ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

18 Ιουνίου 2019

Απαντήστε με προσοχή, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

ΜΕΡΟΣ Ι

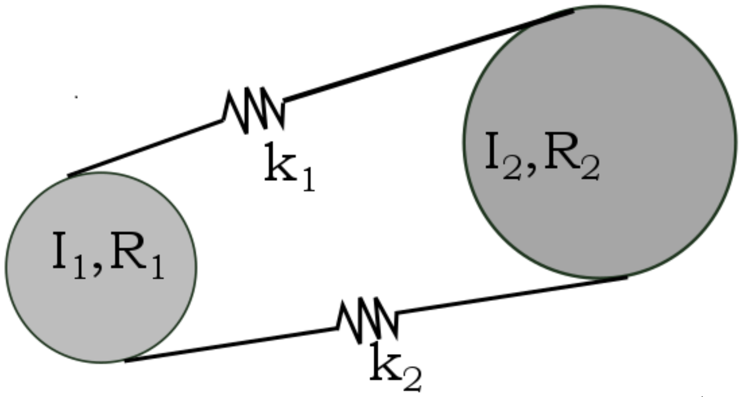
Απαντήστε σε τουλάχιστον 5 από τα ακόλουθα 7 ερωτήματα προκειμένου να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό. Αν απαντήστε και στα 7 θα παρετε βαθμό 6. Μπορείτε να συνεχίσετε με τα επόμενα 2 προβλήματα.

1. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια μιας σφαίρας, **δίχως** την παρουσία βαρυτικού πεδίου. Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες. Το σωματίδιο έχει μάζα m και η σφαίρα ακτίνα R.
2. Σε τι εξισώσεις κίνησης οδηγεί μια Λαγκρανζιανή της μορφής $L = df(x,t)/dt$, όπου f δοσμένη συνάρτηση των x, t;
3. Ένα σωματίδιο με μάζα m και φορτίο Q κινείται μέσα σε δοσμένο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαγράφοντας μια τροχιά $\mathbf{r_1}(t)$. Ένα άλλο σωματίδιο μάζας $2m$ και φορτίου $2Q$ κινείται στο ίδιο πεδίο με το πρώτο σωματίδιο με τις ίδιες αρχικές συνθήκες. Να βρεθεί η τροχιά του 2ου σωματιδίου.
4. Σωματίδιο μάζας m βρίσκεται ακλόνητα στερεωμένο στη θέση $\mathbf{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης. Να γραφεί η Λαγκρανζιανή του, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange που να εξασφαλίζουν τους δεσμούς του. Στη συνέχεια γράψτε τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange και υπολογίστε την αντίδραση των δεσμών του.
5. Η Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου με 1 βαθμό ελευθερίας είναι $L = \frac{1}{2}(\dot{x} - at)^2$. Αφού γραφεί η Χαμιλτονιανή του, H, να υπολογιστεί η αγκύλη Poisson $\{\dot{x}, H\}$.
6. Υπολογίστε την αγκύλη Poisson $\{L_x, L_y\}$, όπου L_x, L_y είναι οι x, y συνιστώσες της στροφορμής ενός σωματιδίου.
7. Μια γραμμικοποιημένη Λαγκραντζιανή έχει τη μορφή:
$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^\top \mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{K}\mathbf{x}$$
όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ περιγράφει την κατάσταση του συστήματος και $\mathbf{M}, \mathbf{K}$ οι συμμετρικοί πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας αυτού. Μια δυνατή λύση αυτής είναι η $x_i = At$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$ και A κάποια σταθερά (κοινή για όλες τις συντεταγμένες x_i). Υπολογίστε την ιδιοσυχνότητα του συστήματος που σχετίζεται με την παραπάνω λύση. Μπορείτε να υπολογίσετε την κατάσταση $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}$, όπου $\boldsymbol{\psi} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$, η κατάσταση που αποτελείται από n μονάδες;

ΜΕΡΟΣ ΙΙ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α Ένα κλειστό μη εκτατό και αβαρές νήμα (ιμάντας) διέρχεται από δύο τροχαλίες οι οποίες μπορούν να περιστρέφονται ελεύθερα, χωρίς τριβές. Το νήμα δεν ολισθαίνει στις αύλακες των τροχαλιών και κινείται πάντοτε μαζί με αυτές. Στο μέσο των δύο τμημάτων του νήματος μεταξύ των τροχαλιών παρεμβάλλονται δύο ελατήρια σκληρότητας k_1, k_2 τα οποία είναι τεντωμένα, ώστε το νήμα να βρίσκεται πάντα υπό τάση και να μην ολισθαίνει στις τροχαλίες. Θεωρήστε ότι οι δύο τροχαλίες έχουν ροπή αδράνειας I_1, I_2 και ακτίνες R_1, R_2 αντίστοιχα.

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος, νήμα-τροχαλίες-ελατήρια χρησιμοποιώντας τις γωνίες στροφής των δύο τροχαλιών ως συντεταγμένες περιγραφής της κατάστασης του συστήματος. [Υπ. Τα ελατήρια είναι αρχικά τεντωμένα και όχι στο φυσικό τους μήκος.]
2. Είναι η Λαγκρανζιανή γραμμικοποιημένη; Τι απαιτείται προκειμένου να απουσιάζουν οι γραμμικοί όροι; Κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας.
3. Βρείτε μία χωρική συμμετρία του συστήματος της μορφής $\theta_1 \to \theta_1' = \theta_1 + \epsilon K_1$ και $\theta_2 \to \theta_2' = \theta_2 + \epsilon K_2$, υπολογίζοντας ένα ζευγάρι κατάλληλων παραμέτρων K_1, K_2. Προσδιορίστε την αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.
4. Προσδιορίστε και περιγράψτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης και τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β Σωματίδιο μάζας $m = 0$ και φορτίου q κινείται στο επίπεδο (x, y) σε ομογενές σταθερό μαγνητικό πεδίο που είναι κάθετο σε αυτό, $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, καθώς και σε χρονοανεξάρτητο ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\mathbf{E} = -k\mathbf{r}$, όπου $\mathbf{r}$ το διάνυσμα θέσης στο επίπεδο με συντεταγμένες (x, y) και $k > 0$.

1. Δείξτε ότι μια αλλαγή του ανυσματικού δυναμικού της μορφής $\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}(\lambda xy)$ όπου λ κάποια σταθερά, οδηγεί σε μια νέα Λαγκρανζιανή, ίδιου, όμως, φυσικού περιεχομένου με την αρχική Λαγκρανζιανή. Σε τι διαφέρουν οι δύο Λαγκρανζιανές;
2. Δείξτε ότι το ανυσματικό δυναμικό $\mathbf{A} = qB(-y/2, x/2, 0)$ παράγει το συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο. Βρείτε ένα βαθμωτό δυναμικό Φ που να περιγράφει το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο και γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες με αυτά τα δυναμικά.
3. Γράψτε τις αντίστοιχες εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange. Πόσες αρχικές συνθήκες απαιτούνται για τον προσδιορισμό της κίνησης; Περιγράψτε την κίνηση του “άμαζου” σωματιδίου και βρείτε μια ποσότητα που διατηρείται.
4. Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος (ως προς το πόσες ποσότητες απαιτούνται για τον προσδιορισμό της εξέλιξης του συστήματος) σκεφθείτε έναν χώρο φάσεων με κατάλληλες διαστάσεις. Σκεφθείτε κατάλληλη Χαμιλτονιανή που θα μπορούσε να περιγράψει Χαμιλτονιανά τη δυναμική του “άμαζου” σωματιδίου; [Υπ. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange θα πρέπει, όντας πρωτοβάθμιες να “διαβαστούν” ως εξισώσεις Χάμιλτον.] Σε τι αντιστοιχεί η κανονική αγκύλη Poisson των παραπάνω συντεταγμένων του χώρου των φάσεων;
5. Προσπαθήστε να κατασκευάσετε τη Χαμιλτονιανή του συγκεκριμένου φυσικού συστήματος με μετασχηματισμό Legendre της Λαγκραντζιανής. Τι δυσκολία εμφανίζεται;

Καλή επιτυχία

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Ι

1. Σε σφαιρικές πολικές:
$$L = \frac{m}{2}R^2(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2)$$
ή θα μπορούσατε να γράψετε την Λαγκραντζιανή με πολλαπλασιαστη Lagrange
$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$$

2. Δεν παράγει καμμία δυναμική. Δεν περιγράφει δηλαδή κανένα δυναμικό σύστημα. Η Λαγκραντζιανή είναι η $L = 0$ διότι ο df/dt είναι μετασχηματισμός βαθμονόμισης.

Αυτό μπορείτε να το δείτε από τη δράση διότι η δράση γίνεται
$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}dt = f(x_2, t_2) - f(x_1, t_1)\ ,$$
που ειναι μια σταθερα και δεν εξαρτάται απο τη διαδρομή, οπότε δεν υπάρχει καμμία πληροφορία για τη διαδρομή που θα ακολουθήσει το φυσικό σύστημα. Δεν περιγράφεται δηλαδή κανένα φυσικό σύστημα.

Αλλος τρόπος εξήγησης: είναι μετασχηματισμός βαθμονόμισης οπότε η Λαγκρανυτζιανή που μας δίνεται είναι ισοδύναμη με την Λαγκραντυζιανή
$$L = 0\ ,$$
η οποία δεν περιγράφει κανένα φυσικό σύστημα και δεν συνεπάγεται καμμία κίνηση.

Αλλος τρόπος: να υπολογίσουμε τις εξισώσεις κίνησης.

Τότε για να γραψουμε τις Euler-Lagrange παρατηρούμε ότι:
$$\begin{aligned} L &= \frac{df}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial t}\ . \end{aligned}$$
Δηλαδή η Λαγκραντζιανή είναι γραμμική συνάρτηση της $\dot{q}$, οπότε η ορμή
$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial f}{\partial q}\ ,$$
και οι εξισώσεις Euler -Lagrange
$$\frac{dp}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

είναι μηδενικές, διότι αφενός:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q}$$

και αφετέρου

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot{q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial t} \ .$$

οπότε έχουμε

$$0 = 0$$

δηλαδή δεν περιγράφεται κανένα φυσικό σύστημα.

Σύνηθες λάθος: Πολλοί είπαν σωστα ότι η Λαγκραντζιανή είναι ισοδύναμη με την $L = 0$ και έπειτα είπαν λανθασμένα ότι αυτό συνεπάγεται ότι το σώμα θα μείνει ακίνητο!....

Ένα άλλο λάθος που είδαμε -: $p = 0$ άρα $\dot{x} = 0$, άρα $x = \alpha t$. Εδώ γίνονται δύο θεμελιώδη λάθη α) $p = 0$ δεν σημαίνει $\dot{x} = 0$, μάλιστα δεν έχουμε καμμία πληροφορία για την σχέση μεταξύ των δύο και β) έστω και να ίσχυε το προηγούμενο από την σχέση ορισμού $\dot{x} = 0$ δεν προκύπτει η κίνηση διότι αυτή δεν είναι η εξίσωση κίνησης.

3. Επειδή $L_2 = 2L_1$, η τροχιά είναι ιδια με την $\mathbf{r}_1$.

4.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(y - y_0) + \lambda_3(z - z_0) \ .$$

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= \lambda_1 && (1)\\
m\ddot{y} &= \lambda_2 && (2)\\
m\ddot{z} &= -mg + \lambda_3 && (3)\\
x - x_0 &= 0 && (4)\\
y - y_0 &= 0 && (5)\\
z - z_0 &= 0 && (6)
\end{aligned}$$

και οι αντιδράσεις:

$$\begin{aligned}
F_x = \lambda_1 &= 0\\
F_y = \lambda_2 &= 0\\
F_z = \lambda_3 &= mg
\end{aligned}$$

Σύνηθες λάθος: Πολλοί έγραψαν ότι εφόσον το σωματίδιο είναι ακίνητο η Λαγκραντζιανή είναι η

$$L = -mgz + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(y - y_0) + \lambda_3(z - z_0) \ .$$

χωρίς την κινητική ενέργεια. Αυτό είναι λάθος. Αν επιβάλλουμε τη δέσμευση πρέπει να την επιβάλλουμε παντού οπότε δεν θα υπάρχουν και πολλαπλασιαστές. Η ακινησία προκύπτει ως λύση της γενικευμένης Λαγκραντζιανής με τους πολλαπλασιαστές πχ η λύση δίνεται από τις (4), (5), και (6).

5. Η ορμή είναι

$$p = \dot{x} - at$$

και η Χαμιλτονιανή

$$H = \dot{x}p - \frac{p^2}{2} = (p + at)p - \frac{p^2}{2} = \frac{p^2}{2} + atp$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \{\dot{x}, H\} &= \{p + at, p^2/2 + atp)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Δεν ζητείται αυτό:
Η επιταχύνση τότε στη Χαμιλτονιανή θεώρηση θα υπολογιζόταν ως

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= \{\dot{x}, H\} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} \\ &= 0 + a \\ &= a \end{aligned}$$

αποτέλεσμα σύμφωνο με αυτό των εξισώσεων Euler-Lagrange.)

6. Είναι

$$L_x = yp_z - zp_y \ \ , \ \ L_y = zp_x - xp_z \ \ , \ \ L_z = xp_y - yp_x$$

Οπότε

$$\begin{aligned} \{L_x, L_y\} &= \{yp_z - zp_y, zp_x - xp_z\} \\ &= \{yp_z, zp_x - xp_z\} - \{zp_y, zp_x - xp_z\} \\ &= \{yp_z, zp_x\} + \{zp_y, xp_z\} \\ &= yp_x\{p_z, z\} + xp_y\{z, p_z\} \\ &= -yp_x + xp_y \\ &= L_z \end{aligned}$$

7. Πρώτον η κίνηση που μας δίνεται είναι ο κανονικός τρόπος "ταλάντωσης" του συστήματος $\psi = (1, 1, 1, \cdots, 1)^T$ διότι είναι μία λύση της οποίας οι σχετικές απομακρύνσεις παραμένουν οι ίδιες σε όλες τις χρονικές στιγμές.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

Δεδομένου ότι $\mathbf{x} = At\psi$ είναι κανονικός τρόπος ταλάντωσης τότε

$$\ddot{\mathbf{x}} = 0 = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{x} = -\omega^2\mathbf{x}$$

όπου ω η ιδιοσυχνότητα του αντιστοιχούντα τρόπου ταλάντωσης η οποία είναι συνεπώς η

$$\omega = 0$$

Επιπλέον δε επειδή ο **M** είναι αντιστρέψιμος θα είναι και:

$$\mathbf{K}\psi = 0 \ .$$

ΜΕΡΟΣ II

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α

'Εστω l_1, l_2 τα φυσικά μήκη των ελατηρίων. Αν στραφεί κατά ϑ_1 ό πρώτος τροχός και ϑ_2 ο δεύτερος τότε το πάνω ελατήριο θα επιμηκυνθεί κατά $R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2$ και κατά $-(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2)$ το δεύτερο. Αν αρχικά τα ελατήρια ήταν τεντωμένα πέραν του φυσικού μήκους κατά Δl_i η δυναμική ενέργεια γίνεται :

$$V = \frac{k_1}{2}(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 - l_1 - \Delta l_1)^2 + \frac{k_2}{2}(-R_1\vartheta_1 + R_2\vartheta_2 - l_2 - \Delta l_2)^2$$

και η Λαγκραντζιανή:

$$L = \frac{I_1}{2}\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{I_2}{2}\dot{\vartheta}_2^2 - \frac{k_1}{2}(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 - l_1 - \Delta l_1)^2 - \frac{k_2}{2}(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 + l_2 + \Delta l_2)^2$$

Για να γίνει η γραμμικοποίηση πρέπει πρώτα να βρούμε την κατάσταση ισορροπίας και έπειτα να θεωρήσουμε διαταραχές ϑ_1, ϑ_2 περί αυτήν. Η Λαγκραντζιανή που θα περιγράφει αυτές τις διαταραχές θα είναι η γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή η οποία περιγράφει ταλαντώσεις περί την κατάσταση ισορροπίας και περιλαμβάνει μόνο όρους δεύτερης τάξης στις μεταβλητές θέσεων και ταχυτήτων (λείπουν δηλαδή ακόμα και οι γραμμικοί όροι). Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{I_1}{R_1}\ddot{\vartheta}_1 &= -k_1(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 - l_1 - \Delta l_1) - k_2(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 + l_2 + \Delta l_2)\\
&= -(k_1+k_2)(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2) + k_1(l_1 + \Delta l_1) - k_2(l_2 + \Delta l_2)\\
\frac{I_2}{R_2}\ddot{\vartheta}_2 &= k_1(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 - l_1 - \Delta l_1) + k_2(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2 + l_2 + \Delta l_2)\\
&= (k_1+k_2)(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2) - k_1(l_1 + \Delta l_1) + k_2(l_2 + \Delta l_2)
\end{aligned}$$

Οπότε αν οι γωνίες αρχίζουν να μετρούνται από την κατάσταση ισορροπίας, οπότε στην κατάσταση ισορροπίας είναι είναι $\vartheta_{1e} = 0$, $\vartheta_{2e} = 0$ και η κατάσταση προκύπτει αν

$$k_1(l_1 + \Delta l_1) = k_2(l_2 + \Delta l_2)\ .$$

Οπότε διαταραχές ϑ_1, ϑ_2 από την κατάσταση ισορροπίας θα διέπονται από την Λαγκραντζιανή

$$L = \frac{I_1}{2}\dot{\vartheta}_1^2 + \frac{I_2}{2}\dot{\vartheta}_2^2 - \frac{k_1+k_2}{2}(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2)^2$$

και τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\frac{I_1}{R_1}\ddot{\vartheta}_1 &= -(k_1+k_2)(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2)\\
\frac{I_1}{R_1}\ddot{\vartheta}_2 &= (k_1+k_2)(R_1\vartheta_1 - R_2\vartheta_2)
\end{aligned}$$

Οι πίνακες είναι

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{K} = (k_1+k_2)\begin{pmatrix} R_1^2 & -R_1R_2 \\ -R_1R_2 & R_2^2 \end{pmatrix} \quad .$$

3. Ο μετασχηματισμός

$$\vartheta_1 \to \vartheta_1' = \vartheta_1 + \varepsilon R_2 \ \ , \ \ \vartheta_2 \to \vartheta_2' = \vartheta_2 + \varepsilon R_1$$

με γεννήτορες $K_1 = R_2$ και $K_2 = R_1$ αφήνει αναλλοίωτη την Λαγκραντζιανή, οπότε είναι συμμετρία και η αντιστοιχούσα διατηρούμενη ποσότης είναι η:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_1} K_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}_2} K_2 = I_1 R_2 \dot{\theta}_1 + I_2 R_1 \dot{\theta}_2 \ .$$

ή διαιρώντας με $R_1 R_2$ η

$$\frac{I_1}{R_1}\dot{\vartheta}_1 + \frac{I_2}{R_2}\dot{\vartheta}_2$$

4. Μπορούν να βρεθούν οι τρόποι ταλάντωσης με τον κλασσικό τρόπο, αλλά μπορούμε να παρατηρήσουμε οτι το πρόβλημα μας είναι πρόβλημα δύο σωμάτων. Αν θέσουμε $R_1 \vartheta_1 = x_1$, $R \vartheta_2 = x_2$ με αντίστοιχες "μάζες" $m_1 = I_1/R_1^2$ και $m_2 = I_2/R_2^2$, οι εξισώσεις κίνησης γίνονται:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - x_2) \ \ , \ \ m_2 \ddot{x}_2 = k(x_1 - x_2) \ .$$

με $k = k_1 + k_2$. Η διατηρούμενη ποσότητα είναι η

$$m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2$$

είναι η ταχύτητα του "κέντρου μάζας" με $\omega = 0$ και τρόπο ταλάντωσης στις συντεταγμένες x_1, x_2 : $[1, 1]^T$ ή $[1/R_1, 1/R_2]^T$ στις ϑ_1, ϑ_2. Ο άλλος τρόπος ταλάντωσης θα έχει συχνότητα

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{\mu}} \ \ , \ \ \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{R_1^2}{I_1} + \frac{R_2^2}{I_2}$$

και τρόπο ταλάντωσης $x_1, x_2 : [m_2, -m_1]^T$ ή $[I_2/R_2, -I_1/R_1]^T$ στις ϑ_1, ϑ_2.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Β

1. Η λαγκραντζιανή αλλάζει κατά

$$q\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla(\lambda xy) = \frac{d(q\lambda xy)}{dt}$$

δηλαδή με ένα μετασχηματισμό αναβαθμονόμισης.

2. Το ηλεκτρικό δυναμικό είναι

$$\Phi = \frac{k}{2}(x^2 + y^2)\ .$$

και η Λαγκραντζιανή:

$$L = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - q\Phi = -\frac{qB}{2}y\dot{x} + \frac{qB}{2}x\dot{y} - \frac{kq}{2}(x^2 + y^2)\ .$$

3. Επειδή

$$p_x = -\frac{qB}{2}y\ \ ,\ \ p_y = \frac{qB}{2}x\ ,$$

οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$\begin{aligned} -\frac{qB}{2}\dot{y} &= -kqx \\ \frac{qB}{2}\dot{x} &= -kqy \end{aligned}$$

ή θέτοντας $\omega = 2k/B$ είναι:

$$\dot{y} = \omega x \quad , \quad \dot{x} = -\omega y \tag{7}$$

Δηλαδή για τον προσδιορισμό της κίνησης χρειάζονται μόνο δύο αρχικές θέσεις οι οποίες και προσδιορίζουν αυτομάτως και τις ταχύτητες. Δηλαδή το που βρίσκεσαι αυτομάτως προσδιορίζει και πόσο γρήγορα κινείσαι. Το πρόβλημα δηλαδή είναι Αριστοτέλειο ενώ θα μπορούσε να θεωρηθεί και ως ενα Νευτώνειο πρόβλημα ενός βαθμού ελευθερίας, αν θεωρούσαμε, όπως και φαίνεται από τον ορισμό των ορμών, ότι αυτές προσδιορίζονται από τις θέσεις. Η κίνηση είναι κυκλική με

$$x = x_0 \cos\omega t - y_0 \sin\omega t \quad , \quad y = y_0 \cos\omega t + x_0 \sin\omega t$$

όπου (x_0, y_0) η αρχική θέση του σωματιδίου και η τροχιά του είναι ο κύκλος:

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\ ,$$

που δείχνει οτι κατά την κίνηση διατηρείται η τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού $\Phi = (k/2)(x^2 + y^2)$.

4. Πράγματι αν πάρουμε ως κανονικές μεταβλητές τις $q = y$ και $p = x$ και Χαμιλτονιανή την $H(q,p) = \omega(q^2 + p^2)/2$ οι εξισώσεις (7) είναι εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}\ . \tag{8}$$

Επειδή οι μεταβλητές $q = y$ και $p = x$ είναι κανονικές θα είναι:

$$\{q, p\} \equiv \{y, x\} = 1 \, .$$

5. Δεν μπορεί να κατασκευαστεί η Χαμιλτονιανή με μετασχηματισμό Legendre, επειδή δεν μπορούμε να εκφράσουμε τα $\dot{x}$, $\dot{y}$ συναρτήσει των (x, y, p_x, p_y), δηλαδή δεν μπορεί να ορισθεί ο μετασχηματισμός Legendre (για να ορισθεί απαιτείται να υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ ταχυτήτων και ορμών).

Τα παρακάτω ερωτήματα δεν συμπεριλήφθηκαν τελικά στο διαγώνισμα. Το ερωτήματα ήταν:

6. Προκειμένου να βρείτε κατάλληλη Χαμιλτονιανή με μετασχηματισμό Legendre της Λαγκραντζιανής, εισάγετε μια μικρή μάζα $m = \varepsilon$ για το σωματίδιο. Βρείτε τώρα την αντιστοιχούσα Χαμιλτονιανή με μάζα $m = \varepsilon$.

7. Γράψτε τις εξισώσεις Χάμιλτον. Ποιές κανονικές συντεταγμένες διατηρούνται στο σύστημα αυτό στο όριο $\varepsilon \to 0$; Πώς μπορεί να προκύψει μία Χαμιλτονιανή που περιγράφει τη κίνηση του άμαζου σωματιδίου;

Απαντήσεις

6. Αν βάλουμε μάζα η Λαγκραντζιανή γίνεται

$$L = \frac{\varepsilon}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{qB}{2}y\dot{x} + \frac{qB}{2}x\dot{y} - \frac{kq}{2}(x^2 + y^2) \, .$$

οπότε

$$p_x = \varepsilon\dot{x} - \frac{qB}{2}y \quad , \quad p_y = \varepsilon\dot{y} + \frac{qB}{2}x \, ,$$

και ορίζεται ο μετασχηματισμός Legendre και προκύπτει η Χαμιλτονιανή:

$$H(\varepsilon) = \frac{(p_x + qBy/2)^2}{2\varepsilon} + \frac{(p_y - qBx/2)^2}{2\varepsilon} + \frac{kq}{2}(x^2 + y^2)$$

7.

Οι εξισώσεις Χάμιλτον είναι:

$$\dot{x} = \frac{1}{\varepsilon}(p_x + \frac{qB}{2}y) \quad , \quad \dot{y} = \frac{1}{\varepsilon}(p_y - \frac{qB}{2}x)$$
$$\dot{p}_x = \frac{qB}{2\varepsilon}(p_y - \frac{qB}{2}x) - kqx \quad , \quad \dot{y} = \frac{qB}{2\varepsilon}(p_x + \frac{qB}{2}y) - kqy$$

Στο όριο $\varepsilon \to 0$ θα πρέπει οι ποσότητες να διατηρούνται

$$p_x + \frac{qB}{2}y = 0 \, , \; p_y - \frac{qB}{2}x = 0$$

και να ισούνται με μηδέν, οπότε λαμβάνουμε την ομαλή Χαμιλτονιανή

$$H(0) = \frac{kq}{2}(x^2 + y^2)$$

με τις (x, y) ως κανονικές μεταβλητές, όπως και πριν.