Ας θεωρήσουμε μια ΜΔΕ 1ης τάξης ως προς το χρόνο της μορφής:

$$u_t = F[u, u_x, u_{xx}, \dots]$$

όπου F είναι πολυωνυμικής μορφής.

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχ. τιμών στο $-\infty < x < \infty$ και υποθέτουμε ότι $u \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$.

Θεωρείται δεδομένο το $u(x,0) = u_0(x)$

Ας θεωρήσουμε τη γραμμική ομογενή περίπτωση:

$$u_t = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j (x,t)\, u_{jx}$$

όπου $u_{jx} \equiv \dfrac{\partial^j u}{\partial x^j}$ και α_j δεδομένοι συντελεστές.

Αν $\alpha_j =$ σταθ. $\forall j$ τότε

$$u_t = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_{jx}$$

Ορίζουμε, κατά τα γνωστά, τον μετ/σμό Fourier (χωρικό):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\, e^{ikx}\, dk$$

$$\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-ikx}\, dx$$

Τότε η εξίσωση που μας ενδιαφέρει:

$$u_t = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_{jx} ,$$

γίνεται:

$$\hat{u}_t = \sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j \hat{u} \Rightarrow \hat{u}_t - \sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j \hat{u} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{u}_t = \hat{u} \sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j \quad (1)$$

Θέτουμε: $-i\omega(k) = \sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j \quad (2)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{u}_t = -i\omega(k)\hat{u} \quad (3)$$

Καλούμε την σχέση (2): $\omega(k) = i\sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j$ σχέση διασποράς

Π.χ. αν $N=3$: $\omega(k) = i\alpha_0 - \alpha_1 k - i\alpha_2 k^2 + \alpha_3 k^3$

Βλέπουμε ότι $\omega(k) \in \mathbb{R}$ αν $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_0, \alpha_2 \in \mathbb{I}$

Τώρα, η (3) είναι μία ΣΔ.Ε οπότε:

$$\hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k)\, e^{-i\omega(k)t}$$ όπου $\hat{u}_0(k) = \hat{u}(k,0)$

οπότε

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{i[kx-\omega(k)t]}\, dk} \quad (4)$$

όπου $\hat{u}_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-ikx}\, dx.$

Σημειώνεται ότι υπάρχει ένας εναλλακτικός τρόπος για τον προσδιορισμό της σχέσης διασποράς:

Αντικαθιστούμε στη ΜΔΕ μια λύση της μορφής:

$$u = u_0 e^{i[kx - \omega(k)t]} \quad , \quad u_0 = \text{σταθ.} \qquad (5)$$

και για τις χρονικές και χωρικές παραγώγους χρησιμοποιούμε:

$$\partial_t \longleftrightarrow -i\omega \quad \text{και} \quad \partial_x \longleftrightarrow ik.$$

Ορολογία: Εξισώσεις με ή χωρίς διασπορά.

Ορισμοί: Το μιγαδικό εκθετικό στην (5) γράφεται

$u = u_0 e^{i\theta}$, όπου

$$\theta = kx - \omega(k)t. \quad \text{Εδώ:} \begin{cases} k: \text{κυματαριθμός} \\ \omega: \text{γων. συχνότητα} \end{cases}$$

Ορίζουμε: $T \equiv \frac{2\pi}{\omega}$: χρονική περίοδος

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$: χωρική περίοδος (μήκος κύματος)

$v_p(k) = \frac{\omega(k)}{k}$: ταχύτητα φάσης ή φασική ταχύτητα

γιατί $\theta = kx - \omega(k)t = k\left[x - c(k)t\right]$

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} \equiv \omega'(k)$$

Αν $\omega''(k) = 0 \longrightarrow$ η εξίσωση <u>δεν</u> παρουσιάζει <u>διασπορά</u>

$\omega''(k) \neq 0 \longrightarrow$ —— " —— παρουσιάζει <u>διασπορά</u>

Ας θεωρήσουμε την ΜΔΕ:

$$\boxed{u_t + c\,u_x = 0}\ , \quad c \in \mathbb{R} \quad (\text{εδώ } c = -\alpha_1)$$

Τότε, για: $u = u_0 e^{i\overbrace{(kx - \omega(k)t)}^{\theta}}$ παίρνουμε

$$-i\omega(k) u_0 e^{i\theta} + ikc\, e^{i\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega(k) = + c\,k.}$$

Εδώ:

$$\left.\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega(k)}{k} = c \\ v_g &= \omega'(k) = c \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_p = v_g.$$

και $\omega''(k) = 0 \longrightarrow \nexists$ διασπορά.

Ας θεωρήσουμε πάλι την εξίσωση

$$u_t = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j u_{jx}$$

που έχει σχέση διασποράς την

$$\omega(k) = i \sum_{j=0}^{N} (ik)^j \alpha_j$$

Είναι φανερό ότι $\omega(k) \in \mathbb{R}$ μόνο αν στο άθροισμα συμμετέχουν περιττές δυνάμεις του k, η αν οι άρτιες δυνάμεις του k μηδενίζονται, δηλ.

$$\alpha_j = 0 \quad \text{για} \quad j = 2, 4, 6, \ldots$$

Τότε: $$\omega(k) = -\sum_{j=0}^{N} (-1)^j \alpha_{2j+1} k^{2j+1}$$

Παράδειγμα: η γραμμικοποιημένη εξίσωση Korteweg-de Vries (γνωστή ως KdV):

$$u_t + u_{xxx} = 0$$

Αν $u = u_0 e^{i(kx - \omega(k)t)}$ τότε

$$\omega(k) = -k^3$$

Εδώ παρατηρούμε ότι $\omega \in \mathbb{R}$ και $\omega''(k) = -6k \neq 0$ $\Rightarrow$ παρουσιάζεται διασπορά.

Από την άλλη πλευρά, η εξίσωση διάχυσης (θερμότητας):

$$u_t = D u_{xx}, \quad D \in \mathbb{R}$$

έχει σχέση διασποράς:

$$\omega(k) = -iDk^2$$

Θα δούμε παρακάτω ότι η λύση της εξ. διάχυσης αποσβένυται καθώς $t \nearrow$.

<u>Παράδειγμα</u> Να λυθεί η κυματική εξίσωση της τάξης:

$$u_t + c u_x = 0 \quad (1)$$

με αρχ. συνθήκη: $u(x,0) = u_0(x)$

$-\infty < x < +\infty$

Πρόβλημα αρχικών Τιμών (πρόβλημα Cauchy)

Παίρνουμε το χωρικό μετ/σμό Fourier της (1):

$$\hat{u}_t + ikc\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}_t = (-ikc)\hat{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{u} = A(k)e^{-ikct} \quad (2)$$ (σημειώνεται $\omega = kc$)

Αρχ. συνθήκη: $u(x,0) = u_0(x) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k) \\ \text{Από (2), για } t=0: \quad \hat{u}(k,0) = A(k) \end{array}\right\} \Rightarrow A(k) = \hat{u}_0(k)$$

Άρα (2): $\hat{u} = \hat{u}_0(k)e^{-ikct} \Rightarrow$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)e^{-ikct}e^{+ikx}dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)e^{ik(x-ct)}dk$$

Ορίζουμε $\xi = x - ct$, οπότε $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)e^{ik\xi}dk = u_0(\xi)$

Άρα η λύση της (1) είναι: $\boxed{u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(x-ct)}$

Παράδειγμα. Να λυθεί η κυματική εξίσωση:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1); \quad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \left[\begin{array}{c} \text{Πρόβλημα αρχικών τιμών} \\ \text{(Πρόβλημα Cauchy)} \end{array} \right]$$

$$u_t(x,0) = 0$$

Μετασχηματίζουμε κατά Fourier (χωρικός MF)

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t) e^{ikx} dk \\ \hat{u}(k,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) e^{-ikx} dx \end{cases}$$

(1): $\hat{u}_{tt} + k^2 c^2 \hat{u} = 0$ [αρμονική εξίσωση για το $\hat{u}(k,t)$]

$$\Rightarrow \hat{u}(k,t) = A(k) e^{-ikct} + B(k) e^{ikct} \quad (2) \qquad [kc \equiv \omega]$$

Αρχ. συνθήκες: $u(x,0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$

$$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \hat{u}_t(k,0) = 0.$$

Άρα (2):

$$\begin{cases} \hat{u}(k,0) = A(k) + B(k) = \hat{f}(k). \\ \hat{u}_t(k,0) = -ikc A(k) + ikc B(k) = 0 \Rightarrow ikc\big(B(k) - A(k)\big) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(k) + B(k) = \hat{f}(k) \\ A(k) = B(k) \end{cases} \Rightarrow A(k) = B(k) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)$$

Άρα (2):

$$\hat{u}(k,t) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)\left(e^{-ikct} + e^{ikct}\right) \left[= \hat{f}(k)\cos(kct)\right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\,\frac{1}{2}\left(e^{-ikct} + e^{ikct}\right)e^{+ikx}\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\hat{f}(k)e^{+ik(x-ct)}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\hat{f}(k)e^{+ik(x+ct)}\,dk$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]}$$

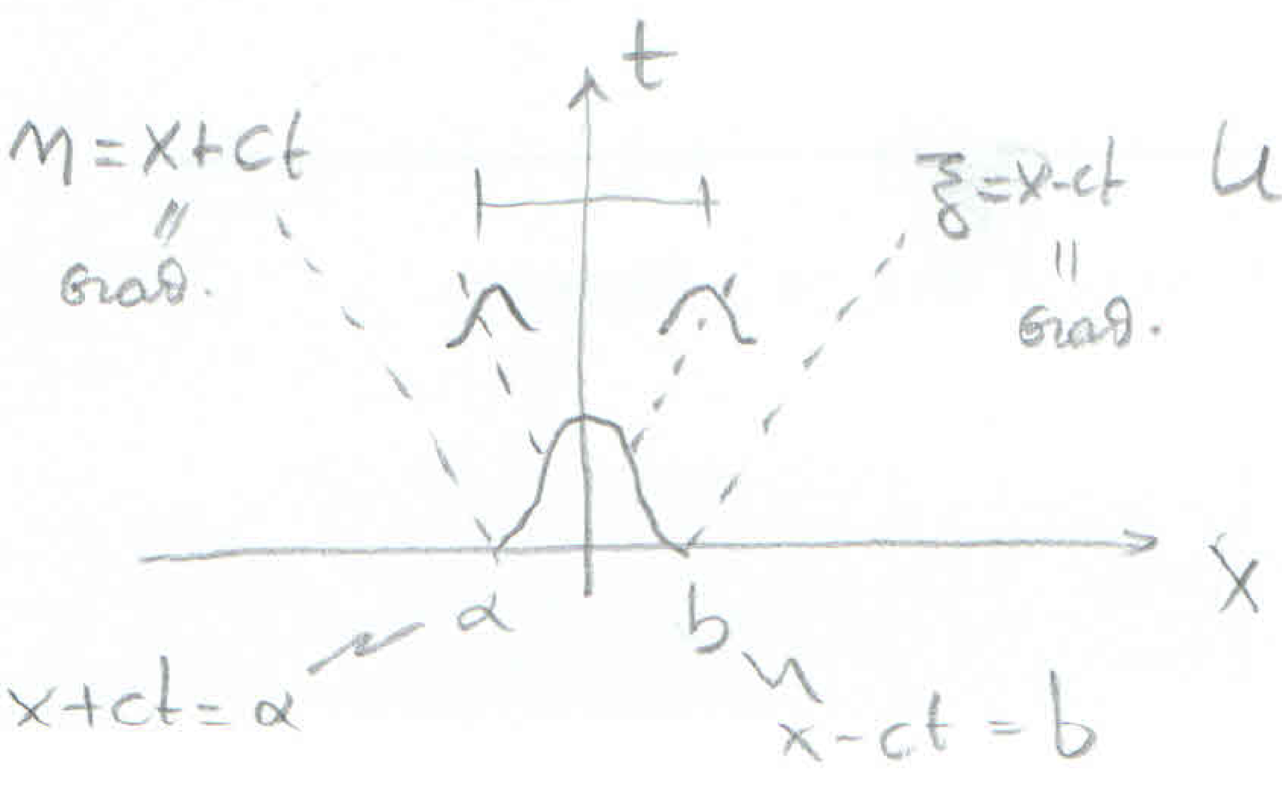
κύμα προς τα δεξιά — κύμα προς τα αριστερά

Πράγματι:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - ct \\ \eta &= x + ct \end{aligned}\right| \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} = -c\frac{\partial}{\partial \xi} + c\frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

και $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \Rightarrow c^2 u_{\xi\xi} + c^2 u_{\eta\eta} - 2c^2 u_{\xi\eta} - c^2\left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + 2u_{\xi\eta}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u = f(\xi) + g(\eta) \Rightarrow$$



$u = f(x-ct) + g(x+ct)$ και $f = g$ από τις Α.Σ