ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2022-2023
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση
$$f(z) = \frac{az+b}{\overline{a}+\overline{b}z}$$
απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο κύκλο $S(1)$ στον εαυτό του.

2. Να δειχθεί ότι για κάθε $z \in D(1)$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει
$$\left|\frac{z^{2n}}{2+z^n+z^{5n}}\right| \leq \frac{|z|^{2n}}{2(1-|z|)}.$$

3. Να δειχθεί ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $\sin(a/2) \neq 0$ ισχύει
$$\sin a + \sin(2a) + \ldots + \sin(na) = \frac{\cos\frac{a}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})a}{2\sin\frac{a}{2}}\,.$$

4. (i) Έστω $p(z)$ πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Να δειχθεί ότι αν το z_0 είναι ρίζα του $p(z)$ τότε και το $\overline{z_0}$ είναι ρίζα. (ii) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του πολυωνύμου
$$p(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$
αφού επαληθευτεί ότι το i είναι μία ρίζα.

5. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (δηλ. το σύνολο) όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία $\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = 2$.

6. Να δειχθεί ότι το ίχνος της καμπύλης
$$\gamma(t) = \frac{1}{1+\cos t + i\sin t}\,, \qquad t \in (-\pi, \pi)\,,$$
είναι ευθεία.

7. (α) Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδειχθεί ότι
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3\ .$$
(β) Να αποδειχθεί και το αντίστροφο (Πιο δύσκολο. Δείξτε πρώτα ότι η ιδιότητα εξακολουθεί να ισχύει αν εφαρμόσουμε μία παράλληλη μεταφορά ή μία στροφή στους z_1, z_2, z_3.)

8. Να υπολογιστεί το $(1+i)^{1+i}$.

9. Να δειχθεί ότι $z^{1/n} = \sqrt[n]{z}$ ως πλειότιμες συναρτήσεις.

10. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$ το

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|^{\alpha}}{z^2}.$$

11. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2 \log z$ (ως πλειότιμες συναρτήσεις). Όμως $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;