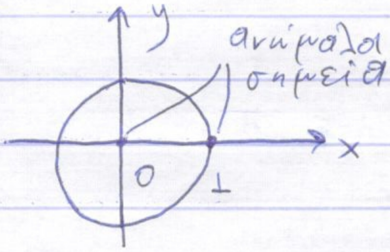
Παράδειγμα: Έστω $f(z)=\frac{1}{z^2(1-z)}$. Να βρεθεί η σειρά Laurent της f γύρω από το 0.

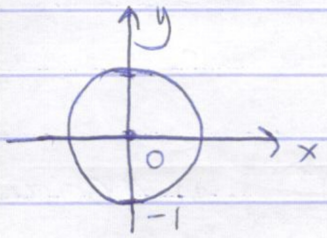


Για $0<|z|<1$ έχουμε:

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\dots$$

Παράδειγμα: Έστω $g(z)=\frac{1}{z^3(z+i)}$



$$\frac{1}{z^3(z+i)} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z^3}\cdot\frac{1}{i(1-iz)} \qquad \text{για } |z|<1$$

$$= \frac{1}{iz^3}\cdot\left(1+iz+(iz)^2+(iz)^3+\dots\right) =$$

$$= \frac{1}{iz^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{i}{z}-1+\dots =$$

$$= \frac{1}{iz^3}\sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^{n-3}$$

!sos!

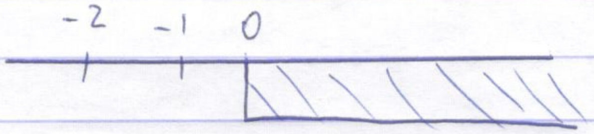
Πρόταση: Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της $f(z)$ και $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ η αντίστοιχη σειρά Laurent γύρω από το z_0. Τότε,

i) Το z_0 είναι επουσιώδες α.σ. $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $a_{-n}=0 \quad \forall n\in \mathbb{N}$.

ii) Το z_0 είναι πόλος τάξης $k\in\mathbb{N}$ $\boxed{\Longleftrightarrow} \begin{cases} a_{-k}\neq 0 \\ a_{-n}=0, \ \forall n>k. \end{cases}$

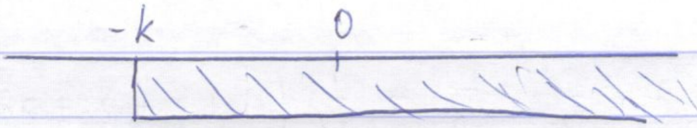
iii) Το z_0 είναι ουσιώδες α.σ. $\boxed{\Longleftrightarrow}$ $a_{-n} \neq 0$, για άπειρα $n \in \mathbb{N}$.

i)



← επουσιώδες ανώμαλο σημ.

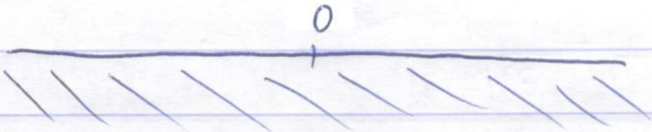
ii)



← πόλος τάξης k.

$\dfrac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$

iii)



← ουσιώδες α.σ.

Έστω z_0 μεμ. α.σ. της $f(z)$. Έστω $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$, η αντίστοιχη σειρά Laurent και έστω $\Delta(z_0, 0, R)$ ο αντίστοιχος δακτύλιος σύγκλισης. Έστω $0<\delta<R$, τότε:

$$\int_{S(z_0,\delta)} f(z)\,dz = \int_{S(z_0,\delta)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \,dz \underset{\text{(αποδυκνείεται ότι ισχύει)}}{\overset{\text{ομοιόμορφη σύγκλιση}}{=\!=\!=\!=}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{S(z_0,\delta)} (z-z_0)^n dz$$

$$= 2\pi i\, a_{-1}$$

Ορισμός: Ο a_{-1} ονομάζεται ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0 και γράφουμε:

$$a_{-1} \equiv \mathrm{Res}(f, z_0)$$

134.

Συνδυάζοντας το παραπάνω με την πρόταση αναγωγής σε μικρούς κύκλους, παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα (Θ. Ολοκληρωτικών Υπολοίπων):

Έστω A απλά συνεκτικό και f αναλυτική στο A εκτός από μεμονωμένα σημ. $z_1, \dots, z_m$. Έστω γ κλειστή καμπύλη στο A που δεν διέρχεται από τα $z_1, z_2, \dots, z_m$. Τότε:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k)\cdot I(z_k, \gamma)}$$

2η Διατύπωση: Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη και $f(z)$ αναλυτική επί της γ καθώς και στο $\text{Εσωτ}(\gamma) \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ ($z_k \in \text{εσωτ.}(\gamma)$). Τότε,

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k)}$$

Φύλλο Ασκήσεων:

9.) Ο $a \in \mathbb{R}$. Υπολογίστε: $\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)\,d\theta$.

Υπόδειξη: $I = \int_{S(1)} \frac{e^{az}}{z}\,dz$.

Θέτουμε $z = e^{i\theta} (= \gamma(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$dz = i e^{i\theta}\,d\theta$

$d\theta = \frac{dz}{i} e^{-i\theta}$

(135.)

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ae^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}} i \cancel{e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{a(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cdot e^{ia\sin\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \underline{i e^{a\cos\theta}} \left[\cos(a\sin\theta) + i\sin(a\sin\theta)\right] d\theta$$

Άρα, $\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta) d\theta = I_m(I)$

Από τον ολοκλ. τύπο Cauchy έχουμε:

$$\underline{I} = 2\pi i \cdot e^{az}\Big|_{z=0} = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Άρα, $\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a\sin\theta) d\theta = I_m(I) = 2\pi$

παρατήρηση: Το I δεν έχει πραγματικό μέρος, άρα θα πρέπει

$$\boxed{\int_0^{2\pi} - e^{a\cos\theta} \sin(a\sin\theta) d\theta = 0.}$$

11.) $f = u + iv$ ακέραια. Ν.δο. αν u κάτω φραγμένη, τότε f σταθερή.

Έχουμε $u(x,y) \geq c$, $c \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $c = 1$, δηλ.

$$u(x,y) \geq 1.$$

Άρα, $|f(z)|^2 = u^2(x,y) + v^2(x,y)$ $(z = x+iy)$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(z)|^2 \geq 1$. Ειδικότερα, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Ισχύει δηλ. ότι:

$\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$, δηλ. η $\frac{1}{f(z)}$ είναι φραγμένη και ακέραια. Άρα από το Θ. Liouville είναι σταθερή.

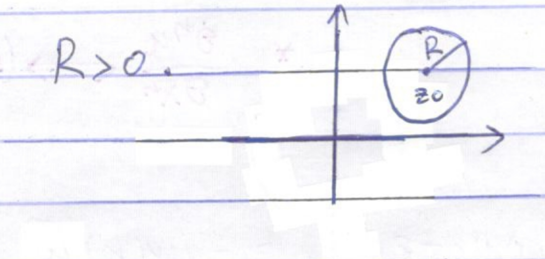
12.) $|f(z)| \leq 2+3|z|^{8/7}$, f ακέραια. Ν.δ.ο. $f(z)=Az+B$

Αρκεί να δείξουμε ότι $f''=0$. (δηλ. $f'=$ σταθερή).

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Ανισότητες cauchy: αν $|f(z)| \leq M$ στο $S(z_0,R)$, τότε

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M n!}{R^n}.$$

Έστω $R>0$.



Έστω $z \in S(z_0,R)$. Τότε,

$$|f(z)| \leq 2+3|z|^{8/7} \leq 2+3(|z_0|+|z-z_0|)^{8/7} = \boxed{2+3(|z_0|+R)^{8/7}} = M$$

Εφαρμόζουμε ανισότητα cauchy για $n=2$:

$$|f''(z_0)| \leq \frac{(2+3(|z_0|+R)^{8/7})2}{R^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

, Άρα $f''(z_0)=0$

σελ. 137.

137.

14/01/2019 #Διάλεξη 23η (Φρατζεσκάκης)

Υπενθύμιση: $\hat{u}(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-ikx} dx$

$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(k,t)\, e^{+ikx} dk$

Ας θεωρήσουμε μία Μερική Διαφ. Εξ. 1ης τάξης ως προς τοt

$u_t = F[u, u_x, u_{xx}, \ldots]$ (F πολυωνυμικής μορφής).

ή απλούστερα:

$u_t = \sum_{j=0}^{n} a_j u_{jx}$ $\to \alpha_0 u + \alpha_1 u_x + \alpha_2 u_{xx} + \cdots$, a_j = σταθ.

$\xrightarrow[\int_{-\infty}^{+\infty} dx]{\cdot e^{-ikx}}$ $\hat{u}_t \overset{*}{=} \sum_{j=0}^{n} (ik)^j a_j \hat{u}$ $\quad * \ \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \longleftrightarrow (ik)^n \hat{u}$

Θέτουμε $\sum_{j=0}^{n} (ik)^j a_j \equiv -i w(k)$, οπότε $\hat{u}_t = -iw(k)\hat{u}$

$w(k) = i\sum_{j=0}^{n} (ik)^j a_j$: Σχέση Διασποράς.

Αν, π.χ., n=3: $w(k) = i a_0 - a_1 k - i a_2 k^2 + a_3 k^3$

$w(k) \in \mathbb{R}$, αν $a_1, a_3 \in \mathbb{R}$ και $a_0, a_2 \in \mathbb{I}$ → σύνολο των καθαρά φανταστικών.

Τελικά, $\hat{u}_t = -iw(k)\hat{u} \Rightarrow \hat{u}(k,t) = \hat{u}_0(k)\, e^{-iw(k)t} \overset{\text{αντ. M.F.}}{\Longrightarrow}$

$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{i[kx - w(k)t]} dk$ και $\hat{u}_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\, e^{-ikx} dx$

138.

Για να βρούμε την σχέση διασποράς σε οποιαδήποτε ΜΔΕ δοκιμάζουμε:

$$u = u_0 e^{i[kx-\omega(k)t]} \quad , \; u_0 = \text{σταθ.}$$

Παράδειγμα: $u_t + c u_x = 0 \; , \; c \in \mathbb{R}$ (Εξ. μεταφοράς)

Αντικαθιστούμε $u = u_0 e^{i[kx-\omega(k)t]}$ και έχουμε:

$$-\cancel{u_0} i\omega(k) \cancel{e^{i[kx-\omega(k)t]}} + c\cancel{u_0} ik \cancel{e^{i[kx-\omega(k)t]}} = 0$$

$$\boxed{\omega(k) = ck} \quad \text{σχέση διασποράς.}$$

Παράδειγμα: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \; , \; c \in \mathbb{R}$ (κυματική εξ. 2ης τ.)

Αντικαθιστούμε $u = u_0 e^{i[kx-\omega(k)t]}$

$$u_0 i^2 \omega^2(k) e^{i[kx-\omega(k)t]} - c^2 u_0 i^2 k^2 e^{i[kx-\omega(k)t]} = 0$$

$$-\cancel{u_0}\omega^2(k) \cancel{e^{i[kx-\omega(k)t]}} + c^2 \cancel{u_0} k^2 \cancel{e^{i[kx-\omega(k)t]}} = 0$$

$$\omega^2(k) = c^2k^2$$

$$\omega(k) = \pm kc \longrightarrow \begin{array}{l} + : \text{κύμα} \longrightarrow \text{(προς τα δεξιά)} \\ - : \text{κύμα} \longleftarrow \text{(προς τα αριστερά).} \end{array}$$

Ορολογία: Εξισώσεις με ή χωρίς διασπορά

$$u = u_0 e^{i\theta}, \; \theta \equiv kx - \omega(k)t \; \begin{cases} k: \text{κυματαριθμός} \\ \omega: \text{γων. συχνότητα.} \end{cases}$$

Περιοδική λύση: $\begin{cases} T = \frac{2\pi}{\omega} & \text{χρονική περίοδος} \\ \lambda = \frac{2\pi}{k} & \text{μήκος κύματος / χωρ. περίοδος} \end{cases}$

Ταχύτητα φάσης: $v_p := \frac{\omega(k)}{k}$

Ταχύτητα ομάδας: $v_g := \frac{\partial \omega}{\partial k} = \omega'(k) < 0$ SOS

Ένα πρόβλημα παρουσιάζει διασπορά όταν: $\omega''(k) \neq 0$
ή
$v_p \neq v_g$

και δεν παρουσιάζει διασπορά όταν: $\omega''(k) = 0$
ή
$v_p = v_g$.

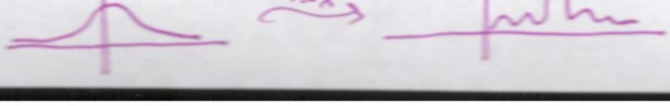
SOS

Παράδειγμα: $iu_t + u_{xx} = 0$ (εξ. Schrödinger)

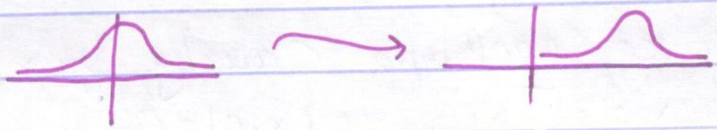
$$-i\cancel{u_0} i\omega(k) \cancel{e^{i\theta}} + \cancel{u_0} ik\, ik\, \cancel{e^{i\theta}} = 0 \Rightarrow \omega(k) = k^2$$

$$\left.\begin{aligned} v_p &= \frac{\omega}{k} = \frac{k^2}{k} = k \\ v_g &= \omega'(k) = 2k \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_p \neq v_g \text{ ή } \omega''(k) = 2 \neq 0.$$

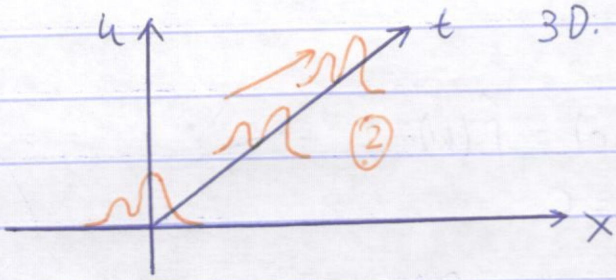
Όταν ένα κύμα παρουσιάζει διασπορά, σημαίνει ότι παραμορφώνεται καθώς διαδίδεται στον χώρο:



Αν δεν παρουσιάζει διασπορά, διαδίδεται απαραμόρφωτο:



Άσκηση: Να λυθεί η εξ. μεταφοράς $u_t + cu_x = 0$
με αρχ. συνθήκες $u(x,0) = u_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$



πως θα εξελιχθεί χρονικά το κύμα

Πρόβλημα αρχ. τιμών Cauchy

$$u_t + cu_x = 0 \overset{M.F.}{\Longrightarrow} \hat{u}_t + ikc\hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}_t = -ikc\hat{u} \Rightarrow (y' = ay,\ y = Ce^{at})$$

$$\Rightarrow \hat{u} = A(k)\, e^{-i\overbrace{kc}^{\omega}t}$$, $A(k)$ σταθ. ολοκλ. (εξαρτάται από το k).

Αρχ. συνθήκη: $u(x,0) = u_0 \Rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{u}_0(k)$
και : $\hat{u}(k,0) = A(k)$
$\Big\} \Rightarrow A(k) = \hat{u}_0(k)$

Τελικά: $\hat{u} = \hat{u}_0(k)\, e^{-ikct} \xrightarrow{Αντ. M.F.} u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{-ikct}\, e^{ikx}\, dk$

* $\hat{u}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} u_t(x,t)\, e^{-ikx}\, dx \longrightarrow$ μ.F. της u_t

$\hat{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\, e^{-ikx}\, dx \longrightarrow$ μ.F. της u.

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{ik\underbrace{(x-ct)}_{\xi}}\, dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}_0(k)\, e^{ik\xi}\, dk = u_0(\xi)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = u_0(\xi) = u_0(x-ct)}$$

Άσκηση: Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy για την $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ (1)$, $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = 0$.

$$(1) \xrightarrow{M.F.} \hat{u}_{tt} + \underbrace{k^2 c^2}_{\omega^2} \hat{u} = 0 \Rightarrow \hat{u}(k,t) = A(k) e^{-ikct} + B(k) e^{ikct} \quad (2)$$

A. Σ. : $u(x,0) = f(x) \Rightarrow \hat{u}(k,0) = \hat{f}(k)$

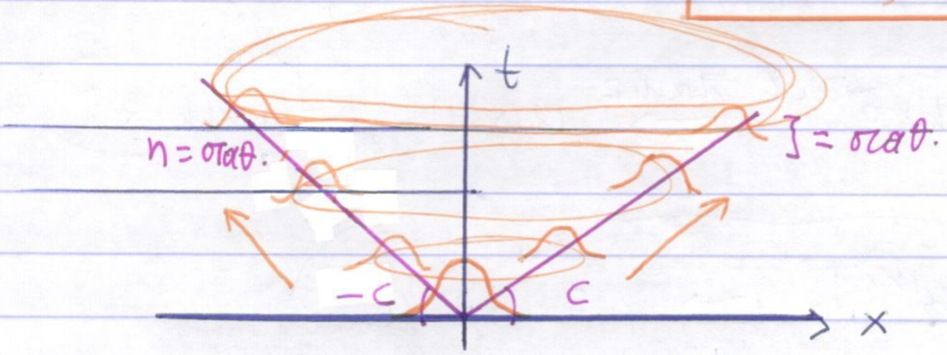
$u_t(x,0) = 0 \Rightarrow \hat{u}_t(k,0) = 0.$

$$(2) : \left.\begin{aligned} \hat{u}(k,0) &= A(k) + B(k) = \hat{f}(k) \\ \hat{u}_t(k,0) &= -ikcA(k) + ikcB(k) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A(k) = B(k) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)$$

$$(2) \Rightarrow \hat{u}(k,t) = \frac{1}{2}\hat{f}(k)\left(e^{-ikct} + e^{ikct}\right) \Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\hat{f}(k) e^{ik\underbrace{(x-ct)}_{\xi}} dk$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\hat{f}(k) e^{ik\underbrace{(x+ct)}_{\eta}} dk \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(\xi) + f(\eta)\right] = \boxed{\frac{1}{2}\left[f(x-ct) + f(x+ct)\right]}$$



κώνος φωτός

15/01/2019 # Διάλεξη $24^{η}$ (Μπαρμπάτης)

Υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

Έστω z_0 μεμονωμένο α.σ. της $f(z)$.

Αναλυτ. στον δίσκο εκτός το z_0.

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \underbrace{Res(f,z_0)=a_{-1}}_{\text{ολ. υπολ.}}$$

1) z_0 επουσ. α.σ.

Τότε, $\boxed{Res(f,z_0)=0}$

2) z_0 ουσιώδ. α.σ.

Τότε, $\boxed{\text{βρίσκουμε την σειρά Laurent}}$.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το ολ. υπολ. της $f(z)=(z^3+iz)\cdot e^{1/z}$.

Έχουμε, $\forall z \neq 0$ ότι $f(z)=(z^3+iz)\cdot\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{4!z^4}+\dots\right)$

διότι $e^w = 1+w+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^3}{3!}+\dots$

αυτοί οι όροι δίνουν $\frac{1}{z}$ και τους θέλαμε γιατί το a_{-1} είναι ο συντελεστής του $\frac{1}{z}$

Άρα, $a_{-1} = \frac{1}{4!}+\frac{i}{2!} = \frac{1}{24}+\frac{i}{2}$

3) z_0 πόλος τάξης k.

Τότε η $g(z)=\begin{cases}(z-z_0)^k f(z), & z\neq z_0\\ \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z), & z=z_0\end{cases}$, αναλ. στο z_0.

Πιο παλιά είχαμε γράψει κάτι άλλο, ισοδύναμο.

Τότε, για $z \neq z_0$, z κοντά στο z_0, έχουμε:

$$g(z) = (z-z_0)^k \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-k}^{+\infty} (z-z_0)^{n+k} \overset{n+k \equiv m}{=\!=\!=} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m-k} (z-z_0)^m$$

Άρα, $a_{m-k} = \dfrac{g^{(m)}(z_0)}{m!}$.

Ειδικότερα, $a_{-1} = \dfrac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$ $\quad (m-k=-1 \Rightarrow m=k-1)$

Δηλαδή, $\boxed{\mathrm{Res}(f, z_0) = \dfrac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right)}$

Στην πράξη, έχουμε συνήθως συναρτήσεις της μορφής

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

όπου g, h αναλυτ. στο z_0 και $h(z_0) = 0$.

<u>Παρατήρηση</u>: 1) Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης n της $h(z)$ και $g(z_0) \neq 0$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης n της $f = g/h$.

2) Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης n της $h(z)$ και ρίζα τάξης m της $g(z)$, τότε το z_0 επουσ. α.σ. αν $m \geq n$, ενώ το πόλος τάξης $n-m$ αν $m < n$.

144.

Περίπτωση 1: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$, $g(z_0) \neq 0$.

$z_0 \longrightarrow$ πόλος $1^{ης}$ τάξης / απλός πόλος

Άρα, $\text{Res}(\frac{g}{h}, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$

Περίπτωση 2: $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0$

$g(z_0) \neq 0$.

$z_0 \longrightarrow$ πόλος τάξης $2^{ης}$

$\exists\, H(z)$ αναλ. στο z_0 με $H(z_0) \neq 0$, ώστε $h(z) = (z - z_0)^2 H(z)$

Άρα, $\text{Res}(g/h, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^2 \frac{g(z)}{h(z)} \right]' = \lim_{z \to z_0} \left[\cancel{(z - z_0)^2} \frac{g(z)}{\cancel{(z - z_0)^2} H(z)} \right]' =$

$$= \left(\frac{g}{H}\right)' \Big|_{z = z_0} = \frac{g'(z_0)}{H(z_0)} - \frac{g(z_0) H'(z_0)}{H^2(z_0)}$$

Ισχύει για z κοντά στο z_0:

$$h(z) = (z - z_0) H(z) = (z - z_0) \left(H(z_0) + H'(z_0)(z - z_0) + \frac{H''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots \right) =$$

$$= H(z_0)(z - z_0)^2 + H'(z_0)(z - z_0)^3 + \frac{H''(z_0)}{2!} (z - z_0)^4 + \dots$$

Άρα αυτή είναι η σειρά Taylor της h

$$H(z_0) = \frac{h''(z_0)}{2!}$$

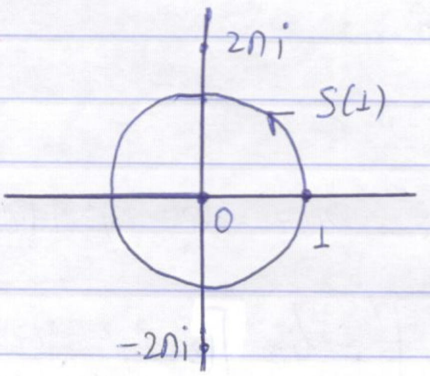
$$H'(z_0) = h'''(z_0)/3!$$

Άρα, $\operatorname{Res}(g/h, z_0) = 2\dfrac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \dfrac{2}{3}\dfrac{g(z_0)\,h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2} =$

$= (z-z_0)^2\left(H(z_0) + H'(z_0)(z-z_0) + \dfrac{H''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots\right.$

$=$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_{S(1)} \frac{dz}{(e^z-1)^2}$.



Από το θ. ολ. υπολ. έχουμε:

$I = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{(e^z-1)^2}, 0\right)$, διπλός πόλος

$q(0)=1$, $q'(0)=1/2$ — σειρά Taylor της $q(z)$

Έχουμε, $e^z - 1 = z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dots = z\left(1 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^2}{3!} + \dots\right) = z\,q(z)$

Άρα, $\operatorname{Res}\left(\dfrac{1}{(e^z-1)^2}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\left[\cancel{z^2}\dfrac{1}{\cancel{z^2}q^2(z)}\right]' = \left(\dfrac{1}{q^2}\right)'(0) = -2\dfrac{q'(0)}{q^3(0)} =$

$= -2\dfrac{\frac{1}{2}}{1^3} = -1.$

Εφαρμογή σε πραγματικά ολοκληρώματα

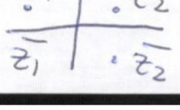
A.) ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx}$, p, q πολυώνυμα.

$q(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

* deg : βαθμός πολυωνύμου. $\deg(q) \geq 2 + \deg(p)$

Έστω $z_1, z_2, \dots, z_m$ οι πόλοι της $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ στο άνω ημιεπίπεδο

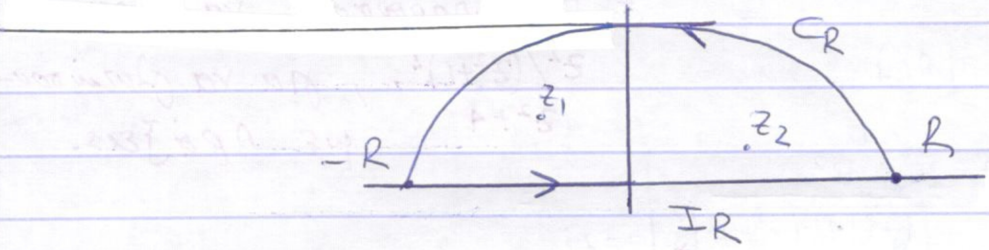
(ρίζες της $q(z)$)



*Άσκηση: Για αρκετά μεγάλα $|z|$, ισχύει $\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \le \frac{c}{|z|^2}$ *

(το παίρνουμε έτοιμο)

Έστω $R>0$ αρκετά μεγάλο ώστε $|z_k|<R$, $k=1,\dots,m$.



$\gamma_R = C_R + I_R$

Έχουμε: $\int_{I_R} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx$

διότι παίρνουμε παραμέτρηση $\gamma(x)=x$, $(x\equiv t)$

Επίσης, για μεγάλα R:

$$\left|\int_{C_R}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz\right| \le \int_{C_R}\frac{|p(z)|}{|q(z)|}\,dz \le \int_{C_R}\frac{c}{R^2}|dz| = \frac{c}{R^2}\int_{C_R}|dz| = \frac{c}{R^2}\pi R \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Άρα, $\int_{\gamma R}\frac{p(z)}{q(z)}\,dz = \int_{I_R} + \cancel{\int_{C_R}}^{\,0} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, για μεγάλα R.

Σύμφωνα με το Θεώρ. Ολ. υπολ.:

$2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res\left(\frac{p}{q}, z_m\right)$

* SOS * !

Άρα, $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res\left(\frac{p}{q}, z_k\right)}$, όπου $z_1,\dots,z_m$ οι ρίζες της $q(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)\cdot(x^2+1)^2}\,dx$.

Οι ρίζες του παρονομαστή στο άνω ημιεπ. είναι το $2i$ (απλός πόλος) και το i (διπλός πόλος).

Υπολογίζουμε τα ολοκλ. υπολ.:

* θα μπορούσαμε να πάρουμε $\dfrac{z^2/(z^2+1)^2}{z^2+4}$, για να γλιτώσουμε πράξεις.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+4)(z^2+1)^2}, 2i\right) = \left.\frac{z^2}{\left[(z^2+4)\cdot(z^2+1)^2\right]'_{*}}\right|_{z=2i} =$$

$$= \left.\frac{z^2}{2z(z^2+1)^2+(z^2+4)\cdot 2\cdot(z^2+1)2z}\right|_{z=2i} =$$

$$= \frac{(2i)^2}{2\cdot 2i\,((2i)^2+1)^2} = \frac{-4}{4i\cdot 9} = -\frac{1}{9i}$$

Επίσης:

$$\operatorname{Res}(\ldots,i) = \lim_{z\to i}\left[\cancel{(z-i)^2}\frac{z^2}{(z^2+4)\cdot(z+i)^2\cancel{(z-i)^2}}\right]' =$$

$$= \left.\frac{2z(z^2+4)\cdot(z+i)^2 - z^2\left(2z(z+i)^2+(z^2+4)\cdot 2\cdot(z+i)\right)}{(z^2+4)^2(z+i)^4}\right|_{z=i} =$$

$$= \frac{2i\cdot 3\cdot(-4)+(2i(-4)+3\cdot 2\cdot 2i)}{9\cdot 16} = \frac{-24i+4i}{9\cdot 16} =$$

$$= \frac{-\overset{5}{\cancel{20}}i}{9\cdot\cancel{16}4} = \frac{-5i}{9\cdot 4} = \frac{-5i}{36}$$

Άρα, $I = 2\pi i \left(Res(2i) + Res(i) \right) = 2\pi i \left(-\frac{1}{9i} + \frac{5}{36i} \right) = \frac{2\pi}{36} = \frac{\pi}{18}$

B.) ολοκληρώματα της μορφής $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x \, dx \quad ή \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x \, dx}$

$q(x) \neq 0$, $\deg(q) > \deg(p)$.

* SOS * !

Έχουμε :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos x \, dx = Re\left[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{iz}, z_k \right) \right]}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin x \, dx = Im\left[2\pi i \sum_{k=1}^{m} Res\left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{iz}, z_k \right) \right]}$$

όπου z_k οι πόλοι της $p(z)/q(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο (όπως και πριν).

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx$.

$x^2+4 =$ $\longrightarrow$ $z = 2i$ ρίζα στο άνω ημιεπίπεδο.

Άρα, $Res\left(\frac{z e^{iz}}{z^2+4}, 2i \right) = \left. \frac{z e^{iz}}{2z} \right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{2}$

Άρα, $I = Im\left[2\pi i \cdot \frac{e^{-2}}{2} \right] = \frac{\pi}{e^2}$

(149.)

Γ.) Ολοκλ. της μορφής $\boxed{\int_0^{2\pi} f(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta}$

συνήθως f ρητή συνάρτηση.

Θέτουμε $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

$$dz = i e^{i\theta} d\theta = i z d\theta \Rightarrow \boxed{d\theta = \frac{dz}{iz}}$$

Τώρα, $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \boxed{\dfrac{z + \frac{1}{z}}{2}}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \boxed{\dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i}}$

γιατί αν βάλουμε $\bar{z}$, τότε δεν θα έχουμε αναλυτική συνάρτηση

Άρα, $\boxed{I = \int_{S(1)} R\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right) \frac{dz}{iz} \longrightarrow \text{Θ. ολ. υπολ.}}$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί το $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$.

$$I = \int_{S(1)} \frac{1}{5 - 4\cdot\frac{z + 1/z}{2}} \cdot \frac{dz}{iz} = \frac{1}{i}\int_{S(1)} \frac{dz}{-2z^2 + 5z - 2},$$

$\Delta = 5^2 - 4(-2)\cdot(-2) = 25 - 16 = 9$. Ρίζες: $\dfrac{-5 \pm 3}{2(-2)} =$ $\frac{1}{2} \leftarrow$ την θέλω (απλός πόλος), $2 \leftarrow$ αγνοούμε (έξω από τον S(1))

Άρα, από το Θ. ολοκλ. υπολ.:

$$I = \frac{1}{i} 2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{-2z^2+5z-2}, \frac{1}{2}\right) = 2\pi \frac{1}{(-2z^2+5z-2)'}\Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2\pi \frac{1}{-4z+5}\Big|_{z=\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{-\frac{4}{2}+5} = \frac{2\pi}{3}$$