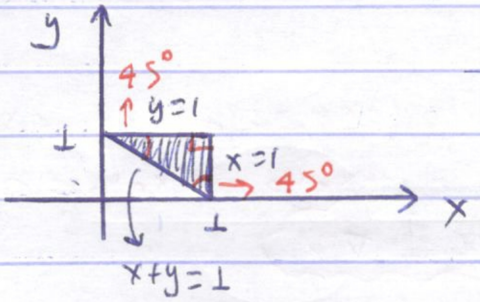
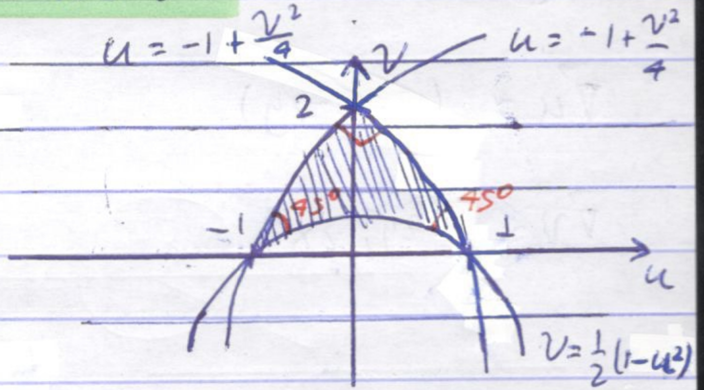
(66.)

Η απεικόνιση $w = z^2$ είναι 2 προς 1, γιατί δύο διαφορετικά σημεία του επ. $z$, το $z_0$ και το $z_0 e^{i\pi} = -z_0$, απεικονίζονται στο ίδιο σημείο $w = z^2$

3.) Ποια είναι η εικόνα του τόπου που είναι φραγμένος από τις $x=1$, $y=1$, $x+y=1$ υπό τον $w = z^2$.




$u + iv = (x+iy)^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

Η ευθεία $x = 1 \rightarrow \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases} \Rightarrow u = 1 - \frac{v^2}{4}$

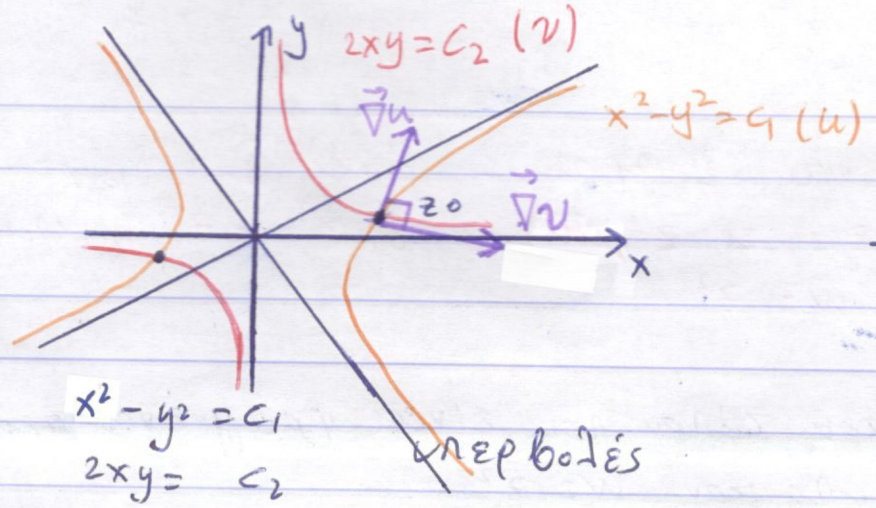
— ıı — $y = 1 \rightarrow \begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = 2x \end{cases} \Rightarrow u = -1 + \frac{v^2}{4}$

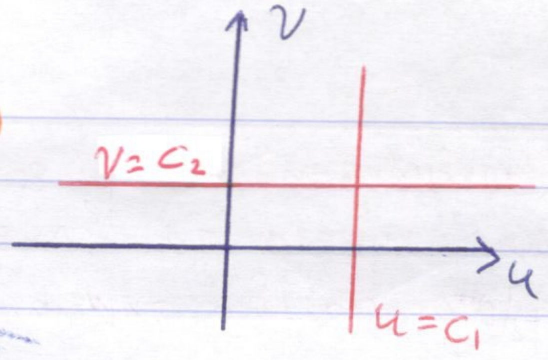
— ıı — $x + y = 1 \rightarrow \begin{cases} u = x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1 \\ v = -2x(x-1) \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{2}(1-u^2)$

• $w = z^2 \Rightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$

4.) Πως απεικονίζονται ευθείες $u = c_1$, $v = c_2$ από το επ. $w$ στο επ. $z$ :

(67.)




$\vec{\nabla}u = (2x, -2y)$

$\vec{\nabla}v = (2y, 2x)$

Στο κοινό σημείο $z_0 = x_0 + y_0 i$

$\vec{\nabla}u \cdot \vec{\nabla}v = (2x_0, -2y_0)\cdot(2y_0, 2x_0) =$
$= 4x_0y_0 - 4x_0y_0 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \vec{\nabla}u \perp \vec{\nabla}v$

13/11/2018 # Διάλεξη $12^{η}$ (Μπαρμπάτης).

Άσκηση: Να βρεθεί για ποια $a \in \mathbb{R}$ $\exists$ το $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$
όπου

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{|z|^{a}}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Λύση: Έχουμε για $z \neq 0$, $|f(z)| = |z|^{a-1} \xrightarrow[z\to 0]{} 0$
αν και μόνο αν $a > 1$.

$$\lim_{z\to 0} |z|^{b} = \begin{cases} 0, & b>0 \\ 1, & b=0 \\ +\infty, & b<0 \end{cases}$$

Για $a=1$ έχουμε το όριο:

$\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|}{z} \not\exists$, γιατί $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+iy}$

(68.)

- $x=0$ : $\frac{|y|}{iy}$
- $y=0$ : $\frac{|x|}{x}$

$\Big\}$ το όριο $\nexists$

(Η') αν $z = re^{i\theta}$, τότε $\lim_{r\to 0} \frac{r}{re^{i\theta}} = \lim_{r\to 0} e^{-i\theta} = e^{-i\theta}$ εξαρτάται απ' το $\theta$, άρα το όριο $\nexists$.

**Ορισμός:** Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, άπειρα παραγωγ. και $z_0 \in A$. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

ονομάζεται σειρά Taylor της $f$ με κέντρο το $z_0$.

**Βασικές σειρές Taylor.**

1) $f(z) = e^z$, $z_0 = 0$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

2) $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$

$z \in \mathbb{C}$

3) $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$

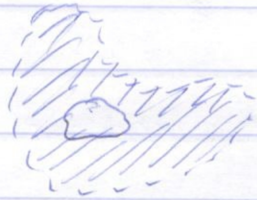
4) $\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$ $\quad |z|<1$

**Ορισμός:** Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται απλά συνεκτικό, αν είναι ανοιχτό, συνεκτικό και "δεν έχει τρύπες".

69.

παραδείγματα :

απλά συνεκτικό



όχι απλά συνεκτικό

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ όχι απλά συνεκτικό

**Ορισμός** : Μια συνάρτηση $u(x,y) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λέγεται αρμονική αν είναι $C^2$ (∃ μερ. παρ. $2^{ης}$ τάξης και είναι συνεχείς) και $\Delta u = 0$ στο $A$ ($\Delta u \equiv \vec{\nabla}^2 u =$
$= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u = u_{xx} + u_{yy} \to$ λαπλασιανή ).

**Πρόταση**: Αν η $u(x,y)$ είναι αρμονική, τότε είναι $C^\infty$.

Έστω $f(z) = u + iv$ παραγωγ. Τότε ισχύουν C-R.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (C-R).$$

Ας υποθέσουμε ότι $u, v$ είναι $C^2$. Τότε,

$$\vec{\nabla}^2 u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = \underbrace{v_{yx} - v_{xy}}_{\text{είναι } C^2} = 0$$

$\partial^2 u = \partial(\partial u) \to v_y = \partial v_y \qquad \partial v_y = \partial(\partial v)$

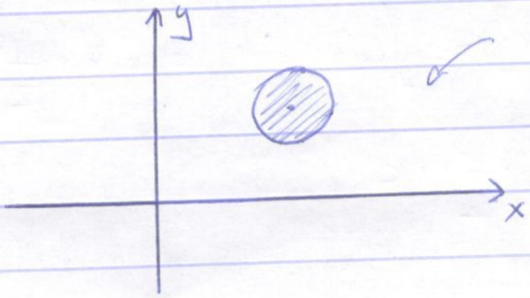
(70)

και όμοια $\vec{\nabla}^2 v = 0$. Δηλ. οι $u, v$ είναι αρμονικές.

Θεώρημα: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (A ανοιχτό), f παραγωγ. και $f = u + iv$. Τότε $u, v$ αρμονικές συναρτήσεις.

Αντίστροφα, αν το A είναι απλά συνεκτικό και η u είναι αρμονική στο A, τότε $\exists\, f(z)$ παραγ. στο A ώστε $u = \mathrm{Re} f$.

Ειδικότερα, κάθε αρμονική συνάρτηση είναι τοπικά το πραγματικό μέρος μιας παραγωγ. μιγαδικής συνάρτησεις.




περιοχή όπου η συνάρτηση τοπικά παραγωγ.

Ορισμός: δύο αρμονικές συναρτήσεις $u, v$ λέγονται συζυγείς αρμονικές αν $\exists$ $f(z)$ παραγωγ. ώστε $f = u + iv$.

Παράδειγμα: Ν.δ.ο. η $u(x,y) = (1+x)(1+y) - e^y \cos x$ είναι αρμονική. Να βρεθεί η αρμονική συζυγής καθώς και η αντίστοιχη $f(z)$

Έχουμε, $u_x = 1 + y + e^y \sin x$

$u_{xx} = e^y \cos x$

$u_y = 1 + x - e^y \cos x$

$u_{yy} = -e^y \cos x$

(71.)

Άρα, $u_{xx} + u_{yy} = e^y \cos x - e^y \cos x = 0$ δηλ. u αρμον. στο $\mathbb{R}^2$.

Βρίσκουμε την $v(x,y)$. Έχουμε:

$$V(x,y) = \int \frac{\partial v}{\partial x} dx \overset{(u)}{=} \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int V_x \, dx = \int V_y \, dy \Rightarrow$$

$$V(x,y) = \int V_x \, dx = -\int u_y \, dx = -\int (1 + x - e^y \cos x) dx \Rightarrow$$

$$V(x,y) = -x - \frac{x^2}{2} + e^y \sin x + b(y)$$

$$\frac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \cancel{e^y \sin x} + \frac{db(y)}{dy} = V_y \overset{(C-R)}{=} u_x = 1 + y + \cancel{e^y \sin x} \Rightarrow$$

$$b'(y) = 1 + y \Rightarrow b(y) = \int (1+y) dy = y + \frac{y^2}{2} + c$$

$$V(x,y) = -x - \frac{x^2}{2} + e^y \sin x + y + \frac{y^2}{2} + c$$

Άρα, με $z = x + iy$ :

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = 1 + x + y + xy - e^y \cos x + i\left(-x - \frac{x^2}{2} + e^y \sin x + y + \frac{y^2}{2} + c\right) =$$

$$= 1 + (x + iy) + (-e^y \cos x + i e^y \sin x) + (y - ix) + \left(xy + i\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)\right) + ic =$$

$$= 1 + z - iz + e^y(\cos(\pi - x) + i \sin(\pi - x)) - i\frac{z^2}{2} + ic \Rightarrow$$

$$f(z) = 1 + ic + z - iz - i\frac{z^2}{2} + e^y \cdot e^{i(\pi - x)} \,^{*} = 1 + z - iz - i\frac{z^2}{2} - e^{-iz} + ic$$

$$^{*} \; e^y \cdot e^{i(\pi - x)} = e^y \cdot e^{-ix} \cdot e^{i\pi} = e^y \cdot e^{-ix}(\cos\pi + i \sin\pi) = -e^{y - ix} = -e^{-iz}$$

**Θεώρημα:** (1) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ μία δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Θέτουμε
(*) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, για $|z-z_0|<R$ (επεί να συγκλίνει η σειρά). Τότε,

i) $f$ άπειρα παραγωγίσιμη

ii) Η (*) μπορεί να παραγωγιστεί όρο-προς-όρο, δηλαδή

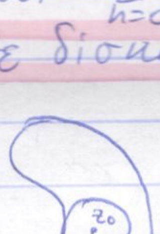
$$f'(z)=\sum_n n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z)=\sum_n n(n-1)a_n(z-z_0)^{n-2}$$

iii) Η αρχική σειρά, είναι η σειρά Taylor της $f$ με κέντρο $z_0$, δηλ.

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

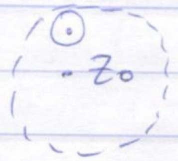
(2) Αντίστροφο, Έστω $f: A\subseteq \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ($A$ ανοιχτό). Τότε, η $f$ είναι άπειρα παραγωγίσιμη. Επιπλέον, για κάθε $z_0\in A$ έχουμε $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$, όπου η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάθε δίσκο $D(z_0,r)\subset A$.




**Ορισμός:** Μία συνάρτηση $f$ λέγεται αναλυτική στο $z_0$, αν είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή του $z_0$.

**Παράδειγμα:** Η $f(z)=|z|^2$ είναι παραγωγ. μόνο στο $z=0$.
Άρα δεν είναι αναλυτική στο 0.

**Παρατήρηση:** Το σύνολο των σημείων που είναι αναλυτική μία συνάρτηση είναι ανοιχτό.




**Παρατήρηση:** Αν $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $A$ ανοιχτό, τότε

$f$ παραγωγ. στο $A$ <=> $f$ αναλυτική στο $A$.

**Άσκηση (προς λύση):** 1) Να δειχθεί ότι μία συνάρτηση $C^2$ $u(r,\theta): \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, είναι αρμονική αν και μόνο αν $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$.
(Λαπλασιανή σε πολικές).

2) Να δειχθεί ότι $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική, καθώς και η αντίστοιχη $f(z)$.

## 9. Μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα:

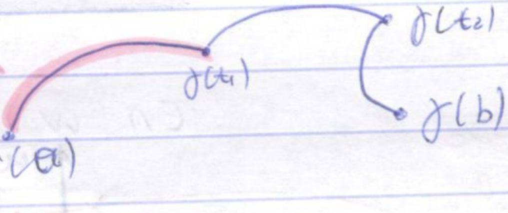
**Ορισμός:** Ονομάζουμε καμπύλη μία συνεχή απεικόνιση
$\gamma = \gamma(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Ίχνος της $\gamma$: $I\chi\nu(\gamma) = \{\gamma(t) : 0 \le t \le b\}$

Ορισμός: Μία καμπύλη $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ λέγεται $C^1$ αν οι $x(t)$, $y(t)$ είναι $C^1$.

Ορισμός: Η καμπύλη $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ λέγεται τμηματικά $C^1$ αν $\exists$ σημεία $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ πεπερασμένου πλήθους, που διαμερίζουν το διάστημα $(a,b)$, ώστε κάθε περιορισμός $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ να είναι $C^1$.

αν περιορίσουμε σε αυτό το διάστημα η $\gamma$ είναι $C^1$!




19/11/2018 # Διάλεξη 13η (Φρατζεσκάκης)

Μετασχηματισμός Joukowski

$$\boxed{w = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$$

$$w = u + iv = \frac{a}{2}\left(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\right) = \frac{a}{2}\left(r\cos\theta + ir\sin\theta + \frac{1}{r}\cos\theta - \frac{i}{r}\sin\theta\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta & (1) \\ v = \frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta & (2) \end{cases}$$

(1), (2) απαλείφουμε το $\theta$: $\boxed{\frac{u^2}{\left[\frac{a}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{a}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\right]^2} = 1}$

(υψώνοντας στο τετράγωνο)

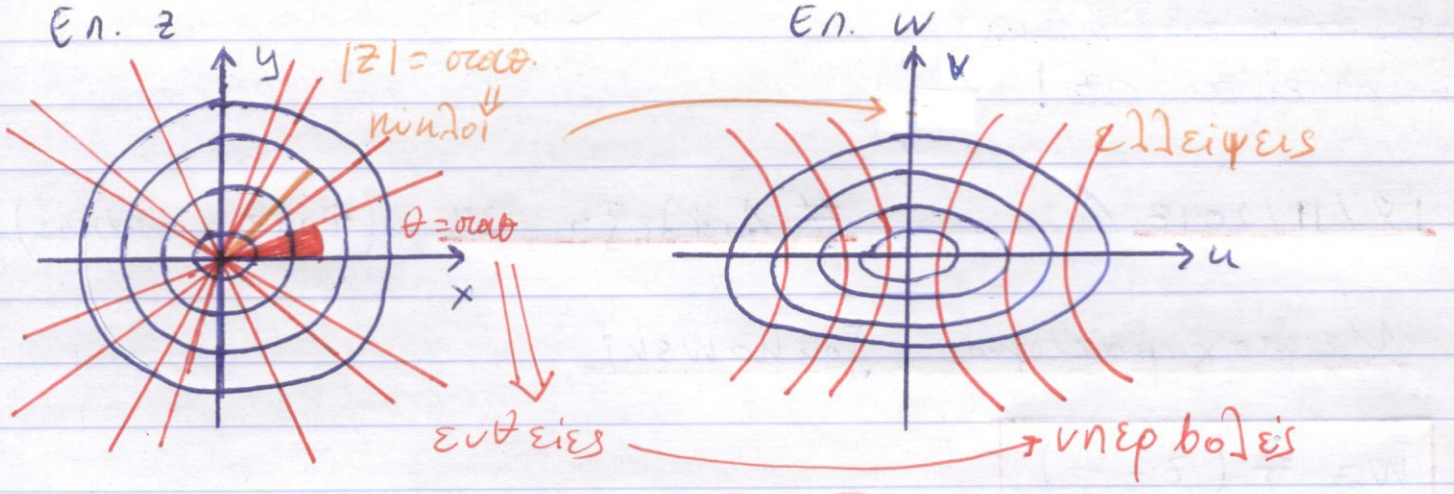
①, ② απαλείφουμε το $r$:

$$①: \quad \frac{u^2}{\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2} = \left(r+\frac{1}{r}\right)^2 = r^2+2+\frac{1}{r^2}$$

$$②: \quad \frac{v^2}{\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2} = \left(r-\frac{1}{r}\right)^2 = r^2-2+\frac{1}{r^2}$$

(αφαιρόντας) =>

$$\Rightarrow \frac{u^2}{\left(\frac{a}{2}\cos\theta\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right)^2} = 4 \Rightarrow \boxed{\frac{u^2}{(a\cos\theta)^2} - \frac{v^2}{(a\sin\theta)^2} = 1}$$

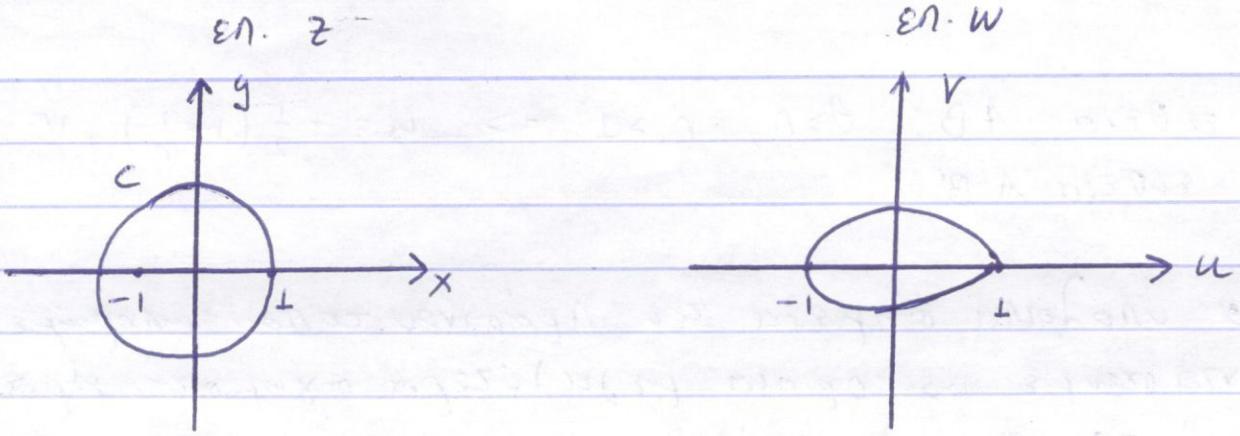



Συμπέρασμα: κύκλοι → ελλείψεις
ευθείες → υπερβολές

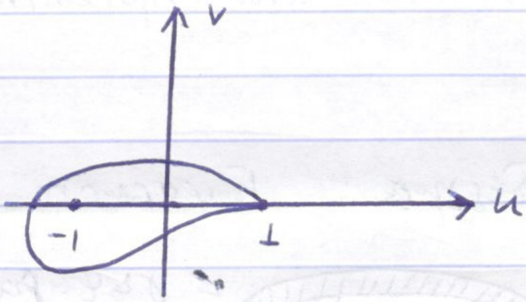
Για $a=1$: $\quad f'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right) \to z=1$: κρίσιμο σημείο

Taylor: $\quad f(z) = f(1) + f'(1)(z-1) + \frac{1}{2}f''(1)(z-1)^2 + \ldots \Rightarrow$

76.




Φτερά αεροπλάνου

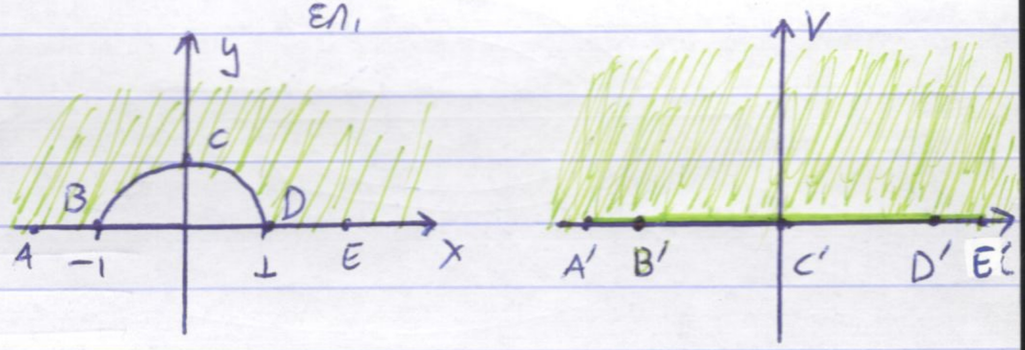



(τέλος παραδείγματος)

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta$$

$$v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta$$




Πως μετασχηματίζεται ο πράσινος τόπος;

1) Το ημικυκλικό τόξο BCD: $r = 1$, $\theta \in [0, \pi]$ $\Rightarrow$

$u = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $r = 1$
$v = 0$

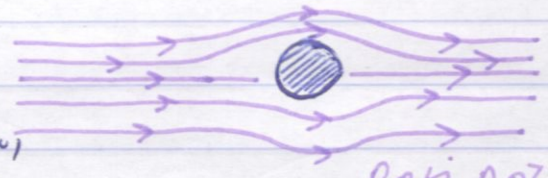
2) Η ευθεία DE: $\theta = 0$, $r > 1$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \\ v = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ ευθεία D′E′

3) Η ευθεία ΑΒ: $\theta = \pi,\ r > 1 \Rightarrow u = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right),\ v = 0$
→ ευθεία Α'Β'.

4) Τα υπόλοιπα σημεία του πράσινου τόπου μπορούμε να τα φανταστούμε ως όμοια μεγαλύτερα σχήματα. Άρα "γεμίζουν" το άνω ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα: Εφαρμογή στην φυσική.


κάτοψη



ροή ποταμιού στο επίπεδο z

$$\Downarrow \quad w = \frac{a}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

ευθεία ροή στο επίπεδο w

Εξίσωση Laplace: $\boxed{\Delta\Phi \equiv \vec{\nabla}^2\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0.}$

Πρόταση: Αν $f = u + iv$ αναλυτική σε ένα τόπο Α, τότε οι $u, v$ είναι αρμονικές:

$$\begin{cases} \vec{\nabla}^2 u = 0 \\ \vec{\nabla}^2 v = 0 \end{cases}$$

78.

Απόδειξη: Αφού η $f$ είναι αναλυτική => ισχύουν C-R:

$$\begin{cases} u_x = v_y \Rightarrow u_{xx} = v_{yx} \\ u_y = -v_x \Rightarrow u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

$\overset{(+)}{\Rightarrow}$ $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2 u = 0$.

Το ίδιο για την $v$.

Θεώρημα: Αν η $\Phi$ ικανοποιεί την εξ. Laplace σε συντεταγμένες $x, y$ (δηλ. $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$), τότε η ίδια συνάρτηση $\Phi$ ικανοποιεί την εξ. Laplace σε συντεταγμένες $u, v$ όπου $u = Re(w)$ και $v = Im(w)$ και $w = f(z) = u + iv$ με $f'(z) \neq 0$.

Απόδειξη: $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = |f'(z)|^2 (\Phi_{uu} + \Phi_{vv})$.

Άρα, αν $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \Rightarrow \Phi_{uu} + \Phi_{vv} = 0$.

ή $\vec{\nabla}^2_{xy} \Phi = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}^2_{uv} \Phi = 0$

Στην Φυσική: $\Phi$ λέγεται δυναμικό.

$\Phi(x,y) =$ σταθ. → Ισοδυναμικές

Η συζυγής αρμονική της $\Phi(x,y)$, έστω η $\Psi(x,y)$, λέγεται συνάρτηση ροής.

Οι καμπύλες $\Psi(x,y) = \text{σταθ.}$ → καμπύλες ροής.

Η αναλυτική συνάρτηση : $\Omega(z) = \Phi + i\Psi$ → μιγαδικό δυναμικό

Προσαρτισμένο στην $\Phi$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο :

$$\boxed{\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi}$$

πεδίο ταχυτήτων ← δυναμικό
ή ηλεκτρ. πεδίο
ή κλπ.

Αν $\vec{u} = (u_1, u_2)$ τότε ορίζουμε μιγ. πεδίο. ταχ. $u = u_1 + iu_2$ και $\Omega'(z) = u$.

## Ρευστομηχανική

Εξ. συνέχειας : $\boxed{\rho_t + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}(\rho\vec{u}) = 0 \Rightarrow \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \overset{\div\rho}{\Rightarrow} \boxed{\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0.}$

$\rho_t$: παράγωγ. πυκνότητας, $\vec{u}$: πεδίο ταχυτήτων.

Διδιάστατη ροή : $\vec{u} = (u_1, u_2)$

Ασυμπίεστη ροή : $\rho_t = 0$, δηλ. $\rho = \text{σταθ.}$

Αστρόβιλη ροή : $\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{s} = 0$

(κυκλοφορία κατά μήκος κάθε κλειστού βρόχου $C$ είναι $= 0$) $\Rightarrow$

Θεώρημα stokes : $\boxed{\oint_C \vec{u}\cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{u}\cdot d\vec{a}}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0}$$

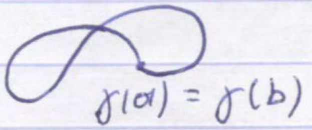
Άρα, $\vec{u} = \vec{\nabla}\Phi$ → δυναμικό προσαρτισμένο στο πεδίο $\vec{u}$.

[Γιατί: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Phi) = 0$ $\forall$ βαθμωτό $\Phi$. Άρα το $\vec{\nabla}\Phi = u$]

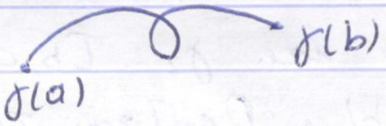
20/11/2018 # Διάλεξη 14η (Μπαρμπαίτης)

Ορισμός: Η καμπύλη $\gamma$ λέγεται κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$

π.χ.



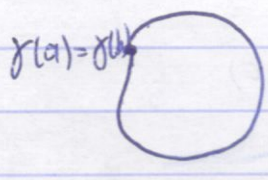

κλειστή



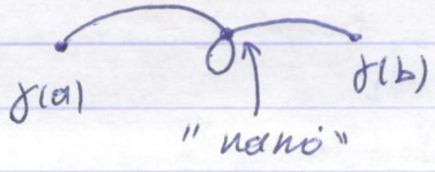

όχι κλειστή

Ορισμός: Η καμπύλη $\gamma$ λέγεται απλή αν $s \neq t \Rightarrow \gamma(s) \neq \gamma(t)$ με μόνη πιθανή εξαίρεση να ισχύει $\gamma(a) = \gamma(b)$

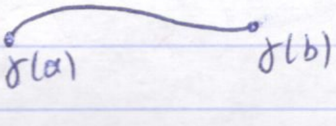
π.χ.




απλή (και κλειστή)

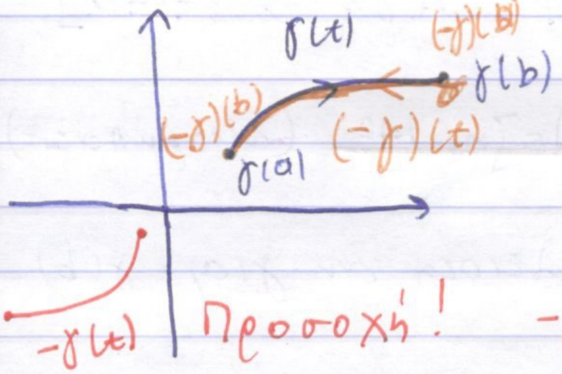



όχι απλή (και όχι κλειστή).




απλή, όχι κλειστή.

Ορισμός : Αν $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μία καμπύλη, τότε συμβολίζουμε με $-\gamma$ την καμπύλη $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$, $t \in [a,b]$



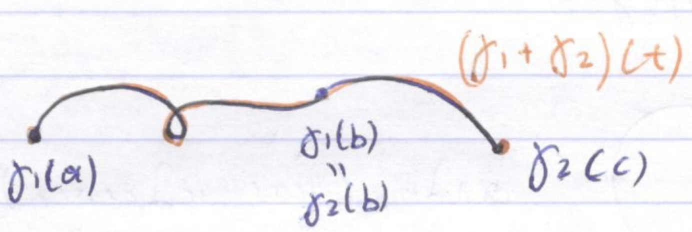

Προσοχή! $-\gamma(t) \neq (-\gamma)(t)$ !!!

συμμετρική ως προς το 0.

Ορισμός : Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ τέτοιες ώστε $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Ορίζουμε τότε ως

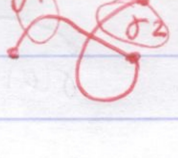
$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(t), & b \leq t \leq c \end{cases}$$

π.χ.




$\gamma_1, \gamma_2$ τμηματικά $C^1$ $\Rightarrow$ $\gamma_1 + \gamma_2$ τμημ. $C^1$

$\gamma_1, \gamma_2$ κλειστές $\Rightarrow$ $\gamma_1 + \gamma_2$ κλειστή

$\gamma_1, \gamma_2$ απλές $\not\Rightarrow$ $\gamma_1 + \gamma_2$ απλή (π.χ.  )

**Ορισμός:** Έστω $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά $C^1$ καμπύλη για την οποία ίχνος$(\gamma) \subseteq A$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της $f$ πάνω στην $\gamma$ ως εξής:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt}$$

Αν σκεφτούμε: $z = \gamma(t)$, τότε όταν το $z$ διατρέχει την $\gamma$, το $t$ διατρέχει και περνά από τα $a$ και $b$. Ακόμη,
$\frac{dz}{dt} = \gamma'(t) \Rightarrow dz = \gamma'(t)\,dt$ και $f(\gamma(t)) = f(z)$.

**Παρατήρηση:** Έστω $f = u + iv$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Τότε:

$$\int f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \left[u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\right]\cdot\left[x'(t) + iy'(t)\right]dt$$

$$= \int_a^b (u\cdot x' - v\cdot y')\,dt + i\int_a^b (v x' + u y')\,dt =$$

$$= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

επικαμπύλια ολοκλ. της Αναλ. ΙΙ

**Πρόταση (Ιδιότητες ολοκληρωμάτων):**

i) $\int_\gamma (\lambda f(z) + \mu g(z))\,dz = \lambda\int f(z)\,dz + \mu\int g(z)\,dz$

83.

ii) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$

iii) $\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$

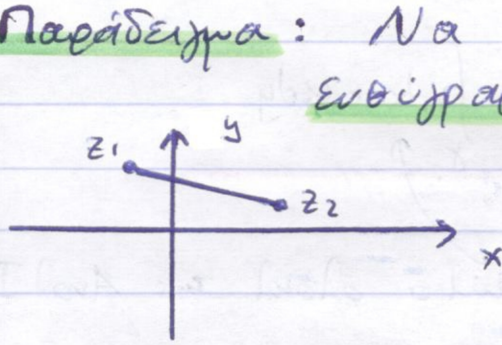
Παρατήρηση: Συχνά μία καμπύλη δίνεται μέσω του ίχνους της και όχι μέσω ενός αναλυτικού τύπου (παραμέτρηση).

SOS

1) Η καμπύλη είναι ανοιχτή. Τότε πρέπει να μας δοθεί ποια είναι τα άκρα της. Επιλέγουμε εμείς ποια παραμέτρηση θέλουμε (με το σωστό ίχνος, σωστά άκρα, προσανατολισμό) και το ολοκλήρωμα τότε δεν θα εξαρτάται από την συγκεκριμένη επιλογή ("είναι ανεξάρτητο της παραμέτρησης").

2) Η καμπύλη είναι κλειστή. Τότε (σύμβαση) θεωρούμε ότι η καμπύλη διατρέχει μία φορά κατά την θετική φορά (δεν έχει σημασία το σημείο από όπου ξεκινάμε).

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_{\gamma} z\,dz$, όπου $\gamma$ το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $z_1$ και $z_2$.




ΜΙΑ παραμέτρηση είναι η

$\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$.

$\gamma(0) = z_1$
$\gamma(1) = z_2$

άρα δουλεύει!

(84.)

(*) Προσοχή!
Θεωρία
(Αλέξα το απο-
τέλεσμα)!!!

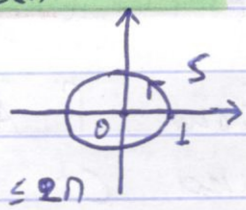
Άρα, $\int_\gamma z\,dz = \int_0^1 \gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 [z_1 + t(z_2-z_1)]\cdot(z_2-z_1)\,dt =$

$$= z_1(z_2-z_1) + (z_2-z_1)^2\int_0^1 t\,dt =$$

$$= z_1(z_2-z_1) + \frac{1}{2}(z_2-z_1)^2 = \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_1^2$$

Παράδειγμα: Για $n \in \mathbb{Z}$ να υπολογιστεί το $\int_{S(1)} z^n\,dz$ (*)

Επιλέγουμε την παραμέτρηση




$\gamma(t) = \cos t + i\sin(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

Άρα,

$$\int_{S(1)} z^n\,dz = \int_0^{2\pi} \gamma^n(t)\,\gamma'(t)\,dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} \cos((n+1)t)\,dt - \int_0^{2\pi} \sin((n+1)t)\,dt$$

1) $n+1 \neq 0$.

Τότε, $\int_{S(1)} z^n\,dz = 0$.

2) $n+1 = 0 \Rightarrow n = -1$.

$$\int_{S(1)} z^n\,dz = i\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos(0)}_{1}\,dt - \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin(0)}_{0}\,dt = i2\pi - 0 = 2\pi i$$

Άρα, $\int_{S(1)} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$.

85.

Πρόταση: Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Ισχύει:

i) $\int_{S(1)} z^n dz = 0$ , $n \neq -1$

ii) $\int_{S(1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ , $n=-1$ (θα βλέπεις εφιάλτες με αυτό, χώνεψέ το ...)

Ορισμός (επικαμπύλια ολοκλ. β' είδους):

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής και $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά $C^1$ με ίχνος$(\gamma) \subseteq A$. Ορίζουμε τότε:

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

Παρατήρηση (Ιδιότητες): Ισχύουν ανάλογες ιδιότητες όμως, $\int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$

Επομένως, εδώ δεν εξαρτάται το ολοκλήρωμα από την φορά.

Πρόταση: Ισχύει το εξής $\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)| \cdot |dz|$ (1)

"τριγωνική ανισότητα", sort of... ($|a+b| \leq |a| + |b|$)

Ορισμός: Ο αριθμός $l(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$ , ονομάζεται μήκος της καμπύλης $\gamma$.

(86.)

Πρόταση: Έστω ότι $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in$ ίχνος$(\gamma)$. Τότε,

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leq M\, l(\gamma)$$

Αποδ. : έπεται από την (1).

Παρατήρηση: Αν $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ και $f_1 \leq f_2$, τότε

$$\int_\gamma f_1(z)\,|dz| \leq \int_\gamma f_2(z)\,|dz|$$

όμως, δεν έχει έννοια να πούμε:

$$\int_\gamma f_1(z)\,dz \leq \int_\gamma f_2(z)\,dz$$

ΕΙΝΑΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, ΚΑΙ ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΔΕΝ ΕΧΟΥΝ ΔΙΑΤΑΞΗ !!!

Ασκήσεις (προς λύση), Λύση καθηγητή:

1) Ν.Δ.Ο. $\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$ (C-R σε πολικές).

Ισχύει (C-R): $u_x = v_y$ και $x = r\cos\theta$

$u_y = -v_x$ $\quad$ $y = r\sin\theta$.

Από τον κανόνα αλυσίδας: $u_r = u_x x_r + u_y y_r =$

$= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$

87.

Ομοια, $v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta$

Επίσης, $u_\theta = u_x x_\theta + u_y y_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta.$

όμοια, $v_\theta = v_x x_\theta + v_y y_\theta = -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta.$

Άρα, $r u_r - v_\theta = r u_x \cos\theta + u_y r\sin\theta + v_x r\sin\theta - v_y r\cos\theta$
$= r\cos\theta\,(u_x - v_y) + r\sin\theta\,(u_y - v_y) \underset{(C-R)}{=} 0.$

δηλ. $u_r = \frac{1}{r} v_\theta.$

Όμοια, $v_r = -\frac{1}{r} u_\theta$

Θεωρία

2) Ν.δ.ο. αν $u = u(r,\theta)$, τότε $\vec{\nabla}^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

Από την $u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$ :

$u_{rr} = (u_x)_r \cos\theta + (u_y)_r \sin\theta = (u_{xx}\cos\theta + u_{xy}\sin\theta)\cos\theta +$
$+ (u_{yx}\cos\theta + u_{yy}\sin\theta)\sin\theta =$

$= u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin^2\theta.$

Από την $u_\theta = -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta.$

$u_{\theta\theta} = -u_x r\cos\theta - (u_x)_\theta r\sin\theta - u_y r\sin\theta + (u_y)_r r\cos\theta$
$= -u_x r\cos\theta - [-u_{xx} r\sin\theta + u_{xy} r\cos\theta] r\sin\theta - u_y r\sin\theta$
$+ [-u_{yx} r\sin\theta + u_{yy} r\cos\theta] r\cos\theta$

88.

Άρα,

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_{xx}\cos^2\theta + \cancel{2u_{xy}\cos\theta\sin\theta} + u_{yy}\sin^2\theta + \cancel{\frac{1}{r}u_x\cos\theta}$$

$$+ \cancel{\frac{1}{r}u_y\sin\theta} - \cancel{\frac{1}{r^2}u_x r\cos\theta} + \frac{1}{r^2}u_{xx} r\sin\theta\, r\sin\theta$$

$$- \cancel{\frac{1}{r^2}u_{xy} r\cos\theta\, r\sin\theta} - \cancel{\frac{1}{r^2}u_{yx} r\sin\theta\, r\cos\theta} +$$

$$\frac{1}{r^2}u_{yy} r\cos\theta\, r\cos\theta - \cancel{\frac{1}{r^2}u_y r\sin\theta} =$$

$$= u_{xx}\cos^2\theta + u_{yy}\sin^2\theta + u_{yy}\cos^2\theta + u_{xx}\sin^2\theta =$$

$$= u_{xx} + u_{yy}$$

3) Έστω $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Ν.δ.ο. η $u$ είναι αρμονική και να βρεθεί η συζυγής αρμονική.

Έχουμε, $u(x,y) = u(r) = \ln(r)$
$u(r,\theta)$

Άρα, $\vec{\nabla}^2 u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \cancel{u_{\theta\theta}}^0 = u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) =$

$$= \cancel{-\frac{1}{r^2}} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{1}{r}} = 0 \quad , \quad R^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Έχουμε C-R: $\begin{cases} u_r = \frac{1}{r}v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_\theta = r u_r = r\frac{1}{r} = 1 \\ v_r = 0 \end{cases}$

Άρα, $v = v(\theta) = \theta + c$. Δεν μπορεί να οριστεί (και να είναι συνεχής στο $R^2 \setminus \{(0,0)\}$). Αυτό σχετίζεται με το ότι το $R^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Αν π.χ. αφαιρέσουμε τον αρνητικό x-ημιάξονα, τότε αυτό που προκύπτει είναι απλά συνεκτικό και εκεί ορίζεται η $v(\theta) = \theta + c$.

Η αντίστοιχη $f(z)$ είναι η $f(z) = \log z$.

26/11/2018 # Διάλεξη 15η (Φραγκόπουλος)

Ρευστομηχανική : $\rho_t + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$ (1)

- διδιάστατη ροή (ωκεανός, ατμόσφαιρα)
- ασυμπίεστη : $\rho_t = 0 \Rightarrow \rho =$ σταθ.
- αστρόβιλο ρευστό: $\oint_C \vec{u}\, d\vec{l} = 0$ (2) $\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$ (2)

(1) : $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$ (3)
(2) : $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0$ (4)

$\vec{u} = (u_1, u_2)$

Επειδή $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = 0 \ \forall\, \Phi$ βαθμωτό είναι $u = \vec{\nabla}\Phi \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \\ u_2 = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \end{cases}$

και από (3): $\nabla^2\Phi = 0$ (Laplace)

Αφού Φ αρμονική $\Rightarrow \exists$ συζυγής αρμονική Ψ.

Άρα, $\underbrace{\Omega(z)}_{\text{μιγαδικό δυναμικό}} = \underbrace{\Phi(x,y)}_{\text{πραγματικό δυναμικό}} + i\,\underbrace{\Psi(x,y)}_{\text{συνάρτηση ροής}}$ αναλυτική συνάρτηση.