

ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2024-2025
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 2

1. Ναδειχθεί ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+i)^2 e^{-(1+2i)nz}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E_\beta = \{x+iy : x-2y \geq \beta\}$ για κάθε $\beta > 0$.

2. Ναδειχθεί ότι αν οι συναρτήσεις $f(z)$ και $\overline{f(z)}$ είναι και οι δύο ολόμορφες στο \mathbb{C} τότε η f είναι σταθερή.

3. Ναβρεθεί η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+i)^2 (2^n + 3^n) z^n$$

4. Ναβρεθεί για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 0 η συνάρτηση

$$f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x+iy}, & x+iy \neq 0, \\ 0, & x+iy = 0. \end{cases}$$

5. Ναεξεταστεί ως προς τη διαφορισιότητα η συνάρτηση $f(z) = (z-1)(\operatorname{Re}(z))^2$.

6. Ναδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$ ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στο $z=0$. Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο αυτό;

7. Ναδειχθεί ότι η $u(x,y) = e^y \cos x + xy$ είναι αρμονική συνάρτηση και ναβρεθεί η συζυγής αρμονική $v(x,y)$.

8. (α) Ναδειχθεί ότι οι συνθήκες Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες γράφονται

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r} u_\theta. \end{cases}$$

(β) Έστω $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ακτινικά συμμετρική συνάρτηση, δηλαδή

$$u(x,y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ναδειχθεί ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη τότε

$$(\Delta u)(x,y) = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r).$$

(γ) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική. Τι μπορείτε να πείτε σχετικά με τη συζυγής αρμονική;