

ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2024-2025
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 1

1. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z^2 + z + 2}{z^2 - 3}.$$

Να δειχθεί ότι αν $z \in \overline{D}(0, 1)$ τότε $f(z) \in \overline{D}(1, 3)$.

2. Αποδείξτε ότι αν $|z| \leq 1$ και $|w| \leq 1$ τότε $|z + w| \leq |1 + z\bar{w}|$. [Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τη σχέση $a\bar{a} = |a|^2$.]

3. Να δειχθεί ότι για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\sin(\theta/2) \neq 0$ ισχύει

$$\sin \theta + \sin(2\theta) + \dots + \sin(n\theta) = \frac{\sin \theta + \sin(n\theta) - \sin((n+1)\theta)}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (δηλ. το σύνολο) όλων των $z \in \mathbb{C}$ για τα οποία $\operatorname{Im}(\frac{1}{z}) = -1/6$.

5. Να δειχθεί ότι το ίχνος της καμπύλης

$$\gamma(t) = \frac{1}{1 + \cos t + i \sin t}, \quad t \in (-\pi, \pi),$$

είναι ευθεία.

6. Έστω z_1, z_2, z_3 μιγαδικοί αριθμοί οι οποίοι σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Να αποδειχθεί ότι

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

7. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\cos z$ είναι το \mathbb{C} .

8. Να λυθεί η εξίσωση $e^z = i$.

9. Αποδείξτε ότι $\log z^2 \neq 2 \log z$ (ως πλειότεμες συναρτήσεις). Όμως $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$. Τι συμβαίνει ;