Η μέθοδος της στάσιμης φάσης

Τα ολοκληρώματα που προκύπτουν από την χρήση του μετ/σμού Fourier για τη λύση προβλημάτων Cauchy σε ΜΔΕ έχουν τη μορφή:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{i[kx - \omega(k)t]}\, dk. \qquad (1)$$

Μας ενδιαφέρει η μακρόχρονη ασυμπτωτική συμπεριφορά (long-time asymptotics) της (1), καθώς $t \to \infty$ με $X = \frac{x}{t}$ να είναι πεπερασμένο, δηλ. μας ενδιαφέρει να βρούμε μια προσεγγιστική έκφραση για την (1) για μεγάλους χρόνους και για μεγάλες αποστάσεις από την αρχή των συντεταγμένων.

Παρατηρούμε ότι $\varphi(k) \equiv kx - \omega(k)t =$

$$= \left[k\frac{x}{t} - \omega(k)\right]t =$$

$$= \left[kX - \omega(k)\right]t$$

οπότε η (1) μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του ολοκληρώματος

$$I(t) = \int_a^b \hat{u}_0(k)\, e^{i\varphi(k)t}\, dk \qquad (2)$$

όπου $\varphi(k)$ είναι λεία στο $-\infty \le \alpha < b \le \infty$.

Αν $\hat{u}_0(k)$ είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[\alpha, b]$, δηλ. $\int_\alpha^b |\hat{u}_0(k)|\,dk < \infty$, τότε $\lim_{t\to\infty} I(t) = 0$. (Λήμμα Riemann - Lebesgue ⊛). Προφανώς, όμως, το παραπάνω αποτέλεσμα δεν μας δίνει κάποια πρόσθετη ποσοτική πληροφορία για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $u(x,t)$.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι $\hat{u}_0(k)$ και $\varphi(k)$ είναι ομαλές (δηλ. παραγωγίσιμες) και επιπλέον

$$\varphi'(k) \neq 0 \quad \text{στο} \quad [\alpha, b].$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε την (2) στη μορφή:

$$I(t) = \int_\alpha^b \frac{\hat{u}_0(k)}{i\varphi'(k)t} \frac{d}{dk}\left[e^{i\varphi(k)t}\right] dk$$

και να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες.

Έτσι παίρνουμε:

⊛ Μια εναλλακτική και χρήσιμη διατύπωση του Λήμματος Riemann - Lebesgue είναι η εξής: αν μια συνάρτηση $f(t)$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε ο μετασχηματισμός της κατά Fourier $F(\omega)$ είναι τέτοιος ώστε $\lim_{|\omega|\to\infty} F(\omega) = 0$

$$I(t) = e^{i\varphi(k)t}\,\frac{\hat{u}_0(k)}{i\varphi'(k)t}\Bigg|_\alpha^b - \int_\alpha^b e^{i\varphi(k)t}\,\frac{d}{dk}\left[\frac{\hat{u}_0(k)}{i\varphi'(k)t}\right]dk$$

$$= i\left[\frac{\hat{u}_0(\alpha)e^{i\varphi(\alpha)t}}{\varphi'(\alpha)} - \frac{\hat{u}_0(b)e^{i\varphi(b)t}}{\varphi'(b)}\right]\frac{1}{t}$$

$$- \int_\alpha^b e^{i\varphi(k)t}\,\frac{d}{dk}\left[\frac{\hat{u}_0(k)}{i\varphi'(k)t}\right]dk. \qquad (3)$$

Είναι σαφές ότι αν συνεχίσουμε τη διαδικασία των παραγοντικών ολοκληρώσεων, το ολοκλήρωμα στην παραπάνω εξίσωση θα δώσει έναν όρο $\sim \frac{1}{t^2}$, κ.ο.κ.

Έτσι, αν οι συναρτήσεις $\hat{u}_0(k)$ και $\varphi(k)$ είναι παραγωγίσιμες άπειρες φορές, μπορούμε να καταλήξουμε με τη διαδικασία αυτή στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα

$$I(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(t)}{t^n}$$

όπου $c_n(t)$ είναι φραγμένες συναρτήσεις. Επιπλέον, αν η $\hat{u}_0(k)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(-\infty, +\infty)$, δηλ. $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}_0(k)|dk < \infty$, τότε

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \hat{u}_0(\alpha) = \lim_{b\to+\infty} \hat{u}_0(b) = 0$$

Συνεπώς, αν $\varphi'(k) \neq 0 \; \forall k$ και $\hat{u}_0(k)$, $\varphi(k)$ απείρως παραγωγίσιμες, θα είναι

$$u(x,t) \sim \frac{1}{t^n} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Είναι όμως συνηθισμένο να υπάρχει ένα σημείο c (ή σημεία) όπου $\varphi'(c) = 0$. Για να αναλύσει κανείς αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιεί τη λεγόμενη μέθοδο στάσιμης φάσης, που αναπτύχθηκε από τους Kelvin και Stokes.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένα σημείο c, $a < c < b$, τέτοιο ώστε

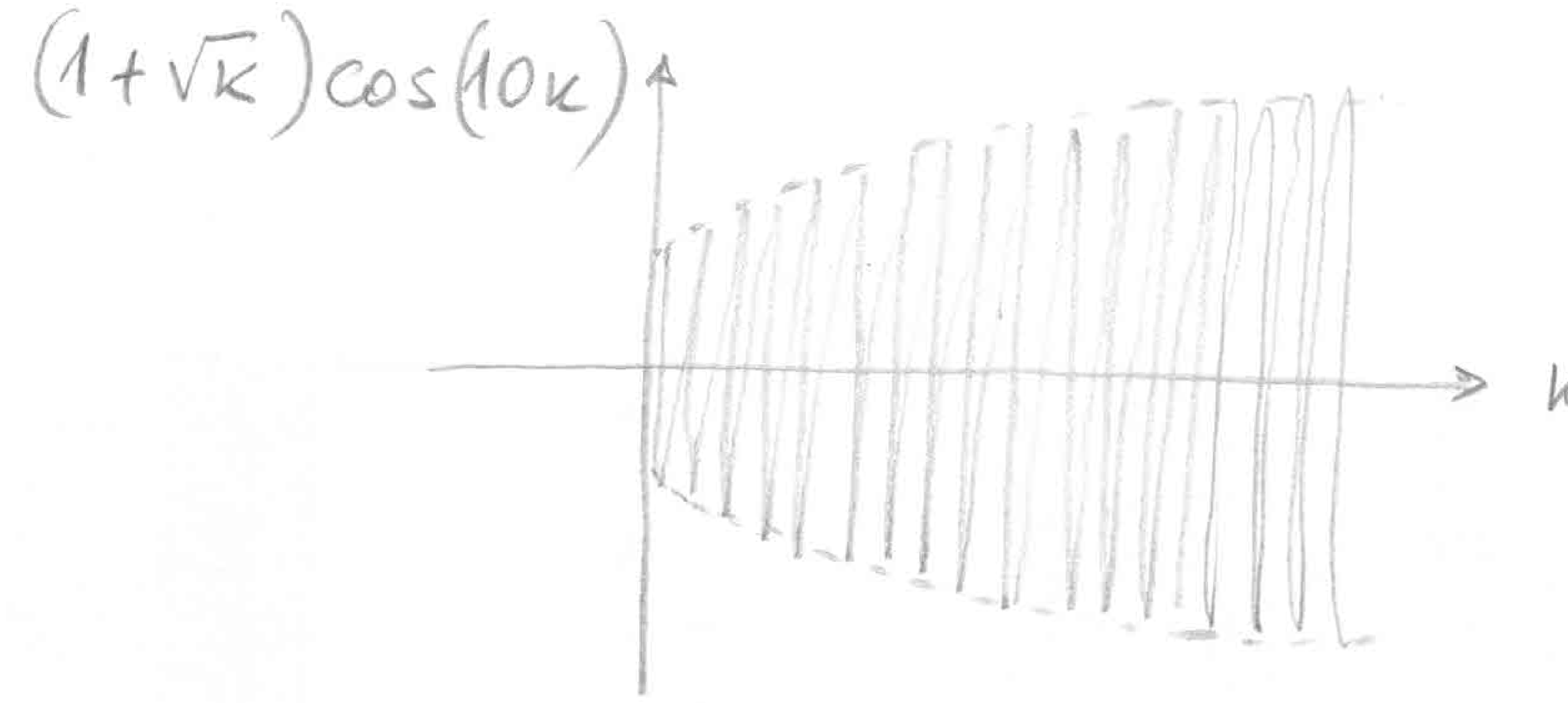
$$\varphi'(c) = 0, \quad \varphi''(c) \neq 0, \quad \hat{u}_0(c) \neq 0$$

και οι $\hat{u}_0(k)$, $\varphi(k)$ είναι ομαλές. Το σημείο c ονομάζεται στάσιμο σημείο. Ας θεωρήσουμε και πάλι την (3) που τη γράφουμε ως:

$$I(t) = i\left[\frac{\hat{u}_0(a)}{\varphi'(a)} e^{i\varphi(a)t} - \frac{\hat{u}_0(b)}{\varphi'(b)} e^{i\varphi(b)t}\right]\frac{1}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (4)$$

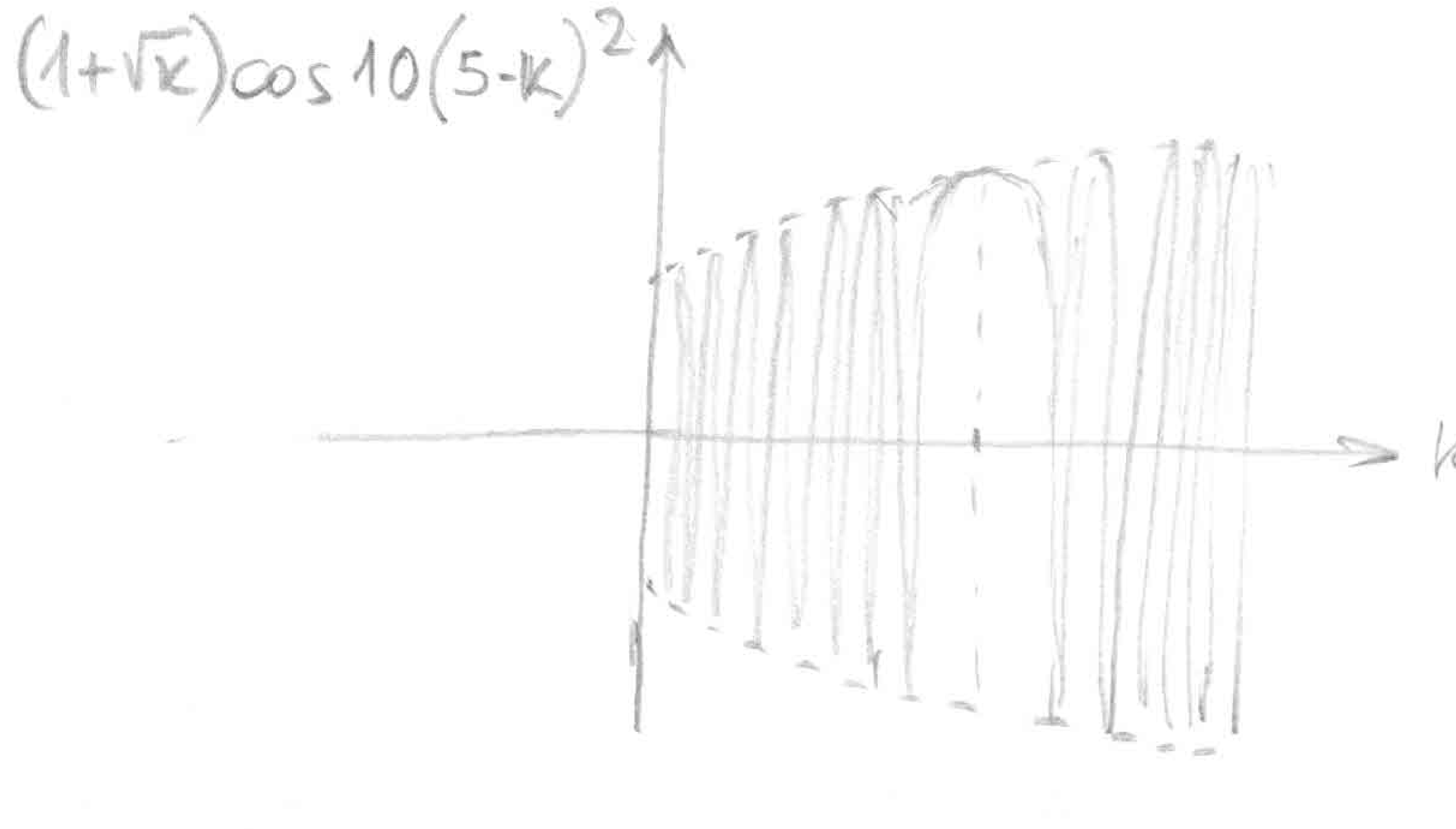
[ο συμβολισμός $O(1/t^2)$ σημαίνει ότι ο όρος του ολοκληρώματος είναι τάξης $1/t^2$, όπως φαίνεται αν εκτελέσουμε παραγοντική ολοκλήρωση]

Αν $\varphi'(\kappa)\neq 0$ στο $[\alpha, b]$, η (4) δείχνει ότι μόνο οι γειτονιές των σημείων α, b συνεισφέρουν στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του $I(t)$. Οι γρήγορες ταλαντώσεις του $\exp[i\varphi(\kappa)t]$ τείνουν να αναιρέσουν τις συνεισφορές στο ολοκλήρωμα, εκτός από τις γειτονιές των ακραίων σημείων α, b – βλ. Σχ. 1.



Σχ. 1: Ένα παράδειγμα με $\hat{u}_0(k)=1+\sqrt{k}$ και $\varphi(k)=10 \Rightarrow \varphi'(k)=0$.

Από την άλλη πλευρά, αν $\exists c\in[\alpha, b] : \varphi'(c)=0$, δηλ. υπάρχει στάσιμο σημείο, τότε η συνεισφορά στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του $I(t)$ προέρχεται και από τα ακραία σημεία, αλλά και από το στάσιμο σημείο. Μάλιστα η συνεισφορά από το c είναι η κυριότερη – βλ. Σχ. 2.



Σχ. 2. Εδώ είναι πάλι $\hat{u}_0(k)=1+\sqrt{k}$ αλλά $\varphi(k)=10(5-k)^2$ οπότε $\varphi'(5)=0$.

Άρα, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor την $\varphi(k)$ γύρω από το στάσιμο σημείο c, δηλ.

$$\varphi(k) \approx \varphi(c) + \frac{1}{2}\varphi''(c)(k-c)^2 + \ldots$$

[αφού έχουμε υπόθεση ότι $\varphi'(c)=0$ και $\varphi''(c) \neq 0$]

και παίρνουμε τον κυρίαρχο όρο στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $I(t)$, που προέρχεται από τη γειτονία του c:

$$I(t) \sim \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \hat{u}_0(c) \exp\left[i\left(\varphi(c) + \frac{1}{2}\varphi''(c)(k-c)^2\right)t\right] dk$$

όπου ε είναι μια μικρή παράμετρος. Συνεπώς:

$$I(t) \sim \hat{u}_0(c) e^{i\varphi(c)t} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} \exp\left[i\frac{1}{2}\varphi''(c)(k-c)^2 t\right] dk. \quad (5)$$

Θέτουμε τώρα

$$\xi^2 = \frac{1}{2}\varphi''(c)(k-c)^2 t \quad , \quad \mu = \operatorname{sgn}(\varphi''(c))$$

και επεκτείνουμε τα όρια ολοκλήρωσης στην (5) από $-\infty$ στο $+\infty$. (δηλ. παίρνουμε $\varepsilon\sqrt{t} \to \infty$). Τότε η (5) γίνεται:

$$I(t) \sim \sqrt{\frac{2}{t|\varphi''(c)|}}\, \hat{u}_0(c) e^{i\varphi(c)t} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\mu\xi^2)\, d\xi \quad (6)$$

Είναι όμως

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi}\, e^{i\mu\frac{\pi}{4}} \qquad (7)\ (*)$$

οπότε η (6) γίνεται:

$$I(t) \sim \hat{u}_0(c)\sqrt{\frac{2\pi}{t\,|\varphi''(c)|}}\; e^{i\varphi(c)t + i\mu\frac{\pi}{4}} \qquad (8).$$

Αφού θεωρούμε μετασχηματισμούς Fourier, είναι

$$\varphi(k) = kX - \omega(k),$$

οπότε $\varphi'(k) = 0$ (για κάποιο στάσιμο σημείο k_0) σημαίνει ότι $X - \omega'(k_0) = 0$, δηλ.

$$X = \frac{x}{t} = \omega'(k_0).$$

Ισοδύναμα, αν η συνάρτηση ω' έχει αντίστροφη,

$$k_0 = (\omega')^{-1}\frac{x}{t} \equiv k_0\,\frac{x}{t}.$$

Έτσι, τελικά, για μια ΜΔΕ με διασπορά:

$$u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0(k_0)}{\sqrt{2\pi t\,|\varphi''(k_0)|}}\; e^{i\varphi(k_0)t + i\mu\frac{\pi}{4}} \qquad (9)$$

(*) Βλ. τον υπολογισμό για την απόδειξη της (7) στο Παράρτημα παρακάτω.

Η τελευταία εξίσωση μπορεί επίσης να γραφεί γενικά:

$$u(x,t) \sim \frac{A(\frac{x}{t})}{\sqrt{t}} \exp\left[i\varphi(k_0)t\right] \qquad (10)$$

όπου $A(x/t)/\sqrt{t}$ είναι το (μιγαδικό) πλάτος της λύσης, που μεταβάλλεται αργά και αποσβέννυται με το χρόνο.

Σημειώνεται ότι επειδή $\omega' \equiv \partial\omega/\partial k$ είναι η ταχύτητα ομάδας v_g, η μέθοδος της στάσιμης φάσης δείχνει ότι η κύρια συνεισφορά στην ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της ΜΔΕ με διασπορά προέρχεται από μια περιοχή που κινείται με v_g. Η ταχύτητα αυτή είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα αργά μεταβαλλόμενο "κυματοπακέτο", και είναι ίδια με την ταχύτητα διάδοσης της ενέργειας.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την "ελεύθερη" (εν απουσία εξωτερικού δυναμικού) εξίσωση Schrödinger, στην ακόλουθη μορφή:

$$iu_t + u_{xx} = 0 \qquad (1)$$

Η εξίσωση αυτή έχει μια σχέση διασποράς, που βρίσκεται υποθέτοντας λύσεις της μορφής $u = u_0 \exp[ikx - \omega(k)t]$. Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$\omega(k) = k^2 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι $\omega \in \mathbb{R}$ και $\omega''(k) = 2 \neq 0$, οπότε η εξίσωση παρουσιάζει διασπορά. Θεωρούμε ως αρχική συνθήκη την

$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

και χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier μπορούμε να βρούμε τη λύση της (1):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{i(kx - k^2 t)}\, dk \qquad (3)$$

όπου $\hat{u}_0(k)$ είναι ο μετ/σμός Fourier της $u_0(x)$.

Θα εφαρμόσουμε τώρα τη μέθοδο στάσιμης φάσης, οπότε γράφουμε την (3) ως

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{i\varphi(k)t}\, dk$$

όπου

$$\varphi(k) = kX - k^2 \quad \text{και} \quad X = \frac{x}{t}.$$

Η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από το στάσιμο σημείο k_0 που προκύπτει από την

$$\varphi'(k_0) = 0 \Rightarrow X - 2k_0 = 0 \Rightarrow k_0 = \frac{x}{2t}.$$

Σημειώνοντας ότι στην περίπτωσή μας είναι $\varphi''(k_0) = -2 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\varphi''(k_0)) = -1$, η ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης $u(x,t)$ είναι:

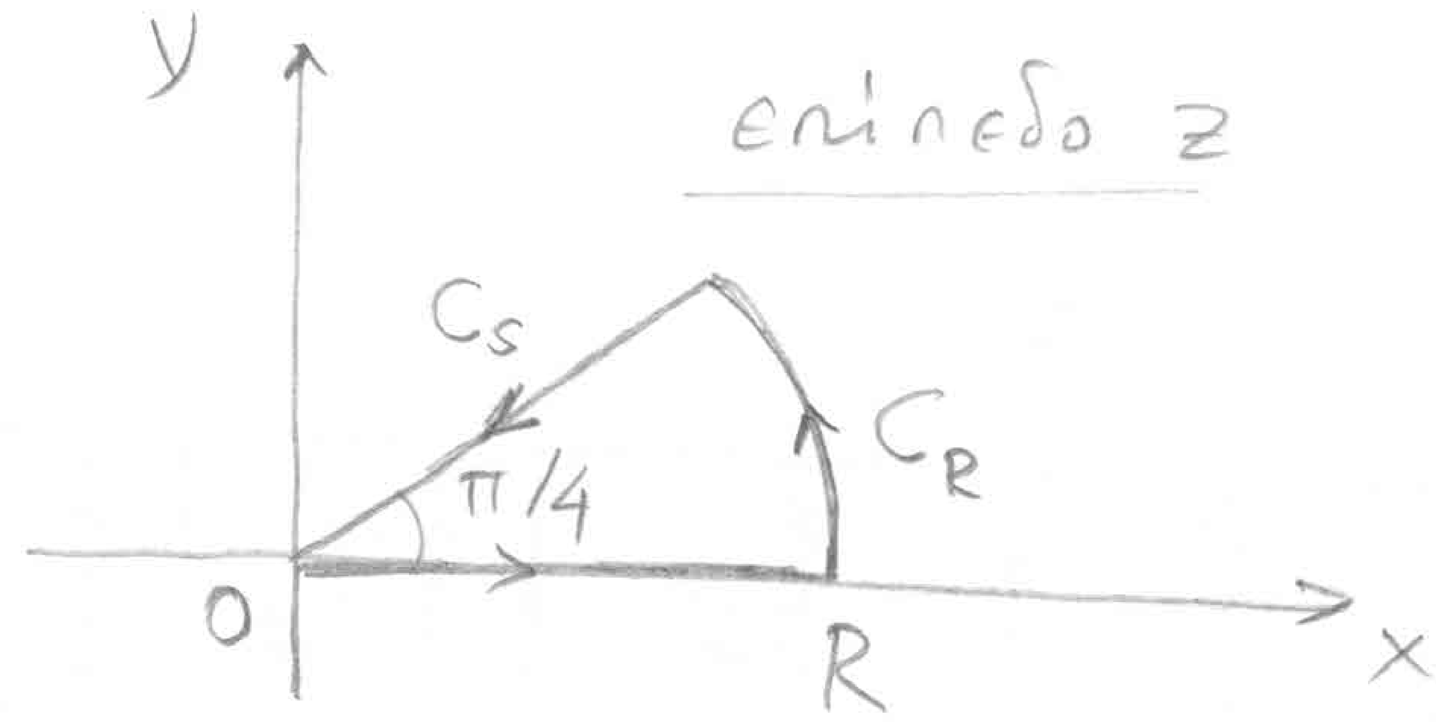
$$u(x,t) \sim \frac{\hat{u}_0\left(\frac{x}{2t}\right)}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[i\left(\frac{x}{2t}\right)^2 t - i\frac{\pi}{4}\right]$$

[Σημειώνεται ότι η φάση $\varphi(k_0)t$ στο εκθετικό είναι
$$\varphi(k_0)t = \left(k_0\frac{x}{t} - k_0^2\right)t = \left[\frac{x^2}{2t^2} - \left(\frac{x}{2t}\right)^2\right]t = \left(\frac{x}{2t}\right)^2 t.$$
]

Παράρτημα

Υπολογισμός του ολοκληρώματος: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu\xi^2}\, d\xi$, $\mu = \pm 1$

Ας θεωρήσουμε $\mu = +1$, οπότε έχουμε να υπολογίσουμε το $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}\, d\xi$. Το ολοκλήρωμα αυτό θα το υπολογίσουμε μέσω του $I = \int_C e^{iz^2}\, dz$, $z \in \mathbb{C}$, όπου C είναι η κλειστή διαδρομή του σχήματος.



Έτσι: $$I = \int_C e^{iz^2}\, dz = \left(\int_0^R + \int_{C_R} + \int_{C_s}\right) e^{iz^2}\, dz = 0$$

(από το Θεώρημα του Cauchy).

* Για το ολοκλήρωμα στην C_s:

$z \in C_s \Rightarrow z = r e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow dz = e^{i\frac{\pi}{4}}\, dr$ και $iz^2 = -r^2$, οπότε:

$$\int_{C_s} e^{iz^2}\, dz = -\int_0^R e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\, dr \longrightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ για } R \to \infty$$

* Για το ολοκλήρωμα στη C_R:

$z \in C_R \Rightarrow z = Re^{i\theta} \Rightarrow dz = iRe^{i\theta}\, d\theta$ και

$iz^2 = iR^2 e^{i2\theta} = iR^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$

Άρα:

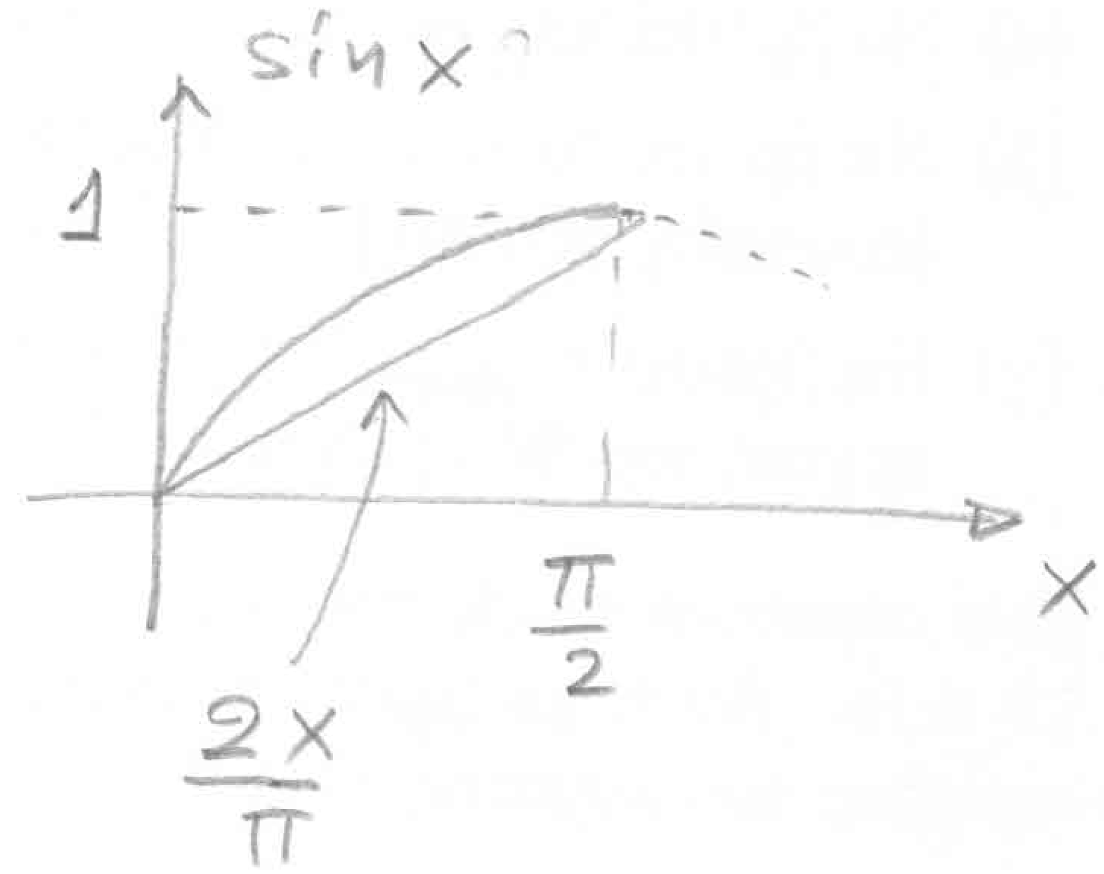
$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}\, iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

οπότε

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left|e^{iR^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)}\, iRe^{i\theta}d\theta\right|$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta} R\,d\theta = R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}d\theta$$

Όμως, όπως φαίνεται στο σχήμα, $\sin x \le \frac{2x}{\pi}$ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$\Rightarrow \sin 2\theta \le \frac{4\theta}{\pi}$, $\theta \in [0, \pi]$

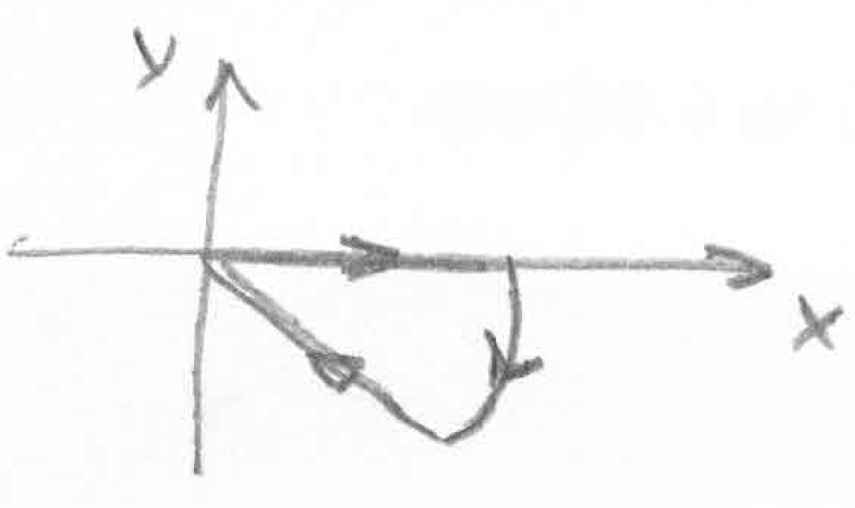
οπότε:

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}dz\right| \le R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\frac{4\theta}{\pi}}d\theta = -\frac{\pi}{4R}\left(1-e^{-R^2}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Τέλος, $\int_0^R e^{iz^2}dz = \int_0^R e^{i\xi^2}d\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\int_0^{+\infty} e^{i\xi^2}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^2}d\xi$ χρησιμοποιούμε το δρόμο



και βρίσκουμε αντίστοιχα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Άρα: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu\xi^2}d\xi = \sqrt{\pi}e^{i\mu\frac{\pi}{4}}, \ \mu = \pm 1}$