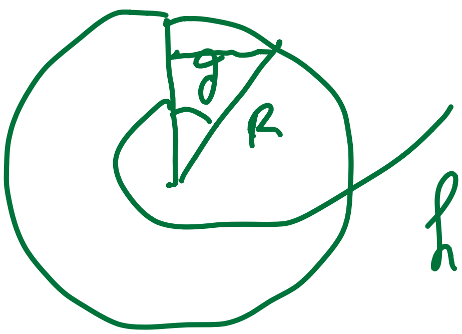
Απαντήσεις στη σειρά Α, Μηχ. ΙΙ

26/6/2020

Πρώτο μέρος

1.



$R\cos\theta$

$$L = \frac{1}{2} R^2(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\phi^2) - mgR\cos\theta$$

2.

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p} = e^{-\beta t}\frac{p}{m}$$

$$\dot p = \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \sim \text{άρα } p = p_0$$

Άρα $\dot x = e^{-\beta t}\frac{p_0}{m}$

Εξίσωση $\ddot x = -\beta \dot x$ άρα η περιγράφει κίνηση σωματιδίου με γραμμική απόσβεση.

3. Είναι $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = p + x$

Άρα $p = \dot{x} - x$

η L είναι μετασχ. Legendre της H

με $\dot{x}$, άρα

$L(x,\dot{x}) = \dot{x}p - \mathcal{H}(x,p)$, όπου

το p έχει εκφραστεί συναρτήσει

των $x, \dot{x}$

Άρα $L(x,\dot{x}) = \dot{x}(\dot{x}-x) - \frac{1}{2}\left[(p+x)^2 + x^2\right]$

$= \dot{x}(\dot{x}-x) - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2)$

$= \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2} - x\dot{x}$

αλλά $x\dot{x} = \frac{d}{dt}\left(x^2/2\right)$ μετασχ. βαθμίδας

Άρα η L είναι ισοδύναμη με

την $\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^2}{2}$,

με $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}$ (αρμονικός ταλαντωτής)

4. Είναι
$$V = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2\right)$$

ή $V = \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j$, με

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

και $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Εξ. κίνησης $M\ddot{x} + Kx = 0$

κανονικοί $e^{i\omega t}\hat{x}$ θα πάρω
τρόποι
ταλάντωσης: $\left(-\omega^2 M + K\right)\hat{x} = 0$

δηλαδή απαιτείται, για

$\underline{x} \neq 0$, $\det(K - \omega^2 M) = 0$

ή $\begin{vmatrix} 2-\omega^2 & -1 \\ -1 & 2-\omega^2 \end{vmatrix} = 0$

$(2-\omega^2)^2 = 1$, $2-\omega^2 = \pm 1$, $\omega^2 = 2 \pm 1$

άρα $\omega^2 = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

όταν $\omega^2 = 1$ $(2-\omega^2)x_1 = x_2$

δηλαδή $x_1 = x_2$, τρόπος ταλάντ. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

όταν $\omega^2 = 3$ $x_1 = -x_2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

τρόπος ταλάντωσης

Στον αρχικό χρόνο ταλαντώσεων η απόσταση των σωματιδίων είναι $x_1 - x_2 = 0$ για πάντα, αν το σύστημα έχει αρχικά δοθεί σε αυτή την κατάσταση.

5. Εδώ υπάρχουν πολλές συμμετρίες της $V(x+y-2z)$

π.χ.

$$\left.\begin{aligned} x &\to x+\varepsilon \\ y &\to y-\varepsilon \\ z &\to z \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_x - P_y$$

διατηρείται

αλλά

$$\left.\begin{aligned} x &\to x \\ y &\to y+\varepsilon \\ z &\to z+\varepsilon/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_y + \frac{P_z}{2}$$

διατηρείται

αλλά

$$\left.\begin{aligned} x &\to x+\varepsilon \\ y &\to y+\varepsilon \\ z &\to z+\varepsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_x + P_y + P_z$$

διατηρείται.

6. $L_x = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}_x$, $L_x = y p_z - z p_y$

$$\{y p_z, p_z\} = 0$$

$$\{z p_y, p_z\} = \frac{\partial}{\partial z}(z p_y) \frac{\partial}{\partial p_z} p_z = p_y$$

άρα $\{L_y, p_z\} = -p_y$

$$\frac{dL_x}{dt} = \{L_x, H\} = \{L_x, p_z^2\}$$

$$= 2p_z\{L_x, p_z\} = -2p_y p_z$$

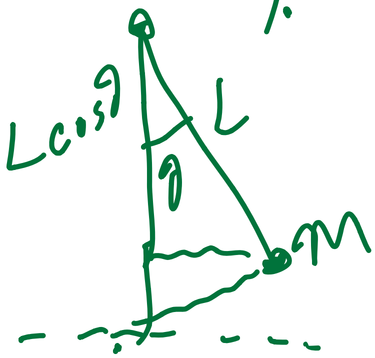
Αλλά και από τις Hamiltonιανές

$\dot{p}_y = \{p_y, p_z^2\} = 0$ και $\dot{p}_z = \{p_y, p_z^2\} = 0$, άρα p_y, p_z σταθερές

και συνεπώς $\frac{dL_x}{dt}$ είναι σταθερή.

ο.ε.δ.

Τ: Πρόβλημα



1. $L = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) - mgr(1-\cos\theta) + \lambda(r-L)$

2. $\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$, $\frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\theta^2 - mg(1-\cos\theta) + \lambda$

$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m r^2\dot\theta$, $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta$

Συνεπώς οι E-L είναι

α) $m\ddot r = m r\dot\theta^2 - mg(1-\cos\theta) + \lambda$

$\frac{d}{dt}(\cancel{m} r^2\dot\theta) = -\cancel{m} g r\sin\theta$ (β)

γ) $r = L$

3. Από (β) & (γ) έχω: $\ddot\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta$

Άρα $\dot\theta\ddot\theta = -g/L \sin\theta\,\dot\theta$

ή $\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{g}{L}\cos\theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(0) - \frac{g}{L}\cos\theta(0)$

Αν $\theta(0) = \pi/2$, $\cos\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$

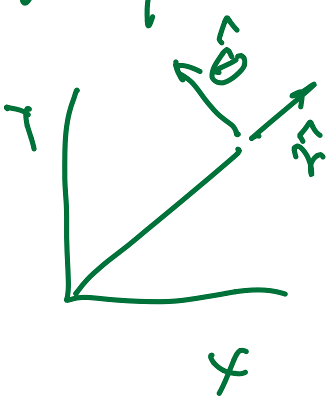
Για τη θέση $\theta = 0$, θα είναι

$$\dot{\theta}_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

Η αντίδραση από το (α) είναι

$$\lambda = -mL\left(\sqrt{\frac{2g}{L}}\right)^2 = -2mg \; !$$

δύο φορές το βάρος της μάζας.

4. 

$\hat{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta)$

$\hat{r} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{y}{r}\\ \cos\theta &= \frac{x}{r}\end{aligned}}$$

Για $\vec{A} = -\frac{B}{2}\sqrt{x^2+y^2}\left[-\sin\theta, \cos\theta, 0\right]$

$= +\frac{B}{2}\left[y, -x, 0\right]$

A $\vec{B} = \frac{B}{2}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -B\hat{z}$

Συνάρτηση L είναι

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr(1-\cos\theta) - \frac{qB}{2}\left(y\dot{x} - x\dot{y}\right) + \lambda$$

αλλά

$$y\dot{x} - x\dot{y} = -\frac{L_z}{m} = -r^2\dot{\theta}$$

πράγματι $\quad y = r\sin\theta$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$y\dot{x} = r\dot{r}\sin\theta\cos\theta - r^2\dot{\theta}\sin^2\theta$$

$$x\dot{y} = r\cos\theta\left(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$= r\dot{r}\cos\theta\sin\theta + r^2\dot{\theta}\cos^2\theta$$

άρα $\quad y\dot{x} - x\dot{y} = -r^2\dot{\theta}$

Συνάρτηση:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - mgr(1-\cos\theta) + \frac{qB}{2}r^2\dot{\theta} + \lambda(r-L)$$

$$P_\theta = m r^2 \dot\theta + \frac{qB}{2} r^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot\theta + \frac{qB}{2} r^2\right) = -mgr\sin\theta$$

$$r = L$$

πάλι έχω $\ddot\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta$

και συνθήκη πάλι

$$\dot\theta_{\theta=0} = \sqrt{2g/L}$$

από

Ακτινική εξίσωση

$$m\ddot r = m r \dot\theta^2 - mg(1-\cos\theta) + qBr\dot\theta + \lambda$$

και $r = L$

άρα $\lambda(\theta=0) = -mL\left(\frac{2g}{L}\right) - qBL\sqrt{\frac{2g}{L}}$

$$= -2mg - qB\sqrt{2gL}$$