

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ



Τμήμα Φυσικής Εξετάσεις επί Πτυχίω Μηχανικής II 18 Απριλίου 2024

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Σύνολο μονάδων 115 (άριστα το 100).
Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [35 μονάδες]

Ένας αρμονικός ταλαντωτής με συχνότητα $\omega = 1$ και μάζα $m = 1$ κινείται από το $x(0) = 0$ ως το $x(T) = 0$.

- 1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του και εξηγήστε τι τιμές μπορεί να πάρει η παράμετρος T γνωρίζοντας τι κίνηση εκτελεί ένας αρμονικός ταλαντωτής.
- 2 Αφού γράψτε κάποια φυσική κίνηση του ταλαντωτή που να ικανοποιεί αυτές τις συνοριακές συνθήκες, υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί σε αυτή την κίνηση. Πώς σχετίζεται η απάντησή σας με το πλάτος της ταλάντωσης;
- 3 Υπολογίστε τη δράση στη μη φυσική διαδρομή

$$x(t) = t(T - t)$$

που είναι συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες και θέτοντας ως T αυτό που βρήκατε στο ερώτημα (1). Μπορείτε να εξηγήσετε το αποτέλεσμα σας σύμφωνα με την αρχή του Hamilton;

Πρόβλημα Β [35 μονάδες]

Ένα φορτισμένο με φορτίο Q σωματίδιο μάζας m κινείται εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A} = \vec{N}(t) \times \vec{r}$, όπου $\vec{r}$ η θέση του σωματιδίου και $\vec{N}(t)$ ένα χρονοεξαρτώμενο διάνυσμα σταθερής κατεύθυνσης ($\vec{N}(t) = \hat{n}N(t)$ με $\hat{n}$ κάποιο σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα και $N(t)$ το μέτρο του διανύσματος $\vec{N}(t)$).

- 1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του προβλήματος καθώς και το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. [Υποδ.: Αν $\phi = 0$, τότε $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ και ισχύει η διανυσματική ταυτότητα $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.]
- 2 Υπολογίστε τις γενικευμένες ορμές του σωματιδίου, χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συντεταγμένες. Υπάρχει κάποια που διατηρείται; Σε ποιο μετασχηματισμό-συμμετρία οφείλεται αυτή η διατήρηση; Κατασκευάστε τον γεννήτορά του.
- 3 Αν δεσμεύσουμε το σωματίδιο να κινείται πάνω στον άξονα x , πώς θα κινηθεί αυτό;

Πρόβλημα Γ [35 μονάδες]

- 1 Η Χαμιλτονιανή ενός φυσικού συστήματος είναι η

$$H = \frac{p_1^2}{2} + 3\frac{p_2^2}{2} + \frac{(x_1 - x_2)^2}{2}$$

Να γραφούν οι εξισώσεις Hamilton του συστήματος και να λυθούν (να βρεθούν όλες οι θέσεις και οι ορμές πως μεταβάλλονται με το χρόνο), αν $x_1(0) = x_2(0) = 1, p_1(0) = p_2(0) = 1$.

- 2 Να κατασκευαστεί η Λαγκρανζιανή του συστήματος και να βρεθούν οι τρόποι ταλάντωσης με τις ιδιοσυχνότητές τους.
- 3 Οι αρχικές συνθήκες του ερωτήματος (1) πόσο διεγείρουν τον εκάστοτε τρόπο ταλάντωσης; Με άλλα λόγια γράψτε την κίνηση $(x_1(t), x_2(t))^T$ του συστήματος, αναλυμένη στους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης αυτού.