

Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2019-20  
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. Να γραφούν σε πολική μορφή οι αριθμοί

$$z = \frac{(1-i)^{23}}{(\sqrt{3}-i)^{13}}, \quad w = \frac{1}{1 + \cos t + i \sin t} \quad (t \in (-\pi, \pi)).$$

2. Να βρεθούν (στη μορφή  $x + iy$ ) οι κυβικές ρίζες του αριθμού  $-1/(1+i)$ .

3. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 3 - 5i}.$$

Ναδειχθεί ότι αν  $|z - i| < 2$  τότε  $|f(z)| < 1$ .

4. Έστω  $a, b \in \mathbb{C}$  με  $|a| \neq |b|$ . Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{az + b}{\bar{a} + \bar{b}z}$$

απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο  $S(1)$  στον εαυτό του.

5. (i) Έστω  $p(z)$  πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Ναδειχθεί ότι αν το  $z_0$  είναι ρίζα του  $p(z)$  τότε και το  $\bar{z}_0$  είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου

$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40$$

αφού επαληθευτεί ότι το  $2 - i$  είναι μία ρίζα.

6. Να αποδειχθεί ότι για κάθε  $z, w \in \mathbb{C}$  ισχύει  $|1+z\bar{w}|^2 + |z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$ .

7. Έστω  $z_1, z_2, z_3$  μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδειχθεί ότι

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3.$$

8. Να υπολογιστεί το  $i^i$ .

9. Ναδειχθεί ότι  $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$  ως πλειότιμες συναρτήσεις.

10. Αποδείξτε ότι  $\log z^2 \neq 2 \log z$  (ως πλειότιμες συναρτήσεις). Όμως  $\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2$ . Τι συμβαίνει ;

11. Ναδειχθεί ότι ένα σύνολο  $A \subset \mathbb{C}$  είναι ανοικτό αν και μόνο αν το συμπλήρωμά του  $\mathbb{C} \setminus A$  είναι κλειστό.

12. Να βρεθεί για ποιες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$  υπάρχει στο  $\mathbb{C}$  το

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^\alpha}{z^2}.$$