Τμήμα Φυσικής. Ακαδημαϊκό έτος 2016-17
Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I - Φύλλο ασκήσεων 3

1. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f(z)$, αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, τέτοια ώστε $e^{f(z)} = z$.

2. Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2} f''(0) \,.$$

3. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq |z|^{8/7}$, $z \in \mathbb{C}$. Αν δίνεται ότι $f(-i) = 1/3$, να βρεθεί το $f(i)$.

4. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν μία από τις u, v είναι άνω φραγμένη ή κάτω φραγμένη τότε η f είναι σταθερή.

5. Έστω g, h αναλυτικές στο z_0 με $g(z_0) \neq 0$ και $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0$. Να δειχθεί ότι
$$\mathrm{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{g(z_0)h'''(z_0)}{(h''(z_0))^2}.$$

6. Να βρεθεί το ιδιάζον μέρος της σειράς Laurent της συνάρτησης
$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)^2}$$
γύρω από το $z = 0$. (Δηλαδή $A, B \in \mathbb{C}$ ώστε $f(z) = Az^{-2} + Bz^{-1} + g(z)$ όπου g αναλυτική στο 0)

7. Να βρεθεί τι είδους ανώμαλο σημείο είναι το μηδέν για τις συναρτήσεις
$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3z}{1 - \cos 2z} \quad , \quad g(z) = \frac{z(e^{2z} - 1)}{\sin^3 z} \quad , \quad h(z) = \cos(z + \frac{1}{z}).$$

8. Να αποδειχθεί ότι το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων συνεπάγεται τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy.

9. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ να εξεταστεί τι είδους ανώμαλο σημείο είναι το $z = 1$ για τη συνάρτηση
$$f(z) = \frac{\alpha + \beta}{z - 1} - \frac{\alpha^2 + 1}{z^2 - 1} + \beta^2 \sin\big(\frac{1}{z - 1}\big).$$

10. Έστω συνάρτηση f αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ με $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \overline{D}(1)$. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{S(1)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$
όταν (i) το μηδέν είναι ρίζα τάξης n της f (ii) το μηδέν είναι πόλος τάξης n της f.

11. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο.

12. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+9} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+25}dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^4}$$

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5+3\cos\theta}d\theta \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} \quad (|a|<1) \qquad \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+x+1)^2}dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+2x^2+1}dx \qquad \int_{0}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+9)^2}dx$$