ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2020-2021
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 3

1. Να βρεθούν και να χαρακτηριστούν τα ανώμαλα σημεία των συναρτήσεων:

$$f(z) = \frac{\sin 4z - 4z}{z^2} \quad , \quad g(z) = \frac{e^z - 1}{\sin^2 z} \quad , \quad h(z) = \sin(z + \frac{1}{z}).$$

2. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο. *[Υπόδειξη: θεωρείστε τη συνάρτηση $f(1/z)$]*

3. Να βρεθεί το ιδιάζον μέρος της σειράς Laurent γύρω από το μηδέν της συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)\sin z}\,.$$

   Ποιος είναι ο δακτύλιος σύγκλισης της σειράς ;

4. Έστω f αναλυτική συνάρτηση με μία μοναδική ρίζα $z_0 \in D(1)$ τάξης m. Να δειχθεί ότι

$$\int_{S(1)} \frac{zf'(z)}{f(z)} dz = 2\pi m i z_0\,.$$

5. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα

$$\int_{S(1,5)} (z - z^3) e^{\frac{1}{z^2}} dz\,, \qquad \int_{S(i,3)} \frac{z+1}{(z-2)^2(e^{iz}-1)} dz.$$

6. Έστω το μιγαδικό πολυώνυμο

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_z + a_0.$$

   Να δειχθεί ότι

$$\int_{S(1)} z^{n-1} |p(z)|^2 dz = 2\pi i\, a_0\, \overline{a_n}\,.$$

7. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+4} dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{16+x^4}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5 - 3\sin\theta} d\theta \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad (|a| < 1) \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+2x^2+1} dx \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2} dx$$