ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις Μηχανικής ΙΙ

3 Ιουλίου 2024

Απαντήστε στα ακόλουθα 3 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα. Καλή σας επιτυχία.

Πρόβλημα Α [40 μονάδες] **Βασικό θέμα για να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό**

1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή και τη Χαμιλτονιανή του ελεύθερου σωματιδίου που κινείται στις 3 διαστάσεις. Σε ποιο χώρο διεξάγεται η κίνηση του συστήματος στην κάθε περίπτωση; Τι διάσταση έχει αυτός;

2 Εξάγετε την κίνηση αυτού **και** από τη Λαγκρανζιανή **και** από τη Χαμιλτονιανή.

3 Βρείτε 2 διαφορετικές συμμετρίες της Λαγκρανζιανής του ελεύθερου σωματιδίου. Ποιες είναι οι διατηρούμενες ποσότητες που επάγει η καθεμία από αυτές;

4 Η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος έχει τη μορφή

$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^\top \mathbf{A}(X)\dot{X} - \frac{1}{2}X^\top \mathbf{B}(X)X$$

όπου $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ και $\mathbf{A}(X), \mathbf{B}(X)$ συμμετρικοί πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι συναρτήσεις όλων των συντεταγμένων $x_1, \ldots, x_n$, για παράδειγμα $A_{12} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Αφού βρείτε κάποια προφανή θέση ισορροπίας του συστήματος γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή του γύρω από αυτό το σημείο.

5 Το ελεύθερο σωματίδιο του ερωτήματος 1, δεσμεύεται έτσι ώστε να κινείται πάνω στη γραμμή $x = k_1 z, y = k_2 z$, όπου k_1, k_2 σταθερές. Ποια η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο εξαιτίας του παραπάνω δεσμού;

Πρόβλημα Β [30 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο βαρυτικό πεδίο μιας ακλόνητης σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μάζας M.

1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του προβλήματος σε σφαιρικές συντεταγμένες.

2 Ψάξτε για ομαλές κυκλικές κινήσεις της μορφής $r = R, \theta = \pi/2, \phi = \Omega t$ με R, Ω σταθερές.

3 Υπολογίστε τη δράση που αντιστοιχεί σε μια φυσική πλήρη κυκλική κίνηση του σωματιδίου σαν αυτή του ερωτήματος 2.

4 Μια παραπλήσια στη φυσική κίνηση του ερωτήματος 3, είναι η $r' = R$, $\theta' = \pi/2$, $\phi' = \Omega' t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ με Ω', α κατάλληλες παράμετροι έτσι ώστε $\phi'(t = 2\pi/\Omega) = 2\pi$ (ίδια τελική θέση με τη φυσική μετά από παρέλευση μιας περιόδου της ομαλής κυκλικής κίνησης). Υπολογίστε τη δράση της μη φυσικής αυτής κίνησης και συγκρίνετέ την με αυτή της φυσικής. Είναι συμβατό το αποτέλεσμα με την αρχή στάσιμης δράσης;

Πρόβλημα Γ [30 μονάδες]

Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε ένα πραγματικό ποδήλατο με δύο τροχούς μάζας m, ακτίνας R και ροπής αδράνειας $I = \sigma m R^2$ ο καθένας, με τους άξονές τους ενωμένους με ένα σκληρό ελατήριο σταθεράς k (που αντιπροσωπεύει τον σκελετό του ποδηλάτου) και φέρει μάζα M στο κέντρο αυτού (το σημείο αυτό βρίσκεται συνεχώς στο μέσο της απόστασης μεταξύ των κέντρων των δύο τροχών). Το ελατήριο έχει κάποιο φυσικό μήκος που καθορίζει την απόσταση των τροχών του ποδηλάτου. Για ευκολία θεωρήστε ότι το ποδήλατο είναι συνεχώς σε ένα κατακόρυφο επίπεδο που περιλαμβάνει τους τροχούς του και δεν στρίβει, ενώ οι τροχοί, λόγω μεγάλου συντελεστή τριβής, κυλίονται σε οριζόντιο έδαφος χωρίς να ολισθαίνουν.

1 Χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τις γωνίες (θ_1, θ_2) κύλισης των δύο τροχών συμπληρώστε τα στοιχεία a, b, c, d των πινάκων της κινητικής **M** και της δυναμικής ενέργειας **K** του συστήματος που περιγράφουν τη Λαγκρανζιανή του συστήματος.

$$L = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^\top \mathbf{M}\dot{\Theta} - \frac{1}{2}\Theta^\top \mathbf{K}\Theta$$

όπου $\Theta = (\theta_1, \theta_2)^\top$ και $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

Αν θέλετε απλοποιήστε τη Λαγκρανζιανή εφόσον οι δυνατές ελευθερίες προσδιορισμού αυτής το επιτρέπουν.

2 Ελέγξτε αν μια από τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος είναι η μηδενική. Σε τι κίνηση του ποδηλάτου αντιστοιχεί αυτή και τι πρόσημο έχει η Λαγκρανζιανή αν κινείται με τον αντίστοιχο κανονικό τρόπο "ταλάντωσης";

3 Θέλετε στη συνέχεια να γράψετε τη Χαμιλτονιανή του προβλήματος συνεχίζοντας τη χρήση πινάκων. Προς τούτο θα πρέπει να υπολογίσετε πρώτα τη σχέση ορμών-ταχυτήτων. Συμπληρώστε τα στοιχεία z, w του πίνακα **U** που πετυχαίνει αυτή τη σχέση:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & w \\ w & z \end{pmatrix} \dot{\Theta} = \mathbf{U}\dot{\Theta}$$

Γράψτε τη Χαμιλτονιανή με χρήση πινάκων (κατ' αντιστοιχία με την L).

4 Στη συνέχεια εισάγετε το διάνυσμα θέσης στο χώρο των φάσεων $\Xi = (\theta_1, \theta_2, p_1, p_2)^\top$ για να ξαναγράψετε τη Χαμιλτονιανή στην ακόμη πιο απλή μορφή

$$H = \frac{1}{2}\Xi^\top \mathbf{X}\Xi.$$

Ποια είναι τα στοιχεία του 4×4 πίνακα **X**;

5 **Ερώτηση μπόνους για +10 μόρια:** Θέλουμε να γράψουμε τις εξισώσεις Χάμιλτον στη μορφή $\dot{\Xi} = \mathcal{D}H$, όπου $\mathcal{D}$ είναι ένας κατάλληλος διαφορικός τελεστής της μορφής:

$$\mathcal{D} = \Gamma \begin{pmatrix} \partial/\partial\theta_1 \\ \partial/\partial\theta_2 \\ \partial/\partial p_1 \\ \partial/\partial p_2 \end{pmatrix}$$

Γράψτε την κατάλληλη μορφή που πρέπει να έχει ο 4×4 πίνακας Γ ώστε να αναπαράγονται οι εξισώσεις Χάμιλτον.

Λύσεις

Πρόβλημα Α

1. $L = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2, H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$. Η κίνηση διεξάγεται στον 3διάστατο θεσεογραφικό χώρο (Λαγκρανζιανή) και στον 6διάστατο χώρο των φάσεων (Χαμιλτονιανή).

2. $m\ddot{\vec{x}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x}(t) = \vec{x}(0) + \vec{v}(0)t$ και $\dot{\vec{x}} = \partial H/\partial\vec{p} = \vec{p}/m, \dot{\vec{p}} = -\partial H/\partial\vec{x} = \vec{0}$, οπότε $\vec{p}(t) = \vec{p}(0)$ και $\vec{x}(t) = \vec{x}(0) + (\vec{p}(0)/m)t$.

3. (α) $\vec{x} \to \vec{X} = \vec{x} + \epsilon\vec{a}$ με $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα. Οδηγεί σε διατήρηση της $\vec{p}\cdot\vec{a}$. (β) $\vec{x} \to \vec{X} = \vec{x} + \epsilon\vec{a}\times\vec{x}$ με $\vec{a}$ σταθερό διάνυσμα. Οδηγεί σε διατήρηση της $(\vec{x}\times\vec{p})\cdot\vec{a}$. (γ) $t \to T = t + \epsilon a$, οδηγεί σε διατήρηση της $(\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L)a = a\frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

4. Η συνθήκη ισορροπίας είναι $\partial V/\partial x_i = 0$ για κάθε i. Οπότε $(\mathbf{B}X)_i + X^\top \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i} X = 0$ με προφανή λύση $X = (0, 0, \ldots, 0)^\top$. Γραμμικοποιώντας τη Λαγκρανζιανή γύρο από αυτή τη θέση βρίσκουμε
$$L = \frac{1}{2}\dot{X}^\top \mathbf{A}(0)\dot{X} - \frac{1}{2}X^\top \mathbf{B}(0)X.$$
Τώρα οι πίνακες δεν αποτελούνται από συναρτήσεις αλλά από αριθμούς.

5.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{x}})^2 - \lambda_1(x - k_1 z) - \lambda_2(y - k_2 z)$$
με εξισώσεις κίνησης
$$x = k_1 z, y = k_2 z, m\ddot{x} = \lambda_1, m\ddot{y} = \lambda_2, m\ddot{z} = -\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2.$$
Εισάγοντας τις 3 τελευταίες στις 2 πρώτες (παραγωγιζόμενες 2 φορές ως προς το χρόνο) βρίσκουμε
$$\lambda_1/m = k_1(-\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2)/m, \lambda_2/m = k_2(-\lambda_1 k_1 - \lambda_2 k_2)/m$$
με λύση $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Δεν υπάρχει καμία δύναμη εξαιτίας του δεσμού.

Πρόβλημα Β

1. $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{GMm}{r}$.

2. Οι εξισώσεις κίνησης είναι
$$m\ddot{r} = mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - \frac{GMm}{r^2},$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2,$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0.$$

Η λύση που ψάχνουμε (ομαλές κυκλικές κινήσεις) οδηγεί σε λύσεις των παραπάνω της μορφής

$$mR\Omega^2 = GMm/R^2 \Rightarrow \Omega^2 = GM/R^3,$$

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

Επομένως υπάρχει τέτοια κίνηση με $\Omega = \sqrt{GM/R^3}$.

3. Η δράση της φυσικής αυτής διαδρομής θα είναι $S = \int_0^T Ldt$ με $T = 2\pi/\Omega$ δηλαδή

$$S = (\frac{1}{2}mR^2\Omega^2 + GMm/R)T = 3\pi m\sqrt{GMR}$$

4. Η αντίστοιχη δράση της μη φυσικής κίνησης είναι

$$S' = m\int_0^T dt(\frac{1}{2}R^2(\Omega' + \alpha t)^2 + GM/R) = \frac{mR^2}{2}(\Omega'^2 T + \Omega'\alpha T^2 + \alpha^2 T^3/3 + 2\Omega^2 T)$$

Δεδομένης όμως της τελικής θέσης

$$\Omega' T + \frac{1}{2}\alpha T^2 = \Omega T = 2\pi$$

έχουμε ότι

$$(\Omega'^2 + \alpha\Omega' T + \alpha T^2/4)T^2 = \Omega^2 T^2 = (2\pi)^2.$$

Βάσει αυτής της σχέσης η δράση γράφεται

$$\begin{aligned} S' &= \frac{mR^2}{2T}(4\pi^2 + \alpha^2 T^4/12 + 8\pi^2) \\ &= \frac{mR^2}{4\pi/\Omega}(12\pi^2 + \alpha^2 T^4/12) \\ &= S + m\sqrt{GMR}\alpha^2\frac{(2\pi/\Omega)^4}{48\pi} \\ &= S + (GMR)^{-3/2} m\pi^3\alpha^2 R^8/3 \qquad (1) \end{aligned}$$

η οποία είναι πάντα μεγαλύτερη από της φυσικής και επομένως ικανοποιεί το κριτήριο στασίμου της φυσικής αφού για οσοδήποτε μικρό α η διόρθωση είναι τετραγωνική στο α. Το σημαντικό είναι να βεβαιώσει κανείς ότι δεν εμφανίζονται όροι τάξης $\mathcal{O}(\alpha)$ που είναι η παράμετρος που μετράει αποκλίσεις από τη φυσική κίνηση.

Πρόβλημα Γ

1. Η κινητική ενέργεια προέρχεται από περιστροφή από μεταφορά και από αυτήν του ελατηρίου που κινείται με τη μέση ταύτητα των τροχών $V = (R\dot{\theta}_1 + R\dot{\theta}_2)/2$. Γράφοντας όλους τους όρους βρίσκουμε $a = (\sigma + 1)mR^2 + MR^2/4$, $b = MR^2/4$, $c = kR^2$, $d = -kR^2$. Θα μπορούσαν όλοι οι όροι να διαιρεθούν με το R^2.

2. Ναι είναι αφού $\det(\mathbf{K} - \mathbf{M} \cdot 0^2) = \det(\mathbf{K}) = 0$. Η ιδιοσυχνότητα αυτή αντιστοιχεί σε μηδενική παραμόρφωση του σκελετού. Το ποδήλατο απλώς τρέχει (με κοινή ταχύτητα των 2 τροχών) ενώ το ελατήριο διατηρείται στο φυσικό του μήκος.

3. $\mathbf{U} = \mathbf{M}$, οπότε $z = a, w = b$. Οπότε η Χαμιλτονιανή θα πάρει τη μορφή

$$H = \frac{1}{2} P^\top \mathbf{M}^{-1} P + \frac{1}{2} \Theta^\top \mathbf{K} \Theta.$$

4.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a/(a^2 - b^2) & -b/(a^2 - b^2) \\ 0 & 0 & -b/(a^2 - b^2) & a/(a^2 - b^2) \end{pmatrix}$$

5. Ο Γ πρέπει να έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για να οδηγεί στις σωστές εξισώσεις Χάμιλτον.