28.

(*) Για παράδειγμα, αν A ένας ανοιχτός δίσκος, τότε ένα z_0 στο σύνορό του $\notin A$, όμως είναι σημείο συσσώρευσης και έτσι μπορούμε να μιλάμε για $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Γράφουμε τότε : $\boxed{\lim_{z\to z_0} f(z) = w}$ ή $\boxed{f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} w}$

Η ιδέα είναι ότι $\forall \varepsilon > 0$ η απόσταση του $f(z)$ από το w γίνεται ΟΣΟΔΗΠΟΤΕ ΜΙΚΡΗ, αρκεί η απόσταση του z από το z_0 να είναι μικρή.

Παρατήρηση : Το $f(z_0)$ δεν έχει σημασία στον ορισμό, καθώς το z_0 μπορεί να $\notin A$ (*)

Πρόταση (κριτήριο μεταφοράς) :

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 σ. σ. του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} w$

ii) Αν $(z_n) \subseteq A$, $z_n \neq z_0$, $z_n \to z_0$, τότε $f(z_n) \to w$

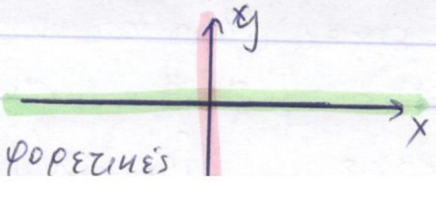
Παράδειγμα : Να εξετασθεί αν υπάρχει το $\lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$

Έστω $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$. Έχουμε $f(x+iy) = \frac{x-iy}{x+iy}$

Το $z \to z_0 \iff \begin{cases} x \to x_0 \\ y \to y_0 \end{cases}$, δηλ. $(x,y) \to (x_0, y_0)$.

Εδώ παρατηρούμε το εξής: i) $x=0$: $f(x+iy) = \frac{-iy}{iy} = \underline{\underline{-1}}$

ii) $y=0$: $f(x+iy) = \frac{x}{x} = \underline{\underline{1}}$



Με 2 διαφορετικές

Εναλλακτικά, $z = re^{i\theta}$. Εδώ $z \to 0 \iff r \to 0$.

$$f(z) = \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = e^{-2\theta i}$$

$$* \quad \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

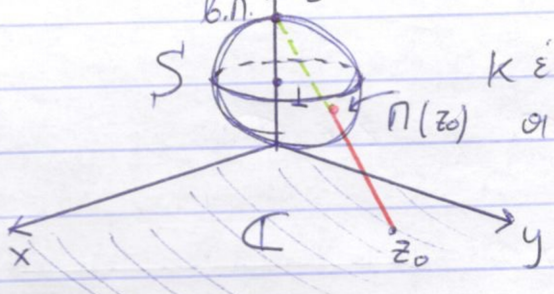
Πρόταση: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ σ.σ. του A και $f = u + iv$ (συντομογραφία). Έστω ακόμα $w = a + bi$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$

ii) $$\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = a \\ \text{και} \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = b \end{cases}$$

Το κατ' εξοχήν σημείο (∞)

Η σφαίρα του Riemann



κέντρο $(0, 0, 1)$

ακτίνα 1.

βόριος πόλος $(0, 0, 2)$

$\Pi(0) = (0, 0, 0) =$ νότιος πόλο

Στερεογραφική προβολή : $\mathbb{C} \to S'$

$\Pi(\mathbb{C}) = \{\Pi(z) : z \in \mathbb{C}\} = S' \setminus \{β.π.\}$

"Ορισμός" : Ονομάζουμε άπειρο ή κατ' εξοχήν σημείο και συμβολίζουμε με ∞.

Ορισμός : Το σύνολο $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ονομάζεται συμπαγές $\mathbb{C}$.

Επεκτείνουμε την στερεογραφική προβολή π από το $\mathbb{C}$ στο $\overline{\mathbb{C}}$, θέτοντας $\Pi(\infty) = β.π.$

Άρα η $\Pi : \overline{\mathbb{C}} \to S'$ είναι 1-1 και επί.

Η π είναι συνεχής και η Π^{-1} επίσης είναι συνεχής.

Αυτό είναι σαν να πέρνουμε την κλειστή θήκη του $\mathbb{C}$ (βλ. βιβλίο), δηλ. πέρνουμε το ∞ και το βάζουμε στα σημεία του $\mathbb{C}$.

Ορισμός : Επεκτείνουμε τις πράξεις του $\mathbb{C}$ στο $\overline{\mathbb{C}}$ ως εξής :

$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad , \quad z \in \mathbb{C}$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$z \cdot \infty = \infty \quad , \quad z \neq 0$

$\frac{z}{\infty} = 0$

Προσοχή! $\infty + \infty = \infty$ **ΟΧΙ!**

Ορισμός: Έστω f μία συνάρτηση. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, αν $\underbrace{\forall M>0}_{\text{κάτι μεγάλο}}$ $\underbrace{\exists \delta>0}_{\text{κάτι μικρό}}$: αν $0<|z-z_0|<\delta$, τότε $|f(z)|>M$.

Ορισμός: Έστω f μία συνάρτηση. $\lim_{z\to\infty} f(z) = w$, αν $\underbrace{\forall \varepsilon>0}_{\text{μικρό}}$ $\underbrace{\exists M>0}_{\text{μεγάλο}}$: αν $|z|>M$, τότε $|f(z)-w|<\varepsilon$.

Ορισμός: Έστω f μία συνάρτηση. $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, αν $\underbrace{\forall M>0}_{\text{μεγάλο}}$ $\underbrace{\exists K>0}_{\text{μεγάλο}}$: αν $|z|>K$, τότε $|f(z)|>M$.

Πρόταση (όριο και πράξεις)

Έστω $f,g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Έστω $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ και έστω ότι

$$f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} A, \qquad A, B \in \overline{\mathbb{C}}$$
$$g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} B$$

Τότε,

i) $\lim_{z\to z_0}(f(z) \pm g(z)) = A \pm B$

ii) $\lim_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z)) = A \cdot B$

iii) $\lim_{z\to z_0}\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right) = \frac{A}{B}$

εφόσον η πράξη στο β' μέλος ορίζεται (αλλιώς, απροσδιοριστία).

Ορισμός: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και το $z_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο z_0 αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: αν $|z_0 - z_0| < \delta$, τότε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Παρατήρηση: Αν το z_0 είναι σ.σ. του A, τότε f συνεχής στο z_0 $\boxed{\Leftrightarrow}$ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Πρόταση (κριτήριο μεταφοράς):

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in A$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) f συνεχής στο z_0

ii) Αν $(z_n) \subset A$, $z_n \to z_0$, τότε $f(z_n) \to f(z_0)$

Πρόταση: Το άθροισμα, το γινόμενο, το πηλίκο και η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συναρτήσεις

Πρόταση: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$. Έστω $z_0 \in A$ $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε η f είναι συνεχής στο z_0 αν και μόνο αν οι $u(x,y)$, $v(x,y)$ είναι συνεχείς στο (x_0, y_0).

Πρόταση: Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Τότε τ.α.ε.ι.:

i) f συνεχής

ii) A ανοιχτό $\Rightarrow$ $f^{-1}(A)$ ανοικτό.

iii) K κλειστό => $f^{-1}(K)$ κλειστό

* Θυμίζουμε ότι $f^{-1}(A) = \{ z : f(z) \in A \}$

6. Καμπύλες.

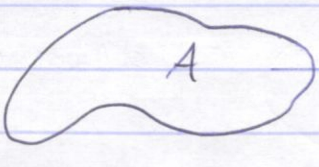
Ορισμός: Ονομάζουμε **καμπύλη** μια συνεχή συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. Άρα $\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$.

Εντελώς ανάλογο της ανάλυσης 2: $\vec{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$.

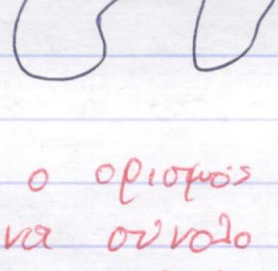
Ορισμός: Το σύνολο $\{ \gamma(t) : t \in [a,b] \}$ ονομάζεται **ίχνος** της καμπύλης γ.

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται **κατά δρόμους συνεκτικό**, αν $\forall z_1, z_2 \in A$ $\exists$ καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τ.ω. $\gamma(a) = z_1$, $\gamma(b) = z_2$, και $\gamma(t) \in A$ $\forall t \in [a,b]$

Παράδειγμα:



συνεκτικό



όχι συνεκτικό, $A = A_1 \cup A_2$

Με άλλα λόγια, ο ορισμός μας λέει ότι για να είναι συνεκτικό ένα σύνολο πρέπει να αποτελείται από "ένα κομμάτι", δηλ. όχι ένωση συνόλων

23/10/2018 # Διάλεξη 6η

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ λέγεται συνεκτικό αν δεν υπάρχουν ανοιχτά σύνολα V_1, V_2 τ.ω.

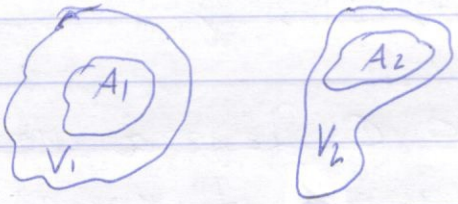
i) $A \subset (V_1 \cup V_2)$

ii) $A \cap V_1 \neq \emptyset$ και $A \cap V_2 \neq \emptyset$

iii) $A \cap (V_1 \cap V_2) = \emptyset$

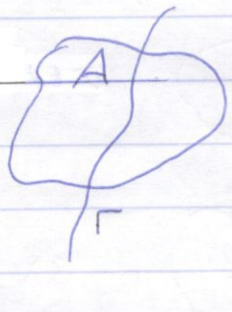
Παράδειγμα:

$A = A_1 \cup A_2$



όχι αλλά συνεκτικό.

Παράδειγμα:



αλλά συνεκτικό

Έστω καμπύλη Γ

i) Η Γ δεν περιέχεται ούτε στο V_1 ούτε στο V_2.

ii) Το V_1 περιέχει την Γ, ενώ το V_2 δεν την περιέχει.

Τότε το V_1 δεν είναι ανοιχτό.

iii)

V_1, V_2 ανοιχτά και επικαλύπτονται, τότε <u>δεν</u> ισχύει

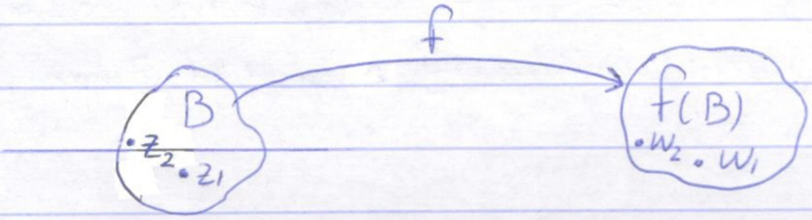
$$A \cap (V_1 \cap V_2) = \emptyset$$

Πρόταση: Αν το $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοιχτό, τότε είναι συνεκτικό <=> είναι κατά δρόμους συνεκτικό.

Πρόταση: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής και $B \subseteq A$. Τότε,

i) B συνεκτικό => f(B) = συνεκτικό
ii) B κατά δρόμους συνεκτικό => f(B) κατά δρόμους συνεκτικό.

Αποδ. (ii): Έστω $w_1, w_2 \in f(B)$. Τότε $\exists z_1, z_2 \in B$: $w_1 = f(z_1)$ και $w_2 \in f(z_2)$



Αφού το B κατά δρόμους συνεκτικό, $\exists$ καμπύλη $\gamma : [0,1] \to B$ τέτοια ώστε $\gamma(t) \in B$, $\forall t \in [0,1]$. $\gamma(0) = z_1$, $\gamma(1) = z_2$.

Έστω $\tilde{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,1]$. Η $\tilde{\gamma}$ είναι καμπύλη.
$\tilde{\gamma}(0) = f(\gamma(0)) = f(z_1) = w_1$
$\tilde{\gamma}(1) = w_2$.
$\tilde{\gamma}(t) = f(B)$, αφού $\gamma(t) \in B$ $(t \in [0,1])$.

Ορισμός: Ένα σύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ ονομάζεται συμπαγές αν είναι κλειστό και φραγμένο.

K φραγμένο $\Leftrightarrow \exists M>0$ τ.ω. $|z| \leq M \; \forall z \in K \Leftrightarrow K \subset \overline{D}(M)$.

Συμπαγοποίηση ενός σημείου του R, ένας κύκλος 

Πρόταση: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν το $K \subset A$ είναι συμπαγές, τότε και το $f(K)$ είναι συμπαγές.

(δεν μπορώ να πω ότι από κλειστό σε κλειστό ή από κλειστό σε φραγμένο)

Πρόταση: Έστω $f : K \subseteq \mathbb{C} \to R$ συνεχής, όπου K συμπαγές. Τότε η f λαμβάνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή : $\exists$ z_{min} και z_{max} $\in K$.

6. Σειρές Μιγαδικών αριθμών.

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$: σειρά μιγ. αριθμών

Ορισμός: Η ακολουθία $S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$ ονομάζεται ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει αν η ακολουθία (S_n) των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει.

Αν $z = \lim S_n$, τότε γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z$, όπου z είναι το άθροισμα της σειράς.

Ορισμός: Λέμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ συγκλίνει απόλυτα αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < +\infty$$

δηλ. αν η $\sum |z_n|$ συγκλίνει.

Πρόταση: Αν μία σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει.

Πρόταση: Έστω ότι (i) $\lim \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = l$ ή (ii) $\lim \sqrt[n]{|z_n|} = l$.

Τότε, (i) αν $l < 1$ η $\sum z_n$ συγκλίνει απόλυτα
(ii) αν $l > 1$ τότε η $\sum z_n$ αποκλίνει.

Παράδειγμα: Να εξετασθεί αν συγκλίνει η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{(n+i)^2}{(1-3i)^n}}_{z_n}$$

Εφαρμόζουμε κριτήριο λόγου, άρα έχουμε

$$\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \frac{\dfrac{((n+1)!)^2 |n+1+i|^2}{(2(n+1))! |1-3i|^{n+1}}}{\dfrac{(n!)^2 |n+i|^2}{(2n)! |1-3i|^n}} = \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \cdot \frac{2n!}{(2(n+1))!} \cdot \frac{|n+1+i|^2}{|n+i|^2} \cdot \frac{1}{|1-3i|}$$

$$= (n+1)^2 \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \cdot \frac{(n+1)^2+1}{} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

7. Ακολουθίες μιγαδικών συναρτήσεων

(f_n) $f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

π.χ. $f_n(z) = z^n$, $z, z^2, z^3, \ldots$

Ορισμός: Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων (ή $f_n(z)$). Λέμε ότι η (f_n) τείνει στην $f(z)$ κατά σημείο ή σημειακή στο $A \subseteq \mathbb{C}$ αν $f_n(z) \to f(z)$ $\forall z \in A$

Άρα, $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ στο A, αν $\forall z \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: αν $n > n_0$, τότε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

29/10/2018 # Διάλεξη 7η

Υπενθύμιση: $f_n : A \to \mathbb{C}$ $f_n \to f$ σημειακά στο A.
$f : A \to \mathbb{C}$
αν $\forall z \in A$, $f_n(z) \to f(z)$ δηλ.

(*) $\forall z \in A$, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. αν $n > n_0$, τότε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

Ορισμός: Λέμε ότι η f_n τείνει στην f ομοιόμορφα στο A αν
(* *) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. αν $n > n_0$, τότε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in A$.

Στην (*) : $n_0 = n_0(\varepsilon, z)$, ενώ στην (**) : $n_0 = n_0(\varepsilon)$

Άρα, η ομοιόμορφη σύγκλιση => κατά σημείο σύγκλιση.

Παρατήρηση: Έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Ορίζουμε $b_n := \sup_{z\in A} |f_n(z) - f(z)|$

πιο σύντομο

$\sup\{ |f_n(z) - f(z)| : z \in A \}$

Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists$ τότε $n_0 \in N$: αν $n > n_0$, τότε $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ $\forall z \in A$. Άρα,

άνω φράγμα του $\{|f_n(z) - f(z)| : z \in A\}$

$$0 \le b_n = \sup \underbrace{|f_n(z) - f(z)|}_{\text{κάθε άνω φράγμα} \ \ge\ \sup} \le \boxed{\varepsilon} \quad , \quad \text{άρα} \quad b_n \to 0.$$

Επίσης ισχύει $|f_n(z) - f(z)| \le b_n$, $\forall z \in A$.

Πρόταση: Έστω $f_n, f : A \to \mathbb{C}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $f_n \to f$ ομ. στο A.

ii) $\exists$ ακολουθία $(b_n) \subseteq \mathbb{R}_+$ τ.ω.

(1) $|f_n(z) - f(z)| \le b_n$ $\forall n \in N$, $\forall z \in A$.

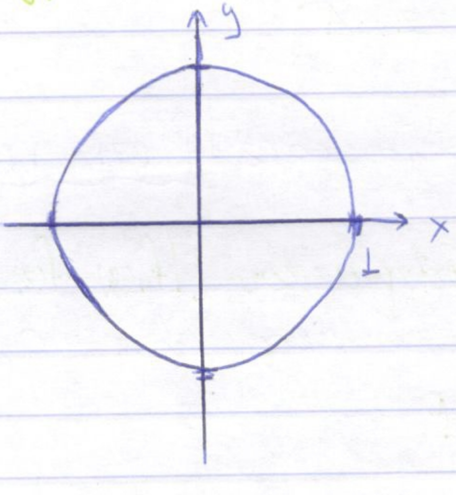
(2) $b_n \to 0$.

Στην παρατήρηση Αποδείξαμε ii) => i)

Παρατήρηση: Έστω (συμβολισμός) $\|g\|_A = \sup_{z\in A}|g(z)|$. Τότε,

$$f_n \to f \text{ ομ. στο } A \iff \|f_n - f\|_A \to 0.$$

Παράδειγμα: Ν.δ.ο. η ακολουθία $f_n(z) = z^n$ συγκλίνει ομ. στον $\underbrace{\overline{D}(r)}_{\text{κλειστός δίσκος}}$, $\forall r<1$, αλλά όχι στον $D(1)$ (παρόλο $D(1) = \bigcup_{r<1} \overline{D}(r)$)



Έχουμε $z^n \to 0$, $\forall z \in D(1)$
($|z^n| = |z|^n \to 0$)

Έστω $r<1$, θα δείξουμε ότι $z^n \to 0$ ομοιομ. στο $\overline{D}(r)$.

α) Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση. Έστω $z \in \overset{|z|\le r}{\overline{D}(r)}$, έχουμε

$$\underbrace{|z^n - 0|}_{\overset{\|}{|f_n(z) - f(z)|}} = |z^n| = |z|^n \underset{1}{\le} \underset{b_n}{\boxed{r^n}} \underset{2}{\to} 0 \quad (\text{πρόταση}).$$

Άρα, από την πρόταση: $z^n \to 0$ ομ. στο $\overline{D}(r)$.

β) Θ.δ.ο. δεν έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο $D(1)$. Έστω ότι $z^n \to 0$ ομ. στο $D(1)$, τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0$, $|z^n| < \frac{1}{2}$, $\forall z \in D(1)$. Ειδικότερα, $|z^{n_0+1}| < \frac{1}{2}$, $\forall z \in D(1)$. Άρα, $\lim_{z\to 1} |z^{n_0+1}| \le \frac{1}{2}$, όμως $\lim_{z\to 1} |z^{n_0+1}| = \boxed{1 \le \frac{1}{2}}$

ΑΤΟΠΟ

Ορισμός: Λέμε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει κατά σημείο (αντίστοιχα ομοιόμορφα) στο $A \subseteq \mathbb{C}$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z)$ συγκλίνει κατά σημείο (αντίστοιχα ομοιόμορφα στο A).

Πρόταση (M- Κριτήριο του Weiestrass):

Αν $\exists\, M_n > 0$ τ.ω. i) $|f_n(z)| \leq M_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in A$

ii) $\sum_n M_n < +\infty$

τότε η σειρά $\sum f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο A.

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+i)^3 z^n}{i+2^n z^n}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(r)$, $\forall r < 1/2$.

Έστω $r < \frac{1}{2}$. Έστω $z \in \bar{D}(r)$ $(|z| \leq r < \frac{1}{2})$. Έχουμε τότε,

$$|f_n(z)| = \frac{|(n+i)^3 z^n|}{|i+2^n z^n|} = \frac{|n+i|^3 |z|^n}{|i+2^n z^n|} \leq \frac{|n+i|^3 r^n}{|\underbrace{|i|-|2^n z^n|}_{>0}|} .$$

Έχουμε $|z| \leq r$, άρα $|2^n z^n| \leq (2r)^n < (2\frac{1}{2})^n = 1$

Άρα, $$|f_n(z)| \leq \frac{|n+i|^3 r^n}{|i|-|2^n z^n|} = \frac{|n+i|^3 r^n}{1-2^n |z^n|} \leq \boxed{\frac{|n+i|^3 r^n}{1-2^n r^n}} M_n$$

Θ.δ.ο. $\sum M_n < +\infty$. Κριτήριο λόγου:

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{\dfrac{[(n+1)^2+1]^{3/2}\, r^{n+1}}{1-2^{n+1} r^{n+1}}}{\dfrac{(n^3+1)^{3/2}\, r^n}{1-2^n r^n}} \longrightarrow r < 1$$

Άρα, $\sum M_n < +\infty$.

Άρα από το M-κριτήριο έπεται ότι η $\sum f_n(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(r)$.

30/10/2018 # Διάλεξη 8η

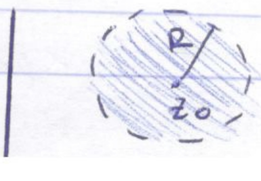
7. Δυναμοσειρές

Ορισμός: Δυναμοσειρά είναι μία σειρά συναρτήσεων της μορφής $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$, όπου z_0 το κέντρο της δυναμοσειράς.

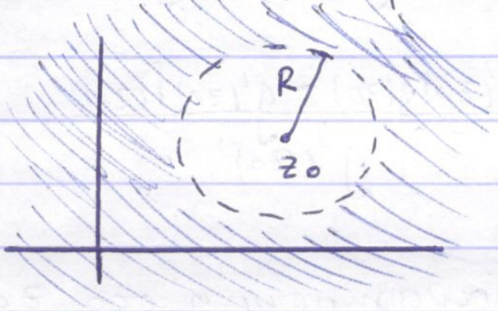
Θεώρημα: $\exists\, R \in [0,+\infty]$:

i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα $\forall z \in D(z_0,R)$

ii) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\bar{D}(z_0,r)$ $\forall r<R$.



iii) Η δυναμοσειρά αποκλίνει $\forall z \notin \bar{D}(z_0, R)$



Επιπλέον, ισχύει ότι:

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ \lim\sqrt[n]{|a_n|} \end{cases}$$, όταν ένα τουλάχιστον από τα δύο όρια ∃.

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $R>0$ είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, τότε χωρίζεται η συνάρτηση

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad z \in D(z_0, R)$$

8. Παράγωγοι

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (A ανοιχτό). Η f λέγεται παραγωγίσιμη στο $z_0 \in A$ αν ∃ το

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

<u>Πρόταση</u>: Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες στο z_0, τότε

i) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

ii) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$

iii) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}$, $g(z_0) \neq 0$

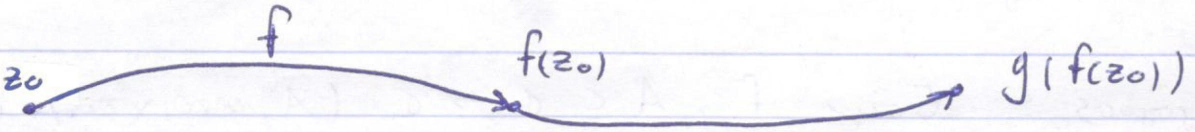
Πρόταση: f παραγωγίσιμη στο z_0 $\Rightarrow$ f συνεχής στο z_0.

Απόδειξη: Έχουμε $f(z) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0) + f(z_0) \Rightarrow$

$$\underset{z\to z_0}{\Rightarrow} f'(z_0)\cdot 0 + f(z_0) = f(z_0)$$

άρα f συνεχής στο z_0.

Πρόταση: Αν f παραγωγίσιμη στο z_0 και g παραγωγίσιμη στο $f(z_0)$, τότε η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και $(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.



Παράδειγμα: Έστω $f(z) = \bar{z}$. Θ.δ.ο. f δεν είναι παραγ. σε κανένα $z_0 \in \mathbb{C}$.

Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$. Τότε, $z = x+iy$ και

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = \frac{x-iy-x_0+iy_0}{(x-x_0)+i(y-y_0)} =$$

$$= \frac{(x-x_0) - i(y-y_0)}{(x-x_0) + i(y-y_0)}$$

Για $y=y_0$ έχω $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = 1$

Για $x=x_0$ έχω $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = -1$

$\Rightarrow$ Το όριο δεν υπάρχ
άρα η f δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο z_0.

Πρόταση (παράγωγοι βασικών συναρτήσεων):

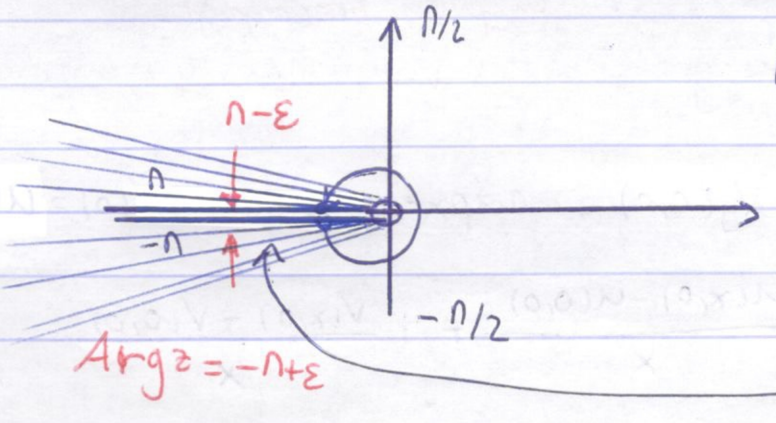
i) $(z^n)' = n z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$

ii) $(e^z)' = e^z$

iii) $(\sin z)' = \cos z$
$(\cos z)' = -\sin z$

iv) $(\log z)' = \frac{1}{z}$, αν επιλέξουμε έναν κλάδο του λογαρίθμου, δηλ. ένα $k \in \mathbb{Z}$

$(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$, εκεί όπου ο $\operatorname{Log} z$ είναι συνεχής στο σύνολο: $\mathbb{C} \setminus \{x+iy : x \leq 0, y<0\}$



$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$

$\operatorname{Arg} z \in \underline{\underline{(-\pi, \pi]}}$

v) $(a^z)' = e^{z\log a}\cdot\frac{1}{a}$, $a, z \in \mathbb{C}$ $\quad (a^z = e^{z\log a})$

vi) $(z^b)' = b\,z^{b-1} = b\frac{z^b}{z}$, $b, z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. $\quad (z^b = e^{b\log z})$

Η σύναρτηση $f(z) = \bar{z} = x - iy$, έχει $u(x,y) = x$ και $v(x,y) = -y$ και οι δύο αυτές είναι απείρως παραγωγ., όμως η f δεν είναι.

Έστω ότι η $f(z)$ παραγωγ. στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, έστω $z_0 = 0$.

Έστω $f = u + iv$, τότε

$$\frac{f(z)-f(0)}{z} = \frac{u(x,y)-u(0,0)+i[v(x,y)-v(0,0)]}{x+iy} = \,|$$

• Για $x=0$: $\quad | = \frac{u(0,y)-u(0,0)}{iy} + \frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}$

$$\xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{i}\underbrace{u_y(0,0)}_{\text{μερική παραγ. της } u \text{ ως προς } y} + \underbrace{v_y(0,0)}_{\text{μερική παράγωγος της } v \text{ ως προς } y.}$$

Άρα οι $u_y(0,0)$, $v_y(0,0)$ υπάρχουν και $f'(0) = v_y(0,0) - i u_y(0,0)$ ①

• Για $y=0$: $\quad | = \frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} + i\,\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}$

$\xrightarrow[x\to 0]{} u_x(0,0) + i\, v_x(0,0)$

Άρα οι $u_x(0,0)$, $v_x(0,0)$ $\exists$ και $f'(0) = u_x(0,0) + i\, v_x(0,0)$ ②

①,② $\Rightarrow$ $u_x(0,0) = v_y(0,0)$ και $v_x(0,0) = -u_y(0,0)$

Θεώρημα: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, A ανοιχτό, $f = u + iv$. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$, τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) f παραγωγ. στο z_0

(ii) Οι u και v έχουν ολικό διαφορικό στο (x_0, y_0) και

$$(*)\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}, \text{ στο } (x_0, y_0).$$

Οι εξισώσεις (*) ονομάζονται εξ. Cauchy - Riemann.

Παρατήρηση: Για την $f(z) = \bar{z}$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. Η πρώτη C-R δεν ισχύει.

Άσκηση (προς λύση): Να βρεθούν τα $z \in \mathbb{C}$ όπου είναι παραγ. η $f(z) = z\,\mathrm{Re}z + \bar{z}\,\mathrm{Im}z + \bar{z}$.

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις $\mathrm{Re}z$, $\mathrm{Im}z$, $\bar{z}$ δεν είναι παραγωγίσιμες.

(48.)

Λύση: Έστω $z = x+iy$, τότε

$$f(z) = (x+iy)x + (x-iy)y + x - iy = x^2 + xy + x + i(xy - y^2 - y)$$

$u(x,y) = x^2 + xy + x$

$v(x,y) = xy - y^2 - y$

Οι u και v έχουν ολικό διαφορικό σε κάθε σημείο.

Έχουμε $u_x = 2x + y + 1$, $v_x = y$

$u_y = x$, $v_y = x - 2y - 1$

άρα οι C-R γράφονται:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 1 = x - 2y - 1 \\ x = -y \end{array}\right\} \Leftrightarrow -y + 1 = -3y - 1 \Leftrightarrow 2y = -2$$

$\Leftrightarrow y = -1$, $x = 1$.

Άρα το μόνο σημείο όπου η f είναι παραγωγίσιμη είναι το $1 - i$.

Έχουμε, $\mathrm{Re}z = \frac{z + \bar{z}}{2} \Rightarrow \bar{z} = 2\mathrm{Re}z - z$, άρα $\mathrm{Re}z$ παραγωγίσιμο.

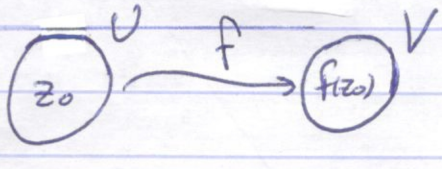
Άσκηση: Ν.δ.ο. οι εξισώσεις C-R σε πολικές συντεταγμένες γράφονται ως

$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$

$v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$.

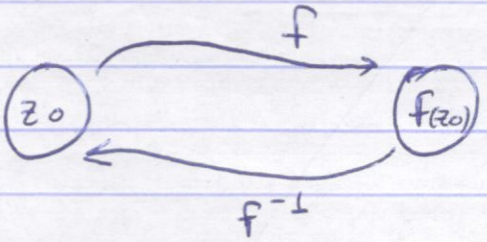
Θεώρημα (αντίστροφης συνάρτησης):

Έστω ότι η $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγ. και έστω ότι $f'(z_0) \neq 0$. Τότε, ∃ ανοικτά σύνολα U, V με $z_0 \in U$, $f(z_0) \in V$



ώστε $f(U) = V$ και η $f: U \to V$ να είναι 1-1 και επί και επιπλέον η $f^{-1}: V \to U$ είναι παραγωγ. και

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f(w))} \quad , \quad w \in V$$



Παρατήρηση: Έστω $f = u + iv$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Έστω $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $G(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$. Τότε,

$$J_{G(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$$

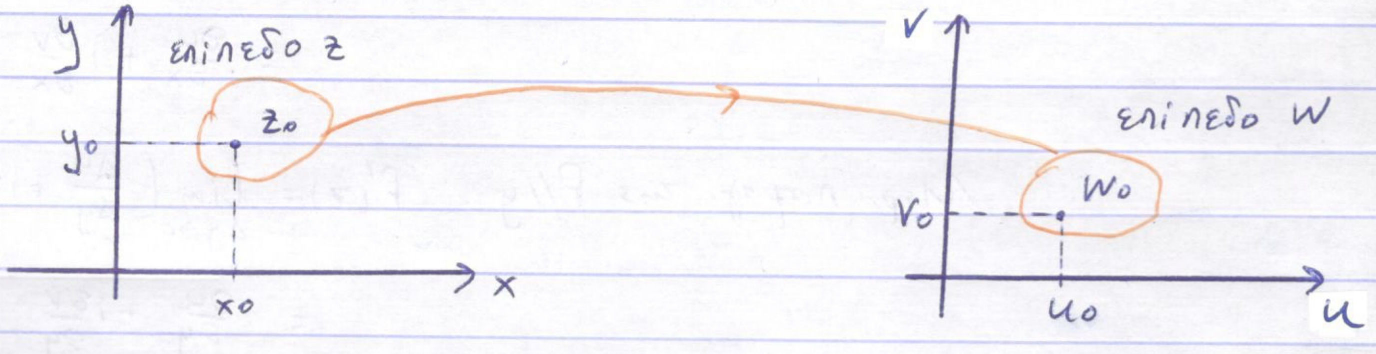
$(f' = u_x + i v_x)$.

05/11/2018 # Διάλεξη 9η (Φρατζεσκάκης).

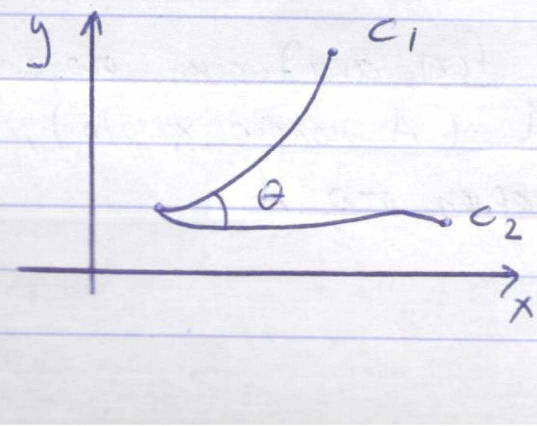
- Απεικονίσεις - σύμμορφες απεικονίσεις
- Ολοκληρωματικοί μετασχηματισμοί { Fourier → μερικές διαφ. εξ
  Laplace → συνήθεις διαφ. εξ

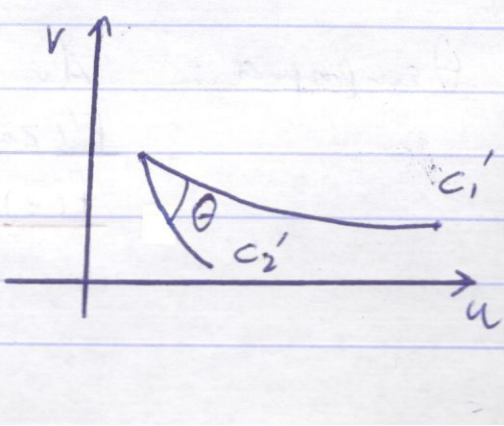
1. Απεικονίσεις - σύμμορφες απεικονίσεις

Αν έχουμε $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy$. μπορούμε να την δούμε ως μία απεικόνιση σημείων από το ένα επίπεδο στο άλλο:



Αν έχουμε $w = f(z)$, η απεικόνιση θα λέγεται σύμμορφη αν η γωνία των c_1, c_2 στο z_0 είναι ίση με την γωνία των c_1', c_2' στο w_0 και κατά μέτρο και κατά φορά.





Ιακωβιανή : $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$. Αν $J \neq 0$, τότε ο μετασχηματισμός είναι 1-1.

$$J = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} .$$

Αν $f(z)$ είναι αναλυτική στο $z = z_0$, C-R : $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Άρα, $J_{z=z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \Big|_{z=z_0} = |f'(z_0)|^2$

* Απόδειξη : Μερ. παραγ. της f//x : $f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) =$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

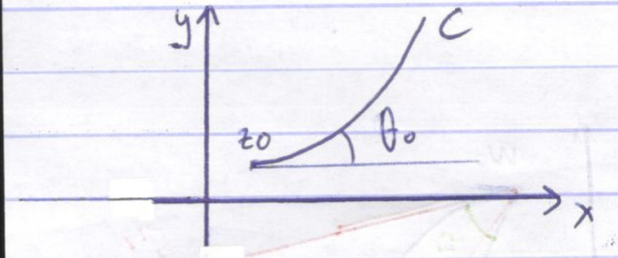
Μερ. παραγ. της f//y : $f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta y} + i\frac{\Delta v}{\Delta y}\right) =$

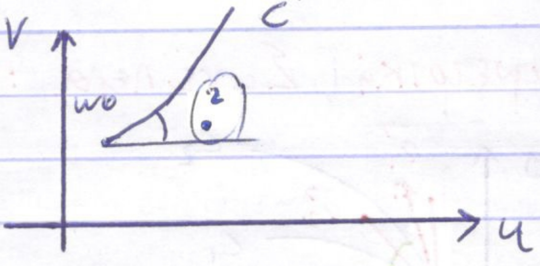
$$= \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} .$$

Από cauchy-Riemman (CR) => $|f'(z)| = J$.

Συνεχίζοντας, $J_{z=z_0} = |f'(z_0)|^2 \neq 0$.

Θεώρημα : Αν $w = f(z)$ με $f(z)$ αναλυτική στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$ $\forall z_0 \in A$ (A κάποιο χωρίο), τότε $f(z)$ είναι σύμμορφη στο A.





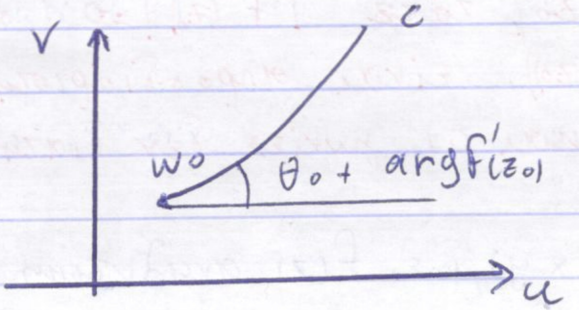
Έστω t η παραμετροποίηση της καμπύλης $z = z(t)$ ή $x = x(t)$ και $y = y(t)$ στο επ. z. $W = W(t)$ ή $u = u(t)$, $V = V(t)$ στο επ. w.

$$\frac{du}{dt} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = f'(z) \frac{dz}{dt}$$

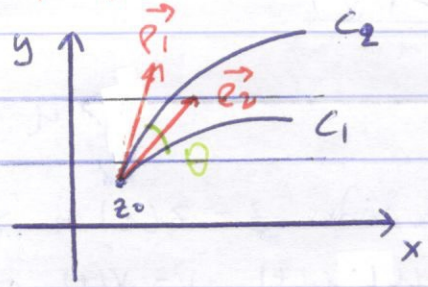
$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = f'(z) \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0}$$

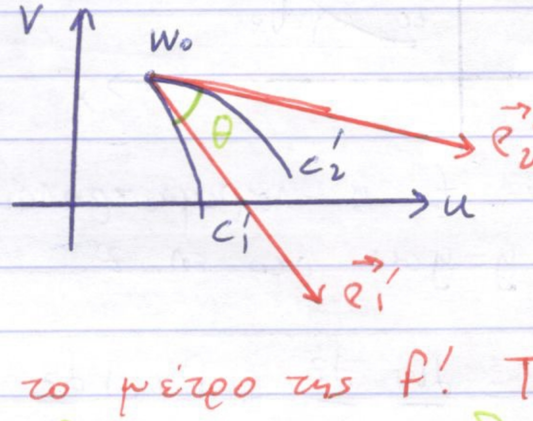
$$\text{Έστω } \underbrace{\left.\frac{dw}{dt}\right|_{w=w_0} = \rho_0 e^{i\varphi_0}, \quad f'(z_0) = R e^{i \arg(f'(z_0))}, \quad \left.\frac{dz}{dt}\right|_{z=z_0} = r_0 e^{i\theta_0}}_{\Leftarrow}$$

$$\rho_0 e^{i\varphi_0} = R r_0 e^{i(\theta_0 + \arg(f'(z_0)))} \Rightarrow \begin{cases} \rho_0 = R r_0 \\ \varphi_0 = \theta_0 + \arg f'(z_0) \end{cases}$$



Γεωμετρική Συνέπεια :





Έχουμε μία μεγέθυνση κατά το μέτρο της f'. Τα $\vec{e}_1\,'$, $\vec{e}_2\,'$ είναι μεγενθυμένα. Η θ παραμένει ίδια.

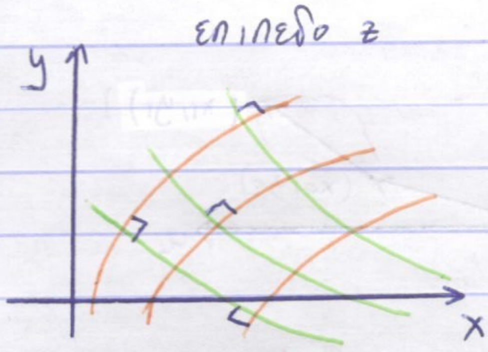
Αν $z \to w = f(z)$ και η αντίστροφη απεικόνιση $w \to z = F(w) \equiv f^{-1}(z)$, τότε

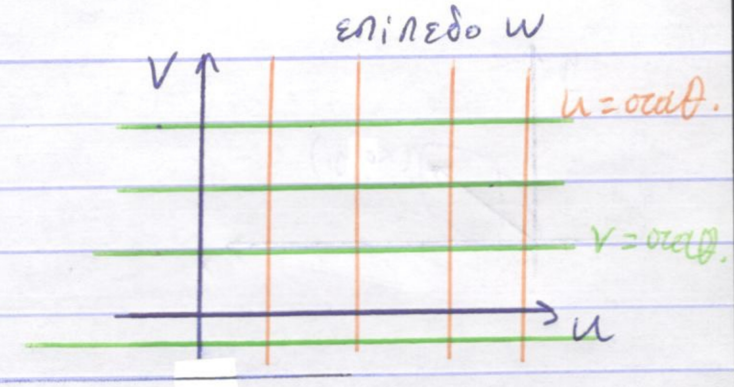
$$\left.\begin{aligned} \frac{dF}{dz} &= \frac{d}{dz}\left(f^{-1}(z)\right) = \frac{dz}{dz} = 1. \\ \frac{dF}{dz} &= \frac{dF}{dw}\cdot\frac{dw}{dz} = \frac{dF}{dw}\cdot f'(z) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dF}{dw} = \frac{1}{f'(z)}$$

Άρα, αν $f(z) = w$ είναι αναλυτική στο z_0 και $f'(z_0) \neq 0$ τότε η $z = F(w)$ είναι επίσης αναλυτική και $F'(w_0) \neq 0$.

Αν $f'(z_0) = 0$ για κάποια z_0, τότε $|f'(z_0)| = 0$ (συντελεστής μεγέθυνσης) και $\arg(f'(z_0))$, είναι απροσδιόριστη $\Rightarrow$ $F(w)$ δεν είναι αναλυτική και οι γωνίες δεν διατηρούνται.

Έστω $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, με $f(z)$ αναλυτική και $f(z) \neq 0$, σε κάποιο τόπο A. Ας θεωρήσουμε τις καμπύλες $u =$ σταθ. και $v =$ σταθ.





Αν είχαμε το δεξί πλέγμα σε χαρτί και το τσαλακώναμε, θα παίρναμε ένα πλέγμα σαν το αριστερό.

Απόδειξη (γωνίες κάθετες ↑):

Έστω $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

f αναλυτική άρα $\Leftrightarrow$ C-R :

$$\left.\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad ①$$

Όμως, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. Άρα,

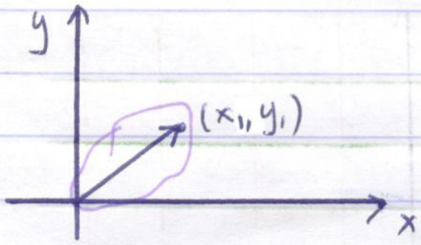
$$\left.\begin{aligned} \vec{\nabla} u &= \hat{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial u}{\partial y} \\ \vec{\nabla} v &= \hat{x}\frac{\partial v}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

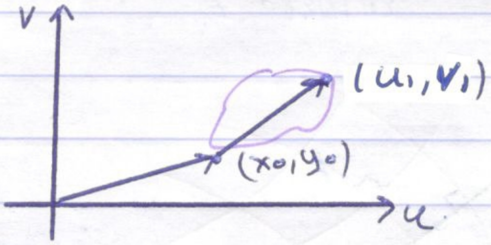
$$\Rightarrow \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \overset{①}{=} 0 \Rightarrow \underline{\vec{\nabla} u \perp \vec{\nabla} v}$$

2. Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

1. Μεταφορά : $\boxed{w = z + z_0}$

$$\left.\begin{aligned} w &= z + z_0 \\ z &= x + iy \end{aligned}\right\} \Rightarrow u + iv = (x + x_0) + i(y + y_0) \Rightarrow \begin{cases} u = x + x_0 \\ v = y + y_0 \end{cases}$$

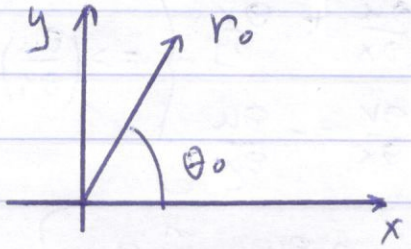


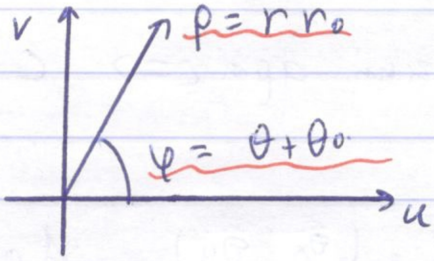


2. Στροφή και μεγέθυνση/σμίκρυνση. : $\boxed{w = z \cdot z_0}$

Αν $\left.\begin{array}{l} w = \rho e^{i\varphi} \\ z = r e^{i\theta} \\ z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \rho e^{i\varphi} = r \cdot r_0 \, e^{i(\theta+\theta_0)} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \rho = r \cdot r_0 \\ \varphi = \theta + \theta_0 \end{array}\right.$

$r_0 < 1$ σμίκρυνση $r_0 > 1$ μεγέθυνση





Παρατήρηση : Ο μετασχ. $w = z \cdot z_0$, στην πραγματικότητα είναι συνδυασμός στροφής ($w = e^{i\theta_0}$) και μεγεθ./σμίκρ. ($w = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

06/11/2018 # Διάλεξη 10η (Μπαρμπάτσης)

Φύλλο ασκήσεων (eclass).

1.)

$$w = \frac{1}{1 + \cos t + i \sin t} \quad , \quad t \neq (2k+1)\pi \; , \; k \in \mathbb{Z}.$$

Να γραφεί σε πολική μορφή.

(56)

$$W = \frac{1}{1+\cos t + i\sin t} = \frac{1+\cos t - i\sin t}{(1+\cos t)^2 + \sin^2 t} = \frac{1+\cos t - i\sin t}{1+\cos^2 t + 2\cos t + \sin^2 t} =$$

$$= \frac{1+\cos t - i\sin t}{2(1+\cos t)} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sin t}{2(1+\cos t)} \underset{=}{\overset{t=2\theta}{=}} \circledast$$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, $1+\cos 2x = \cdots$,

$$\circledast = \frac{1}{2} - i\,\frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2 \epsilon 2 \cos^2 t/2}$$

$$= \frac{1}{2\cos t/2}\left[\cos\frac{t}{2} - i\sin\frac{t}{2}\right] = \frac{1}{2\cos t/2}\left[\cos(-t/2) + i\sin(-t/2)\right]$$

αν $\cos\frac{t}{2} > 0$

Αν $\cos\frac{t}{2} < 0$ τότε, $W = \frac{1}{2|\cos\frac{t}{2}|}\left[-\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right] =$

$$= \frac{1}{2|\cos\frac{t}{2}|}\left[\cos(\pi - \tfrac{t}{2}) + i\sin(\pi - \tfrac{t}{2})\right).$$

3.)

i) $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \in \mathbb{R}$

Ν.δ.ο. αν z_0 ρίζα => $\overline{z_0}$ ρίζα.

Έχουμε
$P(z_0)=0$
άρα $\overline{P(z_0)}=0$.

$$0 = \overline{P(z_0)} = \overline{(a_n z_0^n + \dots + a_1 z_0 + a_0)} =$$

$$= \overline{a_n}\,\overline{z_0}^n + \dots + \overline{a_1}\,\overline{z_0} + \overline{a_0} = a_n \overline{z_0}^n + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 =$$

$$= P(\overline{z_0}) \Rightarrow P(\overline{z_0}) = 0 \rightsquigarrow P(\overline{z_0})$$ ρίζα του P.

(ii) $P(z) = z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40$

Να βρεθούν όλες οι ρίζες, αφού δειχθεί πρώτα ότι το $2i$ είναι ρίζα.

Από το πρώτο μέρος, το $-2i$ είναι ρίζα.

Το γινόμενο $(z-2i)\cdot(z+2i) = z^2+4$ διαιρεί το $P(z)$ (Horner!)

$$\begin{array}{l|l} \cancel{z^4} - 2z^3 + 14z^2 - 8z + 40 & z^2+4 \\ \hline \cancel{-z^4} \quad +-4z^2 & z^2 - 2z \\ \hline -\cancel{2z^3} + 10z^2 - 8z + 40 & \\ -\cancel{2z^3} \qquad -8z & \\ \hline 10z^2 + 40 & \end{array}$$

(ψάξε σχήμα Horner...)

Άρα, $P(z) = (z^2+4)\cdot(z^2-2z+10)$.

$\Delta = 4-40 = -36$, $\quad z_{1,2} = \dfrac{2\pm 6i}{2} = \boxed{1\pm 3i}$

Άρα οι ρίζες του $P(z)$: $\pm 2i$, $1\pm 3i$.

4.) $\cos(5\theta)$, $\sin(5\theta)$

Έχουμε : $\cos(5\theta) + i\sin(5\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^5 =$

$= \cos^5\theta + 5i\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta - 10i\cos^2\theta\sin^3\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta + i\sin^5\theta.$

Άρα,
$$\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$$
$$\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta.$$

7.) Ν.δ.ο. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos[(n+\frac{1}{2})\alpha]}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq 2k\pi$.

$1^{ος}$ τρόπος : επαγωγή

2ος τρόπος: Έστω A το αριστερό μέλος. Τότε:

$$A = \mathrm{Im}\left[\underbrace{e^{ia} + e^{2ia} + \dots + e^{nia}}_{\text{αθροισμα όρων γεωμετρ. προόδου}}\right] =$$

$$\left(1+\lambda+\dots+\lambda^{n} = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\right)$$

$$= \mathrm{Im}\left[e^{ia}\frac{\left[1 - e^{nia}\right]}{1-e^{ia}}\right] = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{ia} - e^{i(n+1)a}}{1-e^{ia}}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{e^{ia} - e^{2ia} - e^{i(n+1)a} + e^{i(n+1)a+ia}}{1-e^{2ai}}\right] =$$

$$= \mathrm{Im}\left[\frac{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}{2-2\cos\varphi}\right] = \frac{1}{2(1-\cos\varphi)}\mathrm{Im}\left[e^{ia} - 1 - e^{i(n+1)a} + e^{ina}\right] =$$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$

$$A = \frac{1}{4\sin^2\frac{a}{2}}\left[\sin(a) - \sin[(n+1)a] + \sin(na)\right] = \dots$$

8.) $n \in N$, $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} \longrightarrow$ n-οστή ρίζα.

$e^{(1/n)\log z}$

Έστω $z = re^{i\theta}$. Τότε, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\right)$, $k=0,\dots,n-1$

Έχουμε, $\log z = \log r + i\theta + 2l\pi i$, $l \in Z$

άρα, $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log r + i(\theta+2l\pi))} = e^{\frac{\log r}{n}} \cdot e^{i(\theta+2l\pi)} =$

$= e^{\log r^{(\frac{1}{n})}} \cdot e^{i(\theta+2l\pi)} = (r)^{1/n} e^{i(\theta+2l\pi)}$, $l \in Z$.

Όμως η εκθετική είναι περιοδική! Οπότε κάποιες τιμές επαναλαμβάνονται, άρα δεν έχουμε ∞ τιμές.

Ισχύει $W_\ell = W_{\ell+n}$, άρα τα ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ W_ℓ είναι $W_0, \dots, W_{n-1}$. δηλ. n το πλήθος.

9.) Ν.δ.ο. $\log(z^2) \neq 2\log z$, παρότι $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$

Έχουμε $z = re^{i\theta}$, τότε $\log z^2 = \log(r^2 e^{2i\theta}) = \log r^2 + i(2\theta + 2k\pi) =$
$= 2\log r + 2i(\theta + \boxed{k\pi})$, $k \in Z$

$2\log z = 2\log(re^{i\theta}) = 2\log r + 2i(\theta + \boxed{2\ell\pi})$, $\ell \in Z$.

Πράγματι, $\log z^2 \neq 2\log z$. Επιπλέον, $2\log z \subsetneq \log z^2$
διότι το $2k\pi = 2(k\pi)$, δηλ. το $2k\pi$ γράφεται ως στοιχείο του συνόλου $k\pi$.

Όμως, $\log z^2 = \log z \cdot z = \log z + \log z$

Άρα $\underline{2\log z \neq \log z + \log z}$

Τα κοιτάμε σαν σύνολα! Είναι πλειότιμες, όχι σκέτοι αριθμοί.

$2A \neq A + A$
$\{2a : a \in A\} \subsetneq \{a+b : a, b \in A\}$

$*$ $\sqrt[n]{z} = e^{\log \sqrt[n]{z}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = z^{\frac{1}{n}}$

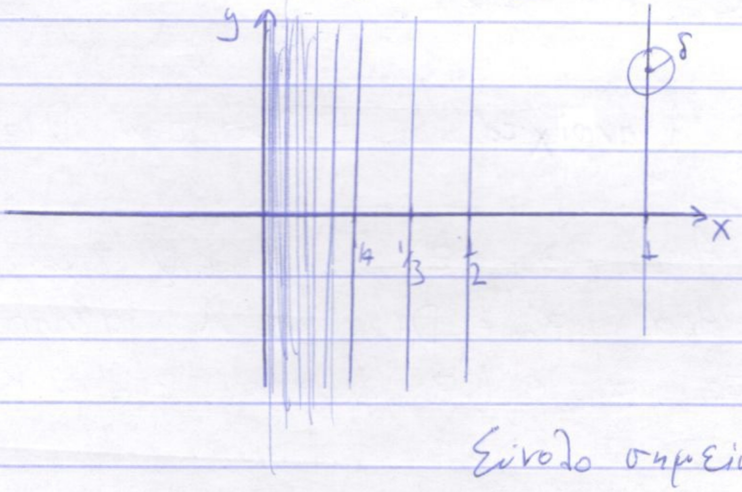
2.) (παραλλαγή)

$$f(z) = \frac{z^3 - 2i}{2z^4 + 3 - 4i}$$, Νδο. $|f(z)| < 1$ αν $|z| < 1$.

Έχουμε: $|f(z)| = \dfrac{|z^3 - 2i|}{|2z^4 + 3 - 4i|} \leq \dfrac{|z^3| + |2i|}{\left|\underbrace{|2z^4|}_{\leq 2} - \underbrace{|3-4i|}_{5}\right|} < \dfrac{1+2}{5 - 2|z|^4} <$

$$< \frac{3}{5-2} = 1.$$

10.) Δίνεται $A = \left\{ \frac{1}{n} + iy \ : \ n \in N \ , \ y \in R \right\}$

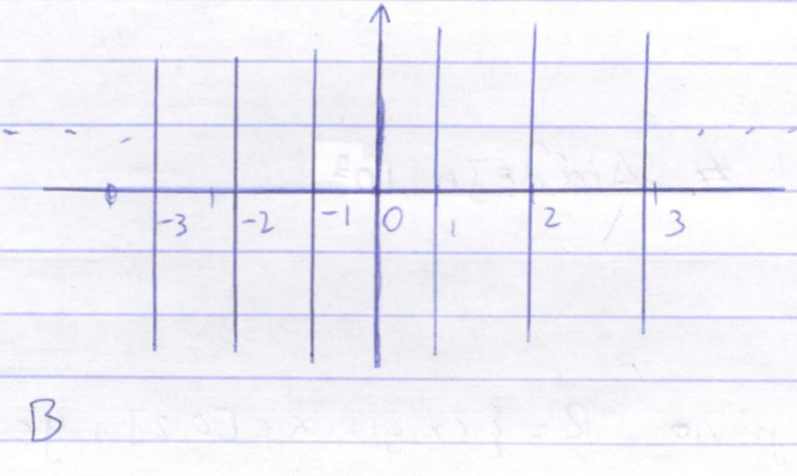


όχι ανοιχτό.
όχι κλειστό, γιατί
π.χ. $\frac{1}{n} \in A$ ακολουθία.
$\frac{1}{n} \to 0 \notin A$.

Σύνολο σημείων συσσώρευσης:

$A' = A \cup iR \to$ κατακόρυφος άξονας.

$B = Z + iR = \left\{ k + iy \ : \ k \in Z, \ y \in R \right\}$.

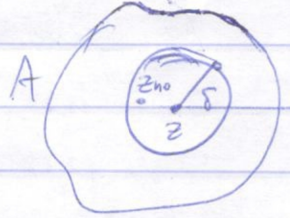


όχι ανοιχτό.
Είναι κλειστό.

$B' = B$

11.) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$, $K = \mathbb{C} \setminus A$. Ν.δ.ο. A ανοιχτό $\Leftrightarrow$ K κλειστό. $(A \neq \emptyset, \mathbb{C})$.

"$\Rightarrow$" Έστω A ανοιχτό. Έστω ακολουθία $(z_n) \subset K$, $z_n \to z \in \mathbb{C}$. Έστω ότι $z \notin K$, τότε $z \in A$.



A **ανοιχτό** $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ τ.ω. $D(z,\delta) \subset A$.

Αφού $z_n \to z$ $\exists\, n_0 \in N$ τ.ω. $|z_{n_0} - z| < \delta$
Άρα, $z_{n_0} \in D(z,\delta) \subset A$ άτοπο, γιατί το $z_{n_0} \in (z_n) \not\subset K$, άρα $z_{n_0} \notin K$.

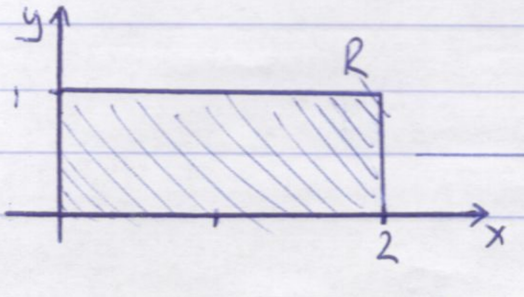
"$\Leftarrow$" Έστω K κλειστό και έστω A μη ανοιχτό. Τότε $\exists\, z_0 \in A$ τ.ω. $\forall \delta > 0$, $D(z_0,\delta) \not\subset A$ δηλ. $D(z_0,\delta) \cap K \neq \emptyset$.

Έστω $\delta = \frac{1}{n}$. $\forall n \in N$ $\exists\, z_n \in D(z_0, \frac{1}{n}) \cap K$. Άρα $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$, άρα $z_n \to z_0$. Ισχύει $z_n \in K$. Αφού K κλειστό, $z_0 \in K$. Άτοπο.

12/11/2018 # Διάλεξη 11η

Παραδείγματα

1) Έστω το ορθογώνιο $R = \{(x,y) : x \in [0,2],\ y \in [0,1]\}$



Ποια είναι η εικόνα του R στο επίπεδο w υπό τους μετασχηματισμούς