ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

2 Σεπτεμβρίου 2024

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [40 μονάδες] **Βασικό θέμα για να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό**

1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και τη Χαμιλτονιανή ενός μονοδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Σε ποιο χώρο διεξάγεται η κίνηση του συστήματος στην κάθε περίπτωση; Τι διάσταση έχει αυτός;

2 Εξάγετε την κίνηση αυτού **και** από τη Λαγκρανζιανή **και** από τη Χαμιλτονιανή.

3 Αν ο αρμονικός ταλαντωτής του ερωτήματος 1 έχει και αντίσταση γραμμική ως προς την ταχύτητα, κατασκευάστε την Λαγκρανζιανή που το περιγράφει δοκιμάζοντας κάποια χρονοεξαρτημένη παραλλαγή της Λαγκρανζιανής L_0 του απλού αρμονικού ταλαντωτή της μορφής $L = T(t)L_0$. Στη συνέχεια κατασκευάστε και τη Χαμιλτονιανή του ταλαντωτή με αντίσταση.

4 Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^\top \mathbf{A}\dot{X} - \frac{1}{2}X^\top X - X^\top B$$

όπου $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ μονόστηλο διάνυσμα, $\mathbf{A}$ συμμετρικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία είναι σταθεροί αριθμοί και B σταθερό διάνυσμα που αναπαρίσταται με μια στήλη n σταθερών αριθμών. Αφού βρείτε κάποια θέση ισορροπίας του συστήματος γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή του γύρω από αυτό το σημείο. [Αν σας δυσκολεύουν οι n διαστάσεις δοκιμάστε το με 2 διαστάσεις.]

5 Ένα ελεύθερο σωματίδιο στον τριδιάστατο χώρο, δεσμεύεται έτσι ώστε να κινείται πάνω στην καμπύλη $x = z^2, y = 0$ χωρίς την παρουσία κάποιας εξωτερικής δύναμης. Αφού κατασκευάσετε τη Λαγκρανζιανή με πολλαπλασιαστές Lagrange να δειχθεί, μέσω των εξισώσεων Euler-Lagrange ή αλλιώς, ότι κατά την κίνηση του σωματιδίου πάνω στην καμπύλη, η ποσότητα $\dot{z}\sqrt{1+4z^2}$ παραμένει σταθερή.

Πρόβλημα Β [30 μονάδες]

Ένα φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q κινείται εντός του ομογενούς βαρυτικού πεδίου και είναι δεσμευμένο να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια μια κυλινδικής επιφάνειας, ακτίνας R, ο άξονας της οποίας είναι οριζόντιος (υποθέστε ότι είναι ο άξονας x).

1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του προβλήματος σε κατάλληλες κυλινδρικές συντεταγμένες χωρίς πολλαπλασιαστές Lagrange. [Αρχικά δεν υπάρχει ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.]

2 Κατασκευάστε τις εξισώσεις κίνησης και λύστε τις (βρείτε τα $\theta(t), x(t)$), θεωρώντας ότι αρχικά είναι $\theta(0) = x(0) = 0$ και $0 < \dot{\theta}(0) << \sqrt{g/R}$, $\dot{x}(0) = 1$. [Οι κατώτερες θέσεις του κυλίνδρου ανιστοιχούν σε $\theta = 0$.]

3 Κάποια στιγμή «ανάβουμε» ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, έντασης B, κατά μήκος του άξονα x, του άξονα δηλαδή του κυλίνδρου. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το ανυσματικό δυναμικό που παράγει ένα τέτοιο πεδίο έχει τη μορφή $\mathbf{A}(\rho, \theta, z) = B\rho\, \hat{\boldsymbol{\theta}}/2$, όπου $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος αύξησης της γωνίας θ. Τι θα αλλάξει στην κίνηση του προηγούμενου ερωτήματος;

4 Με δεδομένο το μαγνητικό και το βαρυτικό πεδίο, εισάγετε πολλαπλασιστή Lagrange για να περιγράψετε το συγκεκριμένο δεσμό (κίνηση επί κυλινδρικής επιφάνειας) προκειμένου να υπολογίσετε τη δύναμη της αντίδρασης του δεσμού. Αν αρχικά $\theta(0) = \pi/2,\ x(0) = 0$ και $\dot{\theta}(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ να βρεθεί ο λόγος των δυνάμεων αντίδρασης (δυνάμεων εξαιτίας των δεσμών), όταν το σωματίδιο περνάει από το κατώτερο σημείο μέσα στο βαρυτικό πεδίο δύο διαδοχικές φορές.

Πρόβλημα Γ [40 μονάδες]

Η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου που κινείται στις 2 διαστάσεις έχει τη μορφή

$$H = \frac{(p_x + y)^2}{2} + \frac{(p_y + x)^2}{2} + \frac{(x + y)^2}{2}$$

1 Δείξτε ότι η ποσότητα $G = p_x + y - p_y - x$ διατηρείται κατά την κίνηση με τη βοήθεια αγκυλών Poisson.

2 Κατασκευάστε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή.

3 Εντοπίστε κάποιο/ους όρο/ους της Λαγκρανζιανής που μπορείτε να διαγράψετε. Εξηγήστε γιατί.

4 Δείξτε ότι η εναπομείνασα Λαγκρανζιανή (μετά τη διαγραφή) αντιστοιχεί σε μια γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή ενός ζεύγους συζευγμένων ταλαντωτών, γράφοντας τους πίνακες της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του συστήματος. Ποιες οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος;

5 Βρείτε κάποια εμφανή συμμετρία του συστήματος και την ποσότητα που διατηρείται εξαιτίας αυτής. Πώς σχετίζεται αυτή με την ποσότητα G του ερωτήματος 2;