



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής

### Εξετάσεις στη ΜΗΧΑΝΙΚΗ II

26 Ιουνίου 2020 σειρά Α

Απαντήστε με προσοχή, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

Απαντήστε οπωσδήποτε σε τουλάχιστον 4 από τα ακόλουθα 6 ερωτήματα προκειμένου να πάρετε προβιβάσιμο βαθμό. Αν απαντήσετε και στα 6 θα πάρετε βαθμό 6. Συνεχίστε μετά με το πρόβλημα που ακολουθεί για μεγαλύτερο βαθμό.

- 1 Γράψτε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου μάζας  $m$  που μπορεί να κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας  $R$ , ενώ βρίσκεται σε ομογενές βαρυτικό πεδίο έντασης  $g$  με κατεύθυνση τον άξονα  $z$  προς τα κάτω. (Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες.)
- 2 Έστω η Χαμιλτονιανή σωματιδίου που κινείται σε 1 διάσταση:

$$H = e^{-bt} \frac{p^2}{2m}.$$

Γράψτε την εξίσωση κίνησης και εξηγήστε τι φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή.

- 3 Από την ακόλουθη Χαμιλτονιανή, κατασκευάστε την αντίστοιχη Λαγκρανζιανή

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + 2px + 2x^2).$$

Υπάρχει ακόμη πιο απλή Λαγκρανζιανή από αυτή που βρήκατε, η οποία να περιγράφει το ίδιο φυσικό σύστημα; Ξανακατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή από την απλοποιημένη Λαγκρανζιανή.

- 4 Δύο σωματίδια μοναδιαίας μάζας κινούνται επί ευθείας σε δυναμικό:

$$V = \frac{1}{2} [(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2]$$

όπου  $x_i$  είναι η θέση του  $i$ -στού σωματιδίου επί της ευθείας. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος στη μορφή

$$L = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} K_{ij} x_i x_j$$

και προσδιορίστε του πίνακες  $M_{ij}$  και  $K_{ij}$ . Στη συνέχεια προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τις αντίστοιχες κανονικές ταλαντώσεις. Υπάρχει περίπτωση να κινούνται τα σωματίδια, αλλά να κρατάνε σταθερή απόσταση το ένα από το άλλο. Εξηγήστε σύντομα και με απλά λόγια.

- 5 Έστω η Λαγκρανζιανή ενός συστήματος

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x + y - 2z).$$

Να βρεθεί κάποια συμμετρία της Λαγκρανζιανής και η αντίστοιχη διατηρούμενη ποσότητα.

- 6 Να υπολογιστεί η αγκύλη Poisson  $\{L_x, p_z\}$  όπου  $L_x$  είναι η  $x$ -συνιστώσα της στροφορμής και  $p_z$  η  $z$ -συνιστώσα της ορμής ενός σωματιδίου που κινείται στις 3 διαστάσεις μέσα σε κάποιο δυναμικό. Αφού βρείτε το αποτέλεσμα, δείξτε ότι μια Χαμιλτονιανή της μορφής  $H = p_z^2$  οδηγεί σε σταθερό χρονικό ρυθμό μεταβολής της  $L_x$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ένα εκκρεμές αποτελούμενο από αβαρή ράβδο μήκους  $L$  και σημειακή μάζα  $M$  εκτελεί ταλαντώσεις σε κατακόρυφο επίπεδο εντός του κατακόρυφου ομογενούς βαρυτικού πεδίου, έντασης  $g$ .

1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος σε πολικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστή/ες Lagrange για να κατασκευάστε το δεσμό που συνδέεται με το μη εκτατό της ράβδου.
2. Γράψτε όλες τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου.
3. Θεωρώντας ότι αρχικά η ράβδος βρίσκεται στη θέση  $\theta(0) = \pi/2$  με ταχύτητα  $\dot{\theta}(0) = 0$ , υπολογίστε την αντίδραση του δεσμού στο κατώτερο σημείο  $\theta = 0$ .
4. Αν η σημειακή μάζα φέρει και φορτίο  $Q$  και το εκκρεμές βρίσκεται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, έντασης  $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ , κάθετου στο επίπεδο ταλάντωσης του εκκρεμούς, δείξτε ότι το ανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A} = -B\rho\hat{\theta}/2$  περιγράφει ένα τέτοιο πεδίο, αναλύοντάς το σε καρτεσιανές συντεταγμένες.
5. Υπολογίστε τώρα με το μαγνητικό πεδίο την αντίδραση του δεσμού και πάλι στη θέση  $\theta = 0$ , θεωρώντας αρχικές συνθήκες αυτές του ερωτήματος (3).