ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2024-2025
ΜΜΦ Ι

Ασκηση. (α) Να δειχθεί ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \tag{1}$$

σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta. \end{cases} \tag{2}$$

(β) Να δειχθεί ότι

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} \tag{3}$$

Λύση. Οι μερικές παράγωγοι του μετασχηματισμού $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ είναι

$$x_r = \cos\theta, \;\; y_r = \sin\theta, \;\; x_\theta = -r\sin\theta, \;\; y_\theta = r\cos\theta$$

ενώ για τον αντίστροφο μετασχηματισμό έχουμε

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \qquad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\theta_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \theta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Μέρος (α) (i) *Με μετατροπή από καρτεσιανές σε πολικές.*

Έχουμε

$$\begin{aligned} u_x &= u_r r_x + u_\theta \theta_x = \cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r} u_\theta \\ u_y &= u_r r_y + u_\theta \theta_y = \sin\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r} u_\theta \\ v_x &= v_r r_x + v_\theta \theta_x = \cos\theta\, v_r - \frac{\sin\theta}{r} v_\theta \\ v_y &= v_r r_y + v_\theta \theta_y = \sin\theta\, v_r + \frac{\cos\theta}{r} v_\theta. \end{aligned}$$

Συνεπώς οι

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

γράφονται ισοδύναμα

$$\begin{cases} \cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r} u_\theta = \sin\theta\, v_r + \frac{\cos\theta}{r} v_\theta \\ \sin\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r} u_\theta = -\cos\theta\, v_r + \frac{\sin\theta}{r} v_\theta. \end{cases} \tag{4}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (4). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $\cos\theta$, την δεύτερη με $\sin\theta$ και προσθέτοντας προκύπτει η πρώτη από τις (2). Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση των (4) με $\sin\theta$, την δεύτερη με $-\cos\theta$ και προσθέτοντας προκύπτει η δεύτερη από τις (2).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (2).

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των (2) με $\cos\theta$ και την δεύτερη με $\sin\theta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \cos\theta\, u_r &= \frac{1}{r}\cos\theta\, v_\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta u_\theta &= \sin\theta\, v_r \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η πρώτη των (4). Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των (2) με $\sin\theta$ και την δεύτερη με $-\cos\theta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sin\theta\, u_r &= \frac{1}{r}\sin\theta\, v_\theta \\ \frac{1}{r}\cos\theta u_\theta &= -\cos\theta\, v_r \end{aligned}$$

και προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει η δεύτερη των (4). Συνεπώς αποδείξαμε ότι οι (2) και (4) είναι ισοδύναμες.

(ii) *Με μετατροπή από πολικές σε καρτεσιανές.*

Έχουμε

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r = \cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y \\ u_\theta &= u_x x_\theta + u_y y_\theta = -r\sin\theta\, u_x + r\cos\theta\, u_y = -y u_x + x u_y \\ v_r &= v_x x_r + v_y y_r = \cos\theta\, v_x + \sin\theta\, v_y \\ v_\theta &= v_x x_\theta + v_y y_\theta = -r\sin\theta\, v_x + r\cos\theta\, v_y \end{aligned}$$

Συνεπώς οι

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta \end{cases}$$

γράφονται ισοδύναμα

$$\begin{cases} \cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y = -\sin\theta\, v_x + \cos\theta v_y \\ \sin\theta\, u_x - \cos\theta u_y = \cos\theta\, v_x + \sin\theta\, v_y \end{cases} \tag{5}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (5). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $\cos\theta$, την δεύτερη με $\sin\theta$ και προσθέτοντας προκύπτει η πρώτη από τις (1). Επίσης, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη σχέση με $\sin\theta$, την δεύτερη με $-\cos\theta$ και προσθέτοντας προκύπτει η δεύτερη από τις (1).

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι (1). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των (1) με $\cos\theta$, την δεύτερη με $\sin\theta$ και προσθέτοντας παίρνουμε την πρώτη από τις (5). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη των (1) με $\sin\theta$, την δεύτερη με $-\cos\theta$ και προσθέτοντας παίρνουμε την δεύτερη από τις (5). Συνεπώς αποδείξαμε ότι οι (1) και (5) είναι ισοδύναμες.

Μέρος (β) (i) *Με μετατροπή από καρτεσιανές σε πολικές.*

Έχουμε ήδη δει ότι

$$u_x = \cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta.$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στην u_x αντί της u παίρνουμε

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \Big(\cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta\Big)_x \\ &= \cos\theta\Big(\cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta\Big)_r - \frac{\sin\theta}{r}\Big(\cos\theta\, u_r - \frac{\sin\theta}{r}u_\theta\Big)_\theta \\ &= \cos^2\theta u_{rr} + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}u_\theta - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}u_{r\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}u_r + \frac{\sin^2\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε

$$u_y = \sin\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta$$

και

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \sin\theta\Big(\sin\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta\Big)_r + \frac{\cos\theta}{r}\Big(\sin\theta\, u_r + \frac{\cos\theta}{r}u_\theta\Big)_\theta \\ &= \sin^2\theta u_{rr} - 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}u_\theta + 2\frac{\cos\theta\sin\theta}{r}u_{r\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}u_r + \frac{\cos^2\theta}{r^2}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει η (3).

(ii) *Με μετατροπή από πολικές σε καρτεσιανές.*

Έχουμε ήδη δει ότι

$$u_r = \cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y. \tag{6}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \Big(\cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_y\Big)_r \\ &= \cos\theta\,(u_x)_r + \sin\theta\,(u_y)_r \\ &= \cos\theta\Big(\cos\theta\, u_{xx} + \sin\theta\, u_{xy}\Big) + \sin\theta\Big(\cos\theta\, u_{xy} + \sin\theta\, u_{yy}\Big) \\ &= \cos^2\theta u_{xx} + 2\cos\theta\sin\theta u_{xy} + \sin^2\theta u_{yy}. \end{aligned} \tag{7}$$

Επίσης είδαμε ότι

$$u_\theta = -yu_x + xu_y.$$

Αρα

$$\begin{aligned} u_{\theta\theta} &= -y\Big(-y\,u_x + x\,u_y\Big)_x + x\,\Big(-y\,u_x + x\,u_y\Big)_y \\ &= y^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + x^2 u_{yy} - xu_x - yu_y \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = \sin^2\theta\,u_{xx} - 2\cos\theta\sin\theta\,u_{xy} + \cos^2\theta\,u_{yy} - \frac{\cos\theta}{r}u_x - \frac{\sin\theta}{r}u_y. \quad (8)$$

Επίσης από την (6) έχουμε

$$\frac{1}{r}u_r = \frac{\cos\theta}{r}\,u_x + \frac{\sin\theta}{r}\,u_y. \quad (9)$$

Προσθέτοντας τις (7), (8) και (9) προκύπτει η (3).