Λύσεις Μηχ. ΙΙ
Ιούνιος 2020, Σειρά Β

1. 

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\right) - mgR\sin\theta$$

2. $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}e^{2\gamma t}$, $\dfrac{\partial L}{\partial x} = -ke^{2\gamma t}x$

E-L : $\dfrac{d}{dt}\left(m\dot{x}\,e^{2\gamma t}\right) + ke^{2\gamma t}x = 0$

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = 0$$

ή $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$.

δηλαδή περιγράφει ένα αρμονικό ταλαντωτή με δυναμική τριβή ανάλογη της ταχύτητάς του

Οι λύσεις είναι $e^{\alpha t}$ όπου

$$\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$$

δηλα $\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

$$= -\gamma \pm \gamma\sqrt{\frac{\gamma^2}{\omega_0^2} - 1}$$

εάν $\frac{\gamma}{\omega_0} < 1$ ή $\gamma\sqrt{\frac{k}{m}} < 1$ έχουμε

α και β [illegible] είναι

δηλ ή γενική λύση είναι

$$x(t) = \alpha e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right) + \beta e^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t\right)$$

ή

$$A e^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \delta\right)$$

3. $\mathcal{H} = e^{x+p}$, $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = e^{x+p}$

άρα $x + p = \log \dot{x}$, $p = \log \dot{x} - x$

Η Λαγκρανζιανή προκύπτει ως μετασχ. Legendre της $\mathcal{H}$ ως προς p. Είναι ότι

$$\mathcal{L}(x,\dot x) = \dot x p - \mathcal{H}(x,p)$$

άρα $\mathcal{L}(x,\dot x) = \dot x(\log \dot x - x) - e^{x} e^{\log \dot x} e^{-x}$

$$= \dot x \log \dot x - x\dot x - \dot x$$

αλλά $x\dot x + \dot x = \frac{d}{dt}\left(x + \frac{x^2}{2}\right)$

είναι μετασχηματισμός βαθμονόμησης για η $\mathcal{L}$

είναι ισοδύναμη με

$$\mathcal{L} = \dot x \log \dot x \quad (\text{για } \dot x > 0)$$

Η Χαμιλτονιανή για αυτή την L

είναι $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \log \dot{x} + 1$

$$\log \dot{x} = p - 1 \,, \quad \dot{x} = e^{p-1}$$

$$\mathcal{H} = \dot{x} p - \dot{x} \log \dot{x}$$

$$= p e^{p-1} - e^{p-1} \cdot (p-1)$$

$$= e^{p-1}$$

$$\mathcal{H}(x,p) = e^{p-1}$$ (ανεξ. της x)!

4. θα είναι

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ή

$$\begin{pmatrix} x_{1\varepsilon} \\ x_{2\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + A\cos(2t+\varphi)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

άρα $x_1(t) = 2 + a\cos 2t + \beta\sin 2t$

$x_2(t) = 1 + 2a\cos 2t + 2\beta\sin 2t$

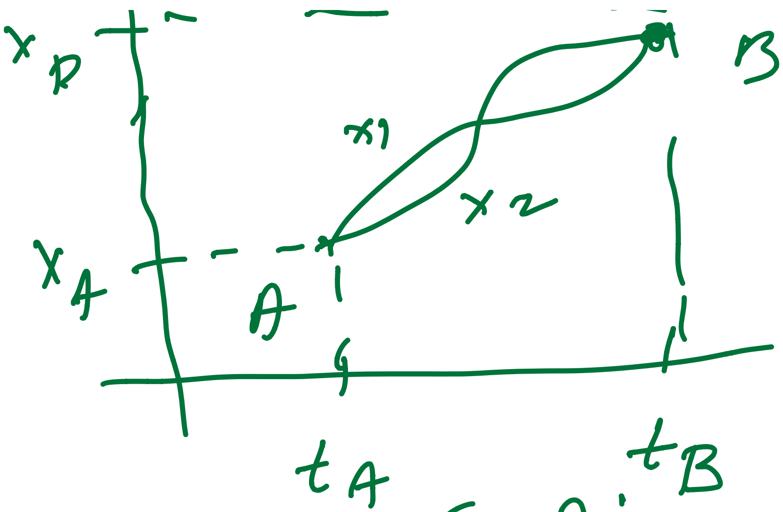
5.

$x \to x + \varepsilon$ άρα $p_x - p_y$

$y \to y - \varepsilon$ διατηρείται

όπου $p_x = 2m\dot{x}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ άρα διατηρείται

$p_y = 2m\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$ ή $2m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)(\dot{x}-\dot{y})$



Όχι πρέπει να δειχθεί ότι η δράση
είναι στάσιμη, για δε προκύπτει
από τις τιμές της δράσης σε δύο τροχιές

Η δράση της παραλλαγμένης
τροχιάς θα είναι:

$$S = 2 + O(\varepsilon^2) \quad \text{όταν}$$

στάσιμη. Δηλαδή

$$S = 2 + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3 + \gamma\varepsilon^4 + \ldots$$

θα επιτρέπεται να είναι $\alpha = 0$?

Ναι δεν επιτρέπεται αποκλειστικά.

π.χ. ας θεωρήσουμε

την $L = \dot{x}^2 - \dot{x}^3/3$

η φυσική κίνηση που την
ελαχιστοποιεί τη δράση απαιτεί
να είναι $\dot{x} =$ σταθερό
αν διαλέξουμε τέτοιο χώρο
χρονικό διάστημα ώστε $\dot{x} = 1$
να είναι η φυσική κίνηση τότε
αν κάνω μια μεταβολή ξ

$$L = (1+\varepsilon\dot{\xi})^2 - (1+\varepsilon\dot{\xi})^3/3$$

$$= 1 + 2\varepsilon\dot{\xi} + \varepsilon^2\dot{\xi}^2 - \frac{1}{3} - \varepsilon\dot{\xi} - \varepsilon^2\dot{\xi}^2 - \varepsilon^3\dot{\xi}^3/3$$

οπότε $S = \int_A^B \frac{2}{3}\,dt - \int_A^B \varepsilon^3\dot{\xi}^3/3\,dt$

Δηλ. $S[x_\varphi + \varepsilon\xi] = S[x_\varphi] - \varepsilon^3 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}^3 \, dt$

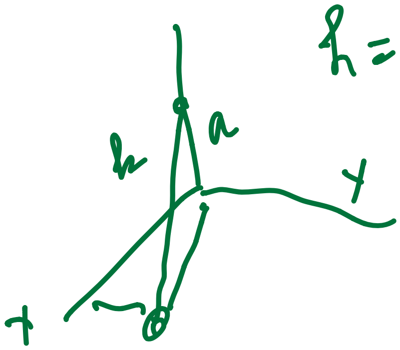
δηλαδή διαφέρει κατά δράση $O(\varepsilon^3)$ από τη φυσική τροχιά.

Παρατήρηση

Το θέμα αυτό αποδείχτηκε πιο ενδιαφέρον. Εδώ απλά υπόθεσα ότι η διαφορά πρέπει να είναι $O(\varepsilon^2)$ η απάντηση θεωρήθηκε σωστή χωρίς τη παραπάνω παρατήρηση.

Πρόβλημα

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k\left[\sqrt{x^2+y^2+a^2}-a\right]^2$$



$$p_x = m\dot{x},$$

$$F_x = \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\left[\sqrt{x^2+y^2+a^2}-a\right]$$

$$\therefore \quad m\ddot{x} = -\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\left[\sqrt{x^2+y^2+a^2}-1\right]$$

$$m\ddot{y} = -\frac{ky}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}}\left[\sqrt{x^2+y^2+a^2}-1\right]$$

Σημείο ισορροπίας το

$$x = y = 0 \quad (z = 0)$$

$$\sqrt{x^2+y^2+a^2} = a\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}} \cong a\left(1+\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2)\right)$$

$$\sqrt{x^2+y^2+a^2} - a \approx \frac{1}{2a}\, x^2+y^2$$

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2} k \frac{(x^2+y^2)^2}{4a^2}$$

$$p_x = m\dot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -k \frac{(x^2+y^2)}{4a^2} 2 \cdot 2x$$

$$= -kx \frac{(x^2+y^2)}{a^2}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} + kx \frac{x^2+y^2}{a^2} &= 0 \\ m\ddot{y} + ky \frac{x^2+y^2}{a^2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Συνεπώς η γραμμική ορμή οδηγεί σε

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= 0 \end{aligned}\right\}$$ και το σωματίδιο

είναι ελεύθερο
με συχνότητα $\omega = 0$
με κανονικό τρόπο
ταλάντωσης κάθε
διεύθυνση στο επίπεδο
x, y, μιά και η
κίνηση είναι ευθύγραμμη.
(έχουμε εκφυλισμό).

Αν βάλουμε πολλαπλασιαστή

Τότε

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda z$$

έχουμε με κάθετη τη γραμμή
κανονικά και έχουμε
αντίδραση τη δύναμη και μετράει

$$m\ddot{z} = \lambda \quad , \quad \text{και} \quad \lambda = 0$$

δεν υπάρχει κάθετη
αντίδραση.

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda z - q\dot{z}Et$$

$$p_z = m\dot{z} - qEt$$

$$m\ddot{z} - qE = \lambda$$

$$\lambda = -qE$$

$z = 0$

οπότε η αντίδραση
αξ