ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση Μηχανικής ΙΙ

4 Σεπτεμβρίου 2023

Απαντήστε στα ακόλουθα 4 προβλήματα με σαφήνεια και απλότητα.
Καλή σας επιτυχία. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες.

Πρόβλημα Α [25 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας ($m = 1$) κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση του δυναμικού

$$V(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{για } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{για } x \geq 0. \end{cases}$$

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του φυσικού αυτού συστήματος και από αυτήν να εξαχθεί η φυσική διαδρομή με δεδομένες συνοριακές συνθήκες: $x(0) = 0, x(3\pi/2) = 1$. Εξηγήστε για ποιο λόγο η φυσική διαδρομή δεν είναι η $x_0(t) = -\sin(t)$, αλλά η $x_0(t) = |\sin(t)|$.
2. Υπολογίστε τώρα την τιμή της δράσης S_0 που αντιστοιχεί στην ανωτέρω φυσική διαδρομή για το χρονικό διάστημα $t \in [0, 3\pi/2]$.
3. Θεωρήστε, στη συνέχεια, την μη φυσική διαδρομή

$$x_1(t) = \begin{cases} x_0(t)(1+\epsilon), & \text{για } t \in [0, \pi), \\ x_0(t), & \text{για } t \in [\pi, 3\pi/2), \end{cases}$$

   όπου x_0 η προαναφερθείσα φυσική διαδρομή. Είναι μια τέτοια παραλλαγμένη διαδρομή συμβατή με τις δοσμένες συνοριακές συνθήκες; Σε ποια αλλαγή της δράσης οδηγεί η παραλλαγμένη αυτή διαδρομή; Το αποτέλεσμα είναι συμβατό με την αρχή της στάσιμης δράσης;

Πρόβλημα Β [25 μονάδες]

Ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να κινείται χωρίς την παρουσία τριβών επάνω σε μια **οριζόντια** κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας R και άπειρου μήκους. Δεν υπάρχει (για τα ερωτήματα 1,2) βαρυτικό πεδίο στην περιοχή.

1. Γράψτε σε κυλινδρικές συντεταγμένες, με τον άξονα z οριζόντιο, τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου θεωρώντας ότι η κίνηση πραγματοποιείται πάνω στη δισδιάστατη επιφάνεια του οριζοντίου κυλίνδρου, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή Lagrange για την περιγραφή του δεσμού. Στη συνέχεια γράψτε τις διαφορικές εξισώσεις Euler-Lagrange.
2. Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $z(0) = 0, \phi(0) = 0, \rho(0) = R$ και έχει ταχύτητα $\dot{z}(0) = v_0, \dot{\phi}(0) = \Omega, \dot{\rho}(0) = 0$. Να βρείτε την τιμή της Ω προκειμένου το σώμα να δέχεται αρχικά δύναμη $\mathbf{F} = -mg\hat{\boldsymbol{\rho}}(0)$, όπου $\hat{\boldsymbol{\rho}}(0)$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στην αρχική θέση του σωματιδίου.

3. Τώρα θεωρήστε ότι στο χώρο υπάρχει και βαρυτικό πεδίο έντασης g κατακόρυφο, δηλαδή κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου. Αφού αλλάξετε καταλλήλως τις εξισώσεις κίνησης υπολογίστε και πάλι την τιμή της Ω προκειμένου το σώμα να δέχεται και πάλι αρχικά δύναμη $\mathbf{F} = -mg\hat{\boldsymbol{\rho}}(0)$, αν η αρχική θέση και ταχύτητα είναι αυτή του προηγούμενου ερωτήματος. Η γωνία $\phi = 0$ αντιστοιχεί στην ευθεία που βρίσκεται στη χαμηλότερη, μέσα στο βαρυτικό πεδίο, θέση του κυλίνδρου.

   [Δίδεται η έκφραση του ανάδελτα βαθμωτού μεγέθους σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\boldsymbol{\nabla}\Lambda(\rho,\phi,z) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(\partial\Lambda/\partial\rho) + \hat{\boldsymbol{\phi}}(1/\rho)(\partial\Lambda/\partial\phi) + \hat{\mathbf{z}}(\partial\Lambda/\partial z).$$

   ]

Πρόβλημα Γ [25 μονάδες]

Η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος περιγράφεται μέσω των πινάκων κινητικής και δυναμικής ενέργειας, αντίστοιχα:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Να γραφεί η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή του συστήματος.

2. Να υπολογιστούν οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης καθώς και οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Περιγράψτε τις πιθανές κινήσεις του συστήματος με βάση την ευστάθειά τους.

3. Να υπολογιστεί η εξέλιξη του συστήματος αν αρχικά είναι $x_1(0) = \epsilon + \epsilon^2, x_2(0) = \epsilon - \epsilon^2, x_3(0) = \epsilon, \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$, όπου ϵ πολύ μικρός θετικός αριθμός. Αν η πραγματική Λαγκρανζιανή του προβλήματος διαφέρει από τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή, θα περιγράφεται σωστά η κίνηση του συστήματος από την κίνηση που βρήκατε, καθώς $\epsilon \to 0$ μετά από χρόνο $t = \log(1/\epsilon^2)$;

Πρόβλημα Δ [25 μονάδες]

Η Χαμιλτονιανή ενός φυσικού συστήματος έχει τη μορφή

$$H = p_1 p_2 + x_1 x_2$$

1. Να κατασκευαστεί η Χαμιλτονιανή L του συστήματος, καθώς και οι εξισώσεις κίνησης αυτού. Τι φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή η Χαμιλτονιανή;

2. Να υπολογιστούν οι αγκύλες Poisson $\{L, H\}$ και $\{\dot{x}_1, x_1\}$. Είναι η L σταθερά της κίνησης;

3. Αν αρχικά είναι $x_1(0) = 1, p_1(0) = 1, x_2(0) = 0, p_2(0) = 0$, να υπολογιστεί η θέση στο χώρο των φάσεων τη χρονική στιγμή $t = \pi$.

Λύσεις

Πρόβλημα A

1.
$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{1}{2}x^2 \text{ και x} \geq 0$$
$$\ddot{x} + x = 0 \text{ και x} \geq 0$$
$$x(t) = C\cos t + S\sin t \text{ και x} \geq 0$$
$$C = 0\ ,\ S = -1 \text{ και x} \geq 0 \rightarrow \text{x(t)} = |\sin \text{t}|$$

2.
$$S_0 = 0.$$

3.
$$x_1(0) = 0, x_1(3\pi/2) = 1$$
$$S_1 = 0$$

που είναι συμβατή αφού σε τάξη ϵ είναι μηδενική η αλλαγή της δράσης.

Πρόβλημα B

1.
$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \lambda(\rho - R)$$

$$\begin{aligned} \rho &= R \\ m\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\phi}^2 - \lambda \\ \frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\phi}) &= 0 \\ m\ddot{z} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

2.
$$\vec{F} = -\lambda\vec{\nabla}(\rho - R) = \lambda\hat{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow \lambda = mg$$

Έτσι

$$\begin{aligned} 0 &= mR\dot{\phi}^2 - mg \\ mR^2\dot{\phi} &= \text{σταθ} \\ m\dot{z} &= \text{σταθ} \end{aligned} \tag{2}$$

Συνεπώς
$$\Omega^2 = g/R$$

3.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + mg\rho\cos\phi - \lambda(\rho - R)$$
$$\vec{F} = -\lambda\vec{\nabla}(\rho - R) = \lambda\hat{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow \lambda = mg$$

Έτσι

$$\begin{aligned} 0 &= mR\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi - mg \\ mR^2\dot{\phi} &= -mgR\sin\phi \\ m\dot{z} &= \text{σταθ} \end{aligned} \tag{3}$$

Συνεπώς

$$\Omega^2 = 0$$

Πρόβλημα Γ

1.

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 3\dot{x}_3^2) - x_1 x_2$$

2.

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Rightarrow \omega_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{0}, \omega_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2}} = \mathbf{1}, \omega_{\mathbf{3}}^{\mathbf{2}} = -\mathbf{1}$$

με αντίστοιχους τρόπους ταλάντωσης

$$\Xi_1 = (001)^\top, \Xi_2 = (110)^\top, \Xi_3 = (1-10)^\top$$

Οι πρώτοι 2 είναι ευσταθείς και ο τελευταίος ασταθής.

3.

$$\begin{pmatrix} x_(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \Xi_1(C_1 + S_1 t) + \Xi_2(C_2\cos t + S_2\sin t) + \Xi_3(C_3\cosh t + S_3\sinh t)$$

και με βάση τις αρχικές συνθήκες $S_1 = S_2 = S_3 = 0$, $C_1 = C_2 = \epsilon, C_3 = \epsilon^2$. Μετά από χρόνο $t = \log(1/\epsilon^2)$, ο τελευταίος τρόπος "ταλάντωσης" μεγαλώνει σε τάξη 1 και επομένως η γραμμικοποίηση της Λαγκρανζιανής πιθανώς να είναι ανεπαρκής για την περιγραφή του συστήματος εφόσον η απομάκρυνση από την κατάσταση ισορροπίας παύει να είναι μικρή.

Πρόβλημα Δ

1.
$$L = \dot{x}_1\dot{x}_2 - x_1x_2$$
και οι εξισώσεις κίνησης
$$\ddot{x}_1 + x_1 = \ddot{x}_2 + x_2 = 0$$
επομένως πρόκειται για 2 ανεξάρτητους αρμονικούς ταλαντωτές σε 1D, ή ένας ισοτροπικό αρμονικό ταλαντωτή σε 2D.

2.
$$\{L, H\} = \{p_1p_2 - x_1x_2, p_1p_2 + x_1x_2\} = -2\{x_1x_2, p_1p_2\} = -2(x_1p_1 + x_2p_2) \neq 0$$
και
$$\{\dot{x}_1, x_1\} = \{p_2, x_1\} = 0$$

3.
$$x_1(t) = \cos t, x_2(t) = \sin t, p_1(t) = \dot{x}_2 = \cos t, p_2(t) = \dot{x}_1 = -\sin t$$
οπότε
$$x_1(\pi) = -1, x_2(\pi) = 0, p_1(\pi) = -1, p_2(\pi) = 0$$