

Τμήμα Φυσικής. Ακαδημαϊκό έτος 2016-17
Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I - Φύλλο ασκήσεων 1

1. Να γραφεί σε πολική μορφή ο

$$z = \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}.$$

2. Έστω z_0, \dots, z_{n-1} οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$ ($w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \geq 2$). Αποδείξτε αναλυτικά (και όχι γεωμετρικά) ότι $z_0 + \dots + z_{n-1} = 0$. [Υπόδειξη: Σχετίστε τις λύσεις z_k με τις λύσεις ω_k , $k = 0, \dots, n-1$, της εξίσωσης $\omega^n = 1$.]

3. (i) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^3 - 2i}{2z^2 + 3 - 4i}$$

απεικονίζει το μοναδιαίο δίσκο $D(0, 1)$ στον εαυτό του.

4. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το \bar{z}_0 είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40$$

αφού επαληθευτεί ότι το $1 - 3i$ είναι μία ρίζα.

5. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$$

απεικονίζει το μοναδιαίο κύκλο $S(0, 1)$ στον εαυτό του.

6. Να αποδειχθεί ότι το πεδίο τιμών των συναρτήσεων $\cos z$ και $\sin z$ είναι όλο το \mathbb{C} .

7. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2 \log z$ (ως πλειότητες συναρτήσεων). Όμως $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;

8. Να εξετάσετε αν τα σύνολα

$$A = \left\{ \frac{1}{n} + iy : n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \mathbb{Z} + i\mathbb{R}$$

είναι ανοικτά ή κλειστά και να βρεθεί το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του καθενός από αυτά.

9. Να δειχθεί ότι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του $\mathbb{C} \setminus A$ είναι κλειστό.

10. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{z}, & z = x + iy \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$