ΕΚΠΑ. Τμήμα Φυσικής. Ακαδ. έτος 2024-2025
ΜΜΦ Ι - Φύλλο 3

1. Έστω f ακέραια συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(z)| \leq c(1+|z|^{5/2})$ για κάποιο $c > 0$ και κάθε $z \in \mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ δύο. [*Υπόδειξη. Εργαστείτε όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Liouville*]

2. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{S(1)} \frac{z+i}{1+2z-\cos z} dz \ .$$

3. Έστω $f(z)$ ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$. Να δειχθεί ότι

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2\theta \, d\theta = \pi f(0) + \frac{\pi}{4} f''(0) \, .$$

4. Έστω ότι το z_0 είναι τριπλή ρίζα της ολόμορφης συνάρτησης $h(z)$. Να βρεθούν τα $A, B, C \in \mathbb{C}$ για τα οποία ισχύει

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{A}{(z-z_0)^3} + \frac{B}{(z-z_0)^2} + \frac{C}{z-z_0} + g(z)$$

όπου g ολόμορφή στο z_0.

5. Έστω $f(z)$ ακέραια συνάρτηση με $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Να αποδειχθεί ότι η $f(z)$ είναι πολυώνυμο. [*Υπόδειξη. Θεωρείστε την $f(1/z)$*]

6. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_{S(2)} \frac{dz}{z^{2025}-1} = 0.$$

7. Έστω γ απλή κλειστή καμπύλη θετικής φοράς και $f(z)$ ολόμορφη και διάφορη του μηδενός επί της γ και στο εσωτερικό της γ, εκτός από πεπερασμένου πλήθους ρίζες $\{p_k\}$ και πεπερασμένου πλήθους πόλους $\{q_m\}$. Να απόδειχθεί η *αρχή του ορίσματος*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_k [\text{πολλαπλότητα της ρίζας } p_k] \ - \ \sum_m [\text{τάξη του πόλου } q_m].$$