Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2017-18
ΜΜΦ Ι - Φυλλάδιο 1

1. Χρησιμοποιώντας την καρτεσιανή μορφή των z, w αποδείξτε ότι η εξίσωση $z^2 = w$ με $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, έχει ακριβώς δύο λύσεις.

2. Έστω
$$f(z) = \frac{az + b}{\overline{a} + \overline{b}z},$$
όπου $|a| \neq |b|$. Να δειχθεί ότι αν $|z| = 1$ τότε $|f(z)| = 1$.

3. Έστω η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{z^3 - 2i}{2z^3 + 3 - 4i}.$$
Να δειχθεί ότι αν $|z| < 1$ τότε $|f(z)| < 1$.

4. Χρησιμοποιώντας τον τύπο de Moivre βρείτε τριγωνομετρικές ταυτότητες για τα $\cos 4\theta$ και $\sin 4\theta$.

5. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το $\overline{z_0}$ είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40$$
αφού επαληθευτεί ότι το $2 - i$ είναι μία ρίζα.

6. Να γραφεί σε πολική μορφή ο αριθμός
$$\frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3} - i)^{13}}.$$

7. Έστω $z_0, \ldots, z_{n-1}$ οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = w$ ($w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \geq 2$). Αποδείξτε αναλυτικά (και όχι γεωμετρικά) ότι $z_0 + \ldots z_{n-1} = 0$. *[Υπόδειξη: Σχετίστε τις λύσεις z_k με τις λύσεις ω_k, $k = 0, \ldots, n-1$, της εξίσωσης $\omega^n = 1$.]*

8. Να υπολογιστούν οι $\mathrm{Log}(1-i)$, $\log(1-i)$ και $\mathrm{Log}(-1)$.

9. Να υπολογιστεί το i^i.

10. Να λυθεί η εξίσωση $\cos z = 2$.

11. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι $\lim z^n = 0$ αν και μόνο αν $|z| < 1$.

12. Έστω $|z| < 1$ και $w_n = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots(1+z^{2^n})$. Να δειχθεί ότι
$$\lim w_n = \frac{1}{1-z}.$$

13. Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) z^n , \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

14. Να εξεταστεί αν υπάρχει το

$$\lim_{z \to 0} \frac{\overline{z}}{z}.$$

15. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x+iy}, & x+iy \neq 0, \\ 0, & x+iy = 0. \end{cases}$$

16. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό και f αναλυτική στο A. Να δειχθεί ότι αν $f' = 0$ τότε η f είναι σταθερή.

17. Έστω $A \subset \mathbb{C}$ ανοικτό και συνεκτικό και $g : A \to \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι αν οι g και $\overline{g}$ είναι κι οι δύο αναλυτικές τότε η g είναι σταθερή.

18. Να δειχθεί ότι οι συνθήκες Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}{}_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta. \end{cases}$$

19. Να εξεταστούν ως προς τη διαφορισιμότητα η συνάρτηση $f(z) = |z|^2$ και $g(z) = z\mathrm{Re}(z) + \overline{z}\mathrm{Im}(z) + \overline{z}$.

20. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $z = 0$, ωστόσο οι συνθήκες Cauchy-Riemann ικανοποιούνται στο σημείο αυτό.

21. Να δειχθεί ότι η $u(x,y) = e^y \sin x + xy$ είναι αρμονική συνάρτηση. Να βρεθεί η συζυγής αρμονική $v(x,y)$ καθώς και η συνάρτηση $f = u + iv$.

22. (α) Έστω $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ακτινικά συμμετρική συνάρτηση,

$$u(x,y) = f(r) , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Να δειχθεί ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε

$$(\Delta u)(x,y) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) .$$

(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική.