Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2017-18
ΜΜΦ Ι - Φυλλάδιο 2

1. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $f_n(z) = z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(r)$ για κάθε $r < 1$ αλλά όχι στο $D(1)$.

2. Να δειχθεί ότι η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{(i-1)nz}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E_\alpha = \{x + iy \,:\, x + y \geq \alpha\}$ για κάθε $\alpha > 0$.

3. Να δειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{i + \overline{z}^{2n}}$$
συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{D}(r)$ για κάθε $r < 1$.

4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{S(3)} \frac{(z-1)e^{i\pi z}}{z^3 + 2z^2 + z} dz\,.$$

5. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|b| < 1$. Για $n \in \mathbb{N}$ να υπολογιστεί το
$$\int_{S(1)} \Big(\frac{z-a}{z-b}\Big)^n dz\,.$$

6. Έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\theta \, d\theta = \pi f(0) + \frac{\pi}{4} f''(0)\,.$$

7. Να δειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\int_0^{\pi} e^{\alpha \cos\theta} \cos(\alpha \sin\theta) d\theta = \pi.$$
[*Υπόδειξη.* Θεωρείστε το $\int_{S(1)} e^{\alpha z}/z \, dz$.]

8. Έστω f αναλυτική στο σύνολο A και $\overline{D}(z_0, r) \subset A$. Να αποδειχθεί ότι
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta\,.$$

9. Έστω $f = u + iv$ ακέραια συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν η u είναι κάτω φραγμένη τότε η f είναι σταθερή.

10. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq c(1+|z|^{5/2})$ για κάποιο $c > 0$ και όλα τα $z \in \mathbb{C}$. Να αποδειχθεί ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο.

11. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq |z|^{9/8}$. Αν $f(-i) = 1/3$, να βρεθεί το $f(2)$.