Ιδιότητες του ΜF

1) Γραμμική ιδιότητα.

Αν $f(t), g(t)$ έχουν Μ.F. τις $F(\omega)$ και $G(\omega)$ τότε

$$\boxed{\mathcal{F}\left[\alpha f(t) + b g(t)\right] = \alpha F(\omega) + b G(\omega)}$$

2) Μετ/σμός της παραγώγου

Αν ο Μ.F. της $f(t)$ είναι $F(\omega)$, και $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, τότε:

$$\boxed{\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (i\omega)^n F(\omega)}$$

Ας θεωρήσουμε την $g(t) = f'(t)$. Τότε

$$G(\omega) \equiv \mathcal{F}\left[f'(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$= \underbrace{\left[f(t) e^{-i\omega t}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt = + i\omega F(\omega)$$

Γενικότερα: $\mathcal{F}\left[f^{(n)}(t)\right] = (+i\omega)^n F(\omega)$
εφαρμόζοντας επαναληπτικά την παραπάνω διαδικασία.

[Σημείωση: Αν είχαμε το χωρικό μετ/σμό Fourier:

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx}\, dx$$

Τότε $\mathcal{F}\left[\dfrac{df(x)}{dx}\right] = +ik F(k)$

και γενικότερα: $\boxed{\mathcal{F}\left[\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}\right] = (+ik)^n F(k).}$]

Μετατόπιση στο χρόνο

Αν $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ τότε $\boxed{\mathcal{F}[f(t-t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(\omega)}$, $t_0 \in \mathbb{R}$.

Είναι: $\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0) e^{-i\omega t} \, dt$

Θέτουμε $t - t_0 = y \Rightarrow t = y + t_0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-i\omega (y+t_0)} \, dy = e^{-i\omega t_0} F(\omega)$$

Μετατόπιση στη συχνότητα

Αν $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ τότε $\boxed{\mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)] = F(\omega - \omega_0)}$ (*)

Είναι: $\mathcal{F}[f(t) e^{i\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega t} \, dt =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\underbrace{(\omega-\omega_0)}_{\Omega} t} \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\Omega t} \, dt = F(\Omega) = F(\omega - \omega_0)$$

(*) Ισχύει επίσης:

$$\mathcal{F}[f(t)\cos(\omega t)] = \frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)\right]$$

$$\mathcal{F}[f(t)\sin(\omega t)] = \frac{1}{2i}\left[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)\right]$$

Εφαρμογές → διαμόρφωση AM → τηλ/νίες !

Συμμετρική ιδιότητα (δυισμός).

Αν $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ τότε $\boxed{\mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega)}$

Απόδειξη:

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$; αλλάζουμε $t \to -t$, οπότε:

$$f(-t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega}_{\text{ο M.F. της } F(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}[F(t)] = 2\pi f(-\omega) \quad (1)$$

όπου έχουμε εναλλάξει τις θέσεις των ω και t.

Επίσης, από (1) μπορούμε φυσικά να πάρουμε:

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}[f(-\omega)] = \frac{1}{2\pi} F(t)}$$

Συνέλιξη

Ορισμός: Συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f_1(t), f_2(t)$:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau$$

Η συνέλιξη έχει τις ιδιότητες:

- αντιμεταθετική: $f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$
- προσεταιριστική: $[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$
- επιμεριστική: $f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$

Η συνέλιξη βρίσκει εφαρμογές στην περιγραφή των σχέσεων εισόδου-εξόδου σε γραμμικά & χρον. αμετάβλητα συστήματα. (βλ. παρακάτω).

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mathcal{F}[f_1 * f_2]$.

Έστω $f(t) = f_1 * f_2$; τότε:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f_1 * f_2 \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right] dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f_2(t-\tau)\, dt}_{F_2(\omega) e^{-i\omega\tau}} \, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau} F_2(\omega)\, d\tau = F_2(\omega) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-i\omega\tau}\, d\tau}_{F_1(\omega)}$$

$$= F_1(\omega) F_2(\omega).$$