Re}\left(|c_1||c_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)}\langle\psi_1|\hat{O}|\psi_2\rangle\right)}_{\text{όρος συμβολής}}$$

Γράφουμε:

$c_j = |c_j| e^{i\theta_j}$ με $j=1,2$

ιδιότυπος κυματικός χαρακτήρας $\Big\{$ όρος συμβολής (υπέρθεση πλατών) εξαρτάται από $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Οι όροι συμβολής είναι το χαρακτηριστικό γνώρισμα της κβαντικής συμπεριφοράς ενός συστήματος

$\Downarrow$

Θεμελιώδες ερώτημα : Πως επηρρεάζει το περιβάλλον Π τους όρους συμβολής που αντιστοιχούν σε μία μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους σε ανοικτό σύστημα Σ

Όροι συμβολής $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{συνοχή φάσης}}_{\text{(phase) coherence}}$ που χαρακτηρίζει τη $|\psi\rangle$

(phase) coherence : $|\psi\rangle = e^{i\theta_1}\left(|c_1||\psi_1\rangle + e^{i\Delta\theta}|c_2||\psi_2\rangle\right)$

μη ανιχνεύσιμη φάση

ανιχνεύσιμη φάση

$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

Χρειαζόμαστε ένα απλοϊκό μοντέλο για να απαντήσουμε αυτό το ερώτημα...

Ένα παράδειγμα: Σπιν σε σταθερό μαγνητικό πεδίο (στη διεύθυνση z)

$$\underbrace{|\psi\rangle = c_1|+\rangle + c_2|-\rangle}_{\text{αρχική κατάσταση του σπιν}}$$

$$\hat{H} = -\mu B \hat{\sigma}_z \quad (\text{Επιλογή } \vec{B} \parallel \hat{e}_z)$$

$$\hat{H}\underbrace{|\pm\rangle}_{\text{ιδιοκαταστάσεις του } \hat{\sigma}_z} = \mp \mu B |\pm\rangle$$

Υπολογισμός $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_\psi$:

$$\langle \hat{\sigma}_x \rangle_\psi = 2|c_1||c_2|\cos\Delta\theta$$

Χρονική εξέλιξη: $|\psi\rangle(t) = c_1 e^{\frac{i}{\hbar}\mu B t}|+\rangle + c_2 e^{-\frac{i}{\hbar}\mu B t}|-\rangle$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\langle \hat{\sigma}_x \rangle(t) = 2|c_1||c_2|\cos\left(\Delta\theta - \frac{2\mu B t}{\hbar}\right)}$$

Σπιν 1/2 σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο

$$\hat{H} = -\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{N} J_{j,k}\left(\hat{\vec{S}}_j \cdot \hat{\vec{S}}_k\right) - \sum_{j=1}^{N} \hat{\vec{m}}_j \cdot \vec{B}$$

$J_{j,k}$: σταθερά ζεύξης του σπιν $\vec{S}_j$ με το σπιν $\vec{S}_k$

$\hat{\vec{m}}_j$: μαγνητική ροπή του j σπιν, ισχύει $\vec{m}_j = \gamma\, \hat{\vec{S}}_j$

$\hat{\vec{S}}_j = (\hat{S}_{jx}, \hat{S}_{jy}, \hat{S}_{jz})$ με $\hat{S}_{jx} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x^{(j)}$, $\hat{S}_{jy} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y^{(j)}$, $\hat{S}_{jz} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z^{(j)}$

πίνακες Pauli

Ας θεωρήσουμε πολύ ισχυρό πεδίο $\vec{B}$ στη διεύθυνση z: $\vec{B} = B_0\, \hat{e}_z$

$\Downarrow$ προσεγγιστική περιγραφή για το j σπιν

$$\hat{H}_j = -\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{N} J_{kj}\, \hat{S}_{kz}\, \hat{S}_{jz} - \gamma\, \hat{S}_{j,z} B_0$$

Απομονώνοντας το j-σπιν μπορούμε να θεωρήσουμε

την ενεργό Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H}_{eff} = -\mu\,\hat{\sigma}_z \Big(B_0 + \underbrace{\overbrace{\Delta B(t)}^{\text{στοχαστική μεταβλητή}}}_{\text{προσομοιώνει τα σπιν του περιβάλλοντος (spin flips)}} \Big)$$

με $\{\Delta B(t)\}$ συλλογή από τιμές πεδίου με στοχαστικό χαρακτήρα

$$\{\Delta B(t)\} = \Big\{ \langle \Pi^{(\ell)} | \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \hat{S}_{z,k} \underbrace{|\Pi^{(\ell)}\rangle}_{\substack{\text{καταστάσεις} \\ \text{στο χώρο Hilbert των N-1 spins}}} \Big\}$$

με $\mu = \gamma \frac{\hbar}{2} + J\frac{\hbar}{2}$ (θεωρήσαμε $J_{kj} = J \;\; \forall k$)

(Υλοποίηση: βλέπε "Nitrogen Vacancy electron spin (defect) in diamond", Science 330, 60 (2010).)

Χρονική εξέλιξη Χαμιλτονιανής που εξαρτάται από το χρόνο

Εικόνα αλληλεπίδρασης: Έστω $\hat{H}_s(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int,s}(t)$

Τότε: $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}|\psi_s(t)\rangle$

και: $\hat{H}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{H}_s(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$

Προφανώς ο $\hat{H}_0$ δεν αλλάζει στην εικόνα αλληλεπίδρασης $\Rightarrow$

$$\hat{H}_I(t) = \hat{H}_0 + e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{H}_{int,s}(t)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι:

$$i\hbar\frac{\partial|\psi_I(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}^{(t)}_{int,I}|\psi_I(t)\rangle \quad \text{με} \quad \hat{H}^{(t)}_{int,I} = e^{\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}\,\hat{H}^{(t)}_{int,s}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t}$$

Θα ισχύει:

$$|\psi_I(\Delta t)\rangle - |\psi_I(0)\rangle = -\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int,I}(0)|\psi_I(0)\rangle\,\Delta t + O\left((\Delta t)^2\right)$$

Οπότε για την χρονική εξέλιξη της $|\psi_I(t)\rangle$ στο χρονικό διάστημα $[0,T]$, θέτοντας $\Delta t = \frac{T}{n}$ παίρνουμε:

$$|\psi_I(\Delta t)\rangle \approx \left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int,I}(0)\frac{T}{n}\right)|\psi_I(0)\rangle + \ldots$$

$$\vdots$$

$$|\psi_I(k\Delta t)\rangle \approx \prod_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int,I}\left((j-1)\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}\right)|\psi_I(0)\rangle + \ldots$$

$$\vdots$$

$$|\psi_I(T)\rangle \approx \prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int,I}\left((j-1)\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}\right)|\psi_I(0)\rangle + \underbrace{\ldots}_{\text{όροι ανώτερης τάξης ως προς } \frac{T}{n}}$$

$$\Rightarrow |\psi_I(T)\rangle = \lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_{int,I}\left((j-1)\frac{T}{n}\right)\frac{T}{n}\right)|\psi_I(0)\rangle$$

$$= \underbrace{\mathbf{T}}_{\text{χρονολογικό γινόμενο}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\hat{H}_{int,I}\left((j-1)\underbrace{\frac{T}{n}}_{\Delta t}\right)\underbrace{\frac{T}{n}}_{\Delta t}}|\psi_I(0)\rangle$$

απαραίτητο αφού εν γένει: $[\hat{H}_{int,I}(t), \hat{H}_{int,I}(t')] \neq 0 \Leftarrow$

$$= \mathbf{T}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^T \hat{H}_{int,I}(t)\,dt}|\psi_I(0)\rangle$$

Ο τελεστής χρονικής εξέλιξης στην εικόνα αλληλεπίδρασης γράφεται:

$$\hat{U}_I(t,0) = \mathbf{T}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \hat{H}_{int,I}(\tau)\,d\tau}$$

Στο παράδειγμα που μελετάμε: $H_{int,I}(t) = -\mu\,\Delta B(t)\,\hat{\sigma}_z$

οπότε ισχύει: $[H_{int,I}(t), H_{int,I}(t')] = 0 \quad \forall\, t, t'$

άρα το χρονολογικό γινόμενο μπορεί να αγνοηθεί.

Έχουμε λοιπόν: $\hat{U}_I(t,0) = e^{\frac{i}{\hbar}\mu\hat{\sigma}_z\int_0^t \Delta B(\tau)\,d\tau}$

και $|\psi_I(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mu\hat{\sigma}_z\int_0^t \Delta B(\tau)\,d\tau}\,|\psi_I(0)\rangle$

Θέλουμε να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας που περιγράφει το σπιν μας. Ας θεωρήσουμε ότι:

$\hat{\rho}_\Sigma(0) = |\psi_I(0)\rangle\langle\psi_I(0)|$ οπότε: $\hat{\rho}_\Sigma(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mu\hat{\sigma}_z\int_0^t \Delta B(\tau)\,d\tau}\,\hat{\rho}_\Sigma(0)\,e^{-\frac{i}{\hbar}\mu\hat{\sigma}_z\int_0^t \Delta B(\tau)\,d\tau}$

Θέτοντας $\phi(t) = \int_0^t d\tau \, \Delta B(\tau)$ έχουμε:

$$e^{\pm \frac{i}{\hbar} \mu \hat{\sigma}_z \phi(t)} = \cos\frac{\mu\phi(t)}{\hbar} \hat{I} \pm i\hat{\sigma}_z \sin\frac{\mu\phi(t)}{\hbar}$$

και $$\hat{\rho}_\Sigma(t) = \cos^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar} \hat{\rho}_\Sigma(0) + \sin^2\frac{\mu\phi(t)}{\hbar} \hat{\sigma}_z \hat{\rho}_\Sigma(0) \hat{\sigma}_z + \frac{i}{2}\sin\frac{2\mu\phi(t)}{\hbar} \underbrace{\left(-\hat{\rho}_\Sigma(0)\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\rho}_\Sigma(0)\right)}_{-[\hat{\rho}_{\Sigma,0}, \hat{\sigma}_z]}$$

Η $\hat{\rho}_\Sigma(t)$ εξαρτάται από τις τυχαίες τιμές $\{\Delta B(t)\}$ που παίρνει το πεδίο B (οι διακυμάνσεις του). Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι ΔB τυχαίο αλλά ανεξάρτητο του χρόνου. Τότε η χρονική εξέλιξη του Σ θα καθορίζεται από την τιμή ΔB που παίρνουν τυχαία οι διακυμάνσεις του B. Για συγκεκριμένη επιλογή ΔB θα ισχύει: $\boxed{\phi(t) = \Delta B\, t}$. Όμως η χρονική εξέλιξη του Σ θα διαφέρει αν επιλεγεί άλλη τιμή για το ΔB από τη συλλογή $\{\Delta B\}$. Έστω $p(\Delta B)$ η κατανομή του ΔB. Τότε η χρονική εξέλιξη του πίνακα πυκνότητας

Θα είναι: $\hat{\rho}_\Sigma(t, \Delta B)$ με πιθανότητα $p(\Delta B)\,\delta(\Delta B)$

$\Downarrow$

Για να μελετήσουμε την χρονική εξέλιξη του Σ θα πρέπει να ολοκληρώσουμε την επιρροή του περιβάλλοντος (εδώ το ΔB)

$\Downarrow$

ανηγμένος πίνακας πυκνότητας για το Σ

$$\hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t) = \int_{\underline{\Omega}(\Delta B)} d(\Delta B)\; p(\Delta B)\, \hat{\rho}_\Sigma(t, \Delta B)$$

$\hat{\rho}_{\alpha\nu,\Sigma}(t)$: ανηγμένος πίνακας πυκνότητας για το Σ (έχει απορροφηθεί η επίδραση του περιβάλλοντος)

$\underline{\Omega}(\Delta B)$: δειγματόχωρος του ΔB

$p(\Delta B)$: χαρακτηρίζει το στοχαστικό περιβάλλον

$\hat{\rho}_\Sigma(t, \Delta B)$: εξαρτάται από το ΔB (διακυμάνσεις του περιβάλλοντος)

Επιλογή: $$p(\Delta B) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\Delta B}}\, e^{-\frac{(\Delta B)^2}{2\sigma_{\Delta B}^2}}}_{\text{Gaussian με μέση τιμή } \emptyset \text{ και διασπορά } \sigma_{\Delta B}}$$

Με αυτή την επιλογή βρίσκουμε:

$$\hat{\rho}_{αν,Σ}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_{\Delta B}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta B)\, e^{-\frac{(\Delta B)^2}{2\sigma_{\Delta B}^2}}\, \hat{\rho}_{\Sigma}(t,\Delta B)$$

με $\hat{\rho}_{\Sigma}(t,\Delta B) = \cos^2\left(\frac{\mu \Delta B t}{\hbar}\right)\hat{\rho}_{\Sigma}(0) + \sin^2\left(\frac{\mu\Delta B t}{\hbar}\right)\hat{\sigma}_z\,\hat{\rho}_{\Sigma}(0)\hat{\sigma}_z + \frac{i}{2}\sin\frac{2\mu\Delta B t}{\hbar}\left[\hat{\sigma}_z\,,\hat{\rho}_{\Sigma}(0)\right]$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_{\Delta B}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta B)\, e^{-\frac{(\Delta B)^2}{2\sigma_{\Delta B}^2}}\cos^2\frac{\mu\Delta B t}{\hbar^2} = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\Gamma^2 t^2}\right)$

με $\Gamma = \frac{\mu}{\hbar^2}$

Οπότε προφανώς $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_{\Delta B}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta B)\, e^{-\frac{(\Delta B)^2}{2\sigma_{\Delta B}^2}}\sin^2\frac{\mu\Delta B t}{\hbar^2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\left(1+e^{-\Gamma^2 t^2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-\Gamma^2 t^2}\right)$

καθώς και $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_{\Delta B}}\int_{-\infty}^{+\infty} d(\Delta B)\, e^{-\frac{(\Delta B)^2}{2\sigma_{\Delta B}^2}}\sin\frac{2\mu\Delta B t}{\hbar^2} = 0$

καταλήγοντας στη σχέση:

$$\boxed{\hat{\rho}_{αν,Σ}(t) = \frac{1}{2}\left(1+e^{-\Gamma^2 t^2}\right)\hat{\rho}_{\Sigma}(0) + \frac{1}{2}\left(1-e^{-\Gamma^2 t^2}\right)\hat{\sigma}_z\,\hat{\rho}_{\Sigma}(0)\,\hat{\sigma}_z}$$

Μη μοναδιακή χρονική εξέλιξη

Η γραφή της χρονικής εξέλιξης του $\hat{\rho}_\Sigma(0)$ σε μοναδιακή μορφή:

$$\underbrace{\hat{\rho}_\Sigma(t) = \hat{U}(t)\hat{\rho}_\Sigma(0)\hat{U}^+(t)}_{\text{ισχύει για κλειστό σύστημα}} \qquad \text{με} \quad \hat{U}\hat{U}^+ = \hat{I}$$

δεν είναι εφικτή! Η αιτία είναι οι στοχαστικές διακυμάνσεις $\{\Delta B\}$

Μπορούμε όμως να γράψουμε, ορίζοντας τους τελεστές

$$\begin{cases} \hat{K}_0(t) = \sqrt{\dfrac{1+e^{-\Gamma^2 t^2}}{2}}\,\hat{I} \\ \hat{K}_1(t) = \sqrt{\dfrac{1-e^{-\Gamma^2 t^2}}{2}}\,\hat{\sigma}_z \end{cases}$$

ότι:

$$\underbrace{\hat{\rho}_{\alpha\nu.\Sigma}(t) = \hat{K}_0(t)\hat{\rho}_\Sigma(0)\hat{K}_0^+(t) + \hat{K}_1(t)\hat{\rho}_\Sigma(0)\hat{K}_1^+(t)}_{\text{ισχύει για ανοικτά συστήματα}}$$

Αυτή η περιγραφή γενικεύεται με το Θεώρημα του Kraus

Θεώρημα Kraus

Έστω $B(\mathcal{H})$ ο διανυσματικός χώρος των φραγμένων τελεστών του χώρου Hilbert $\mathcal{H}$

Επίσης, έστω απεικόνιση $\Phi_t : B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H})$

Τότε:
$$\exists \{\hat{K}_i\} \in B(\mathcal{H}) : \Phi_t(\hat{\rho}) = \sum_j \hat{K}_j \hat{\rho} \hat{K}_j^{+}$$

με $$\sum_j \hat{K}_j^{+} \hat{K}_j = \hat{I}$$

Οι τελεστές $\{K_i\}$ λέγονται <u>τελεστές Kraus</u>

<u>Παρατήρηση:</u> Στο σύστημα που μελετήσαμε η στοχαστικότητα υπεισέρχεται μέσω αρχικής επιλογής του ΔΒ

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε και την περίπτωση που το $\phi(t) = \int_0^t \Delta B(\tau)\,d\tau$ περιγράφεται από στοχαστική διαδικασία τύπου διάχυσης